

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»
(РУДН)*

*Факультет физико-математических и естественных наук
Институт физических исследований и технологий*

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

**Рекомендуется для направления подготовки/специальности
03.03.02 Физика**

**Квалификация (степень) выпускника
бакалавр**

1. Цели и задачи дисциплины:

Сформировать представление о комплексе идей и методов линейной алгебры, тензорного анализа, дифференциальной геометрии плоских поверхностей и многообразий в многомерных пространствах, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению других основных математических и физических курсов. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к вариативной части, модуль Б1.О.01.06.

Необходимо знание математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии в объеме первого курса; дисциплина является предшествующей к курсам дифференциальных уравнений, вариационному исчислению, аналитической механике, физике, теории поля.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
1	ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	Математический анализ Линейная алгебра Аналитическая геометрия	Дисциплины модулей «Общая физика», «Теоретическая физика», «Общий физический практикум», Физическая кинетика, дисциплины по выбору

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

Алгебраические свойства полилинейных форм и тензоров и их координатных представлений, способы задания двумерных и многомерных поверхностей и выбора локальных систем координат на них, тензорные операции над тензорными полями, дифференциальные операции над тензорными полями; основные понятия векторного анализа и тензорного анализа, свойства полилинейных форм и тензоров и их координатных представлений, что такое метрический тензор, билинейные и квадратичные формы.

Уметь:

Определять координатное представление тензора в различных системах координат, поток векторного поля, дивергенцию векторного поля, циркуляцию и ротор векторного поля в декартовых и криволинейных координатах, определять координатное представление тензора в различных системах координат, решать задачи по определению ковариантных производных тензорных полей и определению связности на римановом многообразии, согласованной с метрикой.

Владеть:

Основами дифференциальной геометрии и тензорного анализа, алгебраическими операциями над тензорами и дифференциальными операциями над тензорными полями.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		6			
Аудиторные занятия (всего)	32	32			
В том числе:					
Лекции	16	16			
Практические занятия (ПЗ)	16	16			
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	40	40			
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>					
Вид промежуточной аттестации (зачет)					
Общая трудоемкость	час	72	72		
	зач. Ед.	2	2		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

Часть 1. Тензоры: алгебраический аспект

Линейное пространство. Линейные функционалы, сопряженное пространство. Базис линейного пространства и его сопряженного, взаимный базис. Тензорное произведение пространств, пространство полилинейных форм. Тензоры. Преобразование координат тензора при замене базиса. Линейный оператор как тензор. Тензорное произведение тензоров. Свертка тензора.

Симметрические тензоры, кососимметрические тензоры. Билинейные формы. Метрический тензор поднятие и опускание индексов. Криволинейные системы координат. Замена координат.

Часть 2. Тензорные поля на многообразиях

Поверхности и многообразия. Касательное пространство. Базис в касательном пространстве. Скалярные функции, векторные поля, тензорные поля. Кокасательное пространство. Дифференциал функции. Пространство полилинейных форм. Координаты тензора. Преобразование координат тензора при замене системы координат.

Метрический тензор на гладкой поверхности, погруженной в евклидово пространство. Поднятие и опускание индексов. Ковариантное дифференцирование, связность, символы Кристоффеля. Преобразование символов Кристоффеля при замене координат. Симметрические и несимметрические связности. Тензор кручения. Связность, согласованная с метрикой. Выражение символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора. Параллельный перенос векторных полей. Геодезические.

Промежуточный контроль знаний в виде коллоквиума.

Итоговый контроль знаний – Экзамен.

5.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	СРС	Всего час.
1.	Тензоры: алгебраический аспект. Линейное пространство. Линейные функционалы, сопряженное пространство. Базис линейного пространства и его сопряженного, взаимный базис. Тензорное	2	2	4	8

	произведение пространств, пространство полилинейных форм. Тензоры. Преобразование координат тензора при замене базиса.				
2.	Линейный оператор как тензор. Тензорное произведение тензоров. Свертка тензора, симметризация, альтернатива, симметрические тензоры, кососимметрические тензоры. Билинейные формы.	2	2	4	8
3.	Метрический тензор поднятие и опускание индексов. Криволинейные системы координат. Замена координат.	2	2	4	8
4.	Касательное пространство. Базис в касательном пространстве. Скалярные функции, векторные поля. Кокасательное пространство.	1	1	4	6
5.	Дифференциал функции. Пространство полилинейных форм. Координаты тензора. Преобразование координат тензора при замене системы координат.	1	1	4	6
6.	Метрический тензор гладкой поверхности, погруженной в евклидово пространство. Поднятие и опускание индексов.	2	2	4	8
7.	Ковариантное дифференцирование, связность, символы Кристоффеля. Преобразование символов Кристоффеля при замене координат.	1	1	4	6
8.	Симметрические и несимметрические связности. Тензор кручения.	1	1	4	6
9.	Связность, согласованная с метрикой. Выражение символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора	2	2	4	8
10.	Параллельный перенос векторных полей. Геодезические.	2	2	4	8

6. Лабораторный практикум – не предусмотрен.

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Темы	Трудоемкость (час.)
1	1	Тензоры: алгебраический аспект	2
2	2	Линейный оператор как тензор	2
3	3	Криволинейные системы координат	2
4	4	Касательное пространство. Кокасательное пространство	1
5	5	Пространство полилинейных форм	1
6	6	Метрический тензор гладкой поверхности, погруженной в евклидово пространство	2
7	7	Преобразование символов Кристоффеля при замене координат	1
8	8	Симметрические и несимметрические связности	1
9	9	Выражение символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора	2
10	10	Параллельный перенос векторных полей	2

8. Курсовые работы – не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

- 1 Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- 2 Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
- 3 А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев, А.Т. Фоменко. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1981.

б) Дополнительная литература

- 4 С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
- В.И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Вся литература имеется в библиотеке РУДН или в электронной библиотеке на кафедре.

в) Программное обеспечение – Windows, Microsoft Office, TeX, WinEdt, пакет «Maple»,

г) Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы – Yandex, Goole, MathNet, кафедра обладает обширной электронной библиотекой.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Изучение каждой темы курса предполагает следующие действия: 1) Посещение лекционных занятий; 2) Самостоятельная проработка изученного на лекции материала по конспекту и рекомендованной литературе; 3) Решение задач и работа на практических занятиях.

Лекционные занятия ориентированы на освещение основных тем курса и призваны сориентировать студентов в предлагаемом материале, заложить научные и методологические основы для дальнейшей самостоятельной работы студентов. Работа на лекционных занятиях предполагает активное участие обучающегося в процессе освоения материала, ведение конспекта.

Самостоятельная работа является важнейшей компонентой изучения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» и включает в основном работу с конспектами лекций и рекомендованной литературой, решение задач.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Шкала оценок

Соответствие систем оценок (согласно Приказу Ректора № 996 от 27.12.2006 г.)

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки
86-100	5	95-100	5+	A
		86-94	5	B
69-85	4	69-85	4	C
51-68	3	61-68	3+	D
		51-60	3	E
0-50	2	31-50	2+	FX
		0-30	2	F
51-60	Зачет		Зачет	Passed

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Векторный и тензорный анализ

Направление: 03.03.02 Физика

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства										Баллы темы	Баллы раздела	
			Текущий контроль							Промежуточная аттестация					
			Опрос	Конспект лекций	Коллоквиум	Контрольные работы	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Работа на практическом занятии	Зачет			
ОПК-1	Тензоры: алгебраический аспект.	Линейное пространство	4	2					2		4	12	42
		Линейный оператор как тензор	4	2					2		4			12	
		Касательное пространство. Кокасательное пространство	4	2					4		8			18	
	Дифференциал функции. Координаты тензора. Преобразование координат тензора при замене системы координат	Ковариантное дифференцирование, связность, символы Кристоффеля	4	2					4		8			18	58
		Связность, согласованная с метрикой. Выражение символов Кристоффеля через компоненты метрического тензора	4	4					4		8			20	
		Параллельный перенос векторных полей. Геодезические	4	4					4		8			20	
		ИТОГО:	24	16					20		40			100	100

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Определить направление и величину наибольшего роста скалярного поля $U = x^2 + 2xy^2 - z^3$, в точке $M_0(1, 1, 3)$.
2. Показать, что векторы $a = \{-1; 4; 1\}$, $b = \{0; 4; 1\}$, $c = \{1; -2; 1\}$ образуют базис, и разложить вектор $d = \{3; 4; -5\}$ по этому базису.
3. Из векторов $a = \{6, -4, -5\}$, $b = \{3, 3, 2\}$, $c = \{-1, -5, 1\}$ и $d = \{-4, 5, -2\}$ выделить аффинный базис и разложить по этому базису вектор $g = \{3, -3, 8\}$.
4. Найти смешанное произведение векторов: $a = \{3, 4, 5\}$, $b = \{-3, 4, -2\}$, $c = \{1, 3, -1\}$ и определить объем параллелепипеда, построенного на векторах сомножителях.
5. Вычислить циркуляцию векторного поля: вдоль окружности, полученной пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с плоскостью $x + y + z = 0$. Обход контура осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из точки $M(1, 1, 0)$.

ЗАДАНИЯ К ЗАЧЕТУ

1. Поток векторного поля. Теорема Остроградского.
2. Ротор векторного поля.
3. Теорема Стокса.
4. Оператор Гамильтона и его применение.
5. Дифференциальные операции второго порядка.
6. Потенциальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие потенциальности векторного поля.
7. Соленоидальное векторное поле, примеры. Необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля.
8. Лапласово векторное поле. Потенциал лапласова векторного поля.
9. Теорема о разложении непрерывного векторного поля на потенциальное и соленоидальное.
10. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе.
11. Понятие тензора. Ранг тензора. Свойство инвариантности.
12. Действия над тензорами.
13. Тензоры в криволинейных системах координат.
14. Метрический тензор.
15. Определение тензора произвольного порядка.
16. Преобразование компонент тензора при повороте плоскости вокруг перпендикулярной оси.
17. Тензор в обобщенных координатах.
18. Понятие главной оси тензора. Приведение тензора к главным осям. Тензорный эллипсоид.
19. Понятие тензорной функции скалярного аргумента. Действия над тензорными полями.
20. Поток тензорного поля.
21. Дивергенция тензорного поля.
22. Дифференцирование тензорного поля по направлению.
23. Теорема Риччи о равенстве нулю ковариантной производной метрического тензора.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций

Данная дисциплина занимает один семестр, в конце которого оцениваются результаты работы. Аттестация проводится по всему курсу в виде зачета с учетом следующих дополнительных показателей:

- посещаемость лекционных и практических занятий по данному курсу
- решение задач на практических занятиях и выполнение тестов
- ответы на контрольные вопросы по темам дисциплины.

При недостаточном выполнении показателей, изложенных выше, студент проходит на зачет. В билет зачета включено два теоретических вопроса и две задачи, соответствующие содержанию формируемых компетенций. Зачет проводится в устной форме. На подготовку ответа и решение задачи студенту отводится 45 минут. Зачет выставляется при выполнении не менее 50% заданий.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия и определения скалярного поля.
2. Производная по направлению.
3. Градиент скалярного поля.
4. Источниковое векторное поле.
5. Поток векторного поля.
6. Дивергенция, первое уравнение векторного поля.
7. Вычисление дивергенции в ДСК.
8. Ротор векторного поля.
9. Второе уравнение векторного поля.
10. Вычисление ротора в ДСК.
11. Операции первого и второго порядка по набла.
12. Решение уравнений векторного поля.
13. Формулы Грина.
14. Построение КСК.
15. Метрика КСК.
16. Нормировка базиса КСК.
17. Ортогональные КСК.
18. Выражение градиента в орто-КСК.
19. Выражение дивергенции в орто – КСК.
20. Выражение ротора в орто – КСК.
21. Выражение оператора Лапласа в орто – КСК.
22. Тензорный закон преобразования базисных векторов.
23. Общее определение тензора.
24. Сложение и вычитания тензоров.
25. Тензорное умножение.
26. Операция поднятия и опускания индексов.
27. Операция свертки индексов.
28. Альтернирование и симметрирование тензоров.
29. Дифференцирование базисных векторов.
30. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором.
31. Дифференцирование тензоров.
32. Тензор кривизны Римана – Кристоффеля.
33. Геодезические линии.
34. Риманова геометрия.

Руководитель направления 03.03.02

Директор института физических исследований и технологий, д.ф.-м.н., профессор



О.Т. Лоза