

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук  
Рекомендовано МССН*

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Дополнительные главы функционального анализа**

**Рекомендуется для направления подготовки**

**01.06.01 «Математика и механика»**

**Направленность программы (профиль)**

**«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»**

## 1. Цели и задачи дисциплины

Основной целью дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа» является обучение учащихся некоторым современным методам теории функциональных пространств и освоение математического аппарата, используемого для исследования современных проблем теории.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:

Дисциплина «Дополнительные главы функционального анализа» относится к вариативной части блока 1 учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	№ Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
<b>Профессиональные компетенции</b>			
	ПК-1 владение знаниями в основных разделах вещественного, комплексного и функционального анализа, включающих теорию меры, теорию интеграла Лебега, ряды Фурье, преобразование Фурье, теорию аналитических функций, теорию метрических, банаховых и гильбертовых пространств, теорию ограниченных и вполне непрерывных операторов в банаховых пространствах, теорию самосопряженных операторов, спектральную теорию операторов	-	Общая теория функционально-дифференциальных уравнений; Нелинейные уравнения в частных производных; Вариационный анализ дифференциальных уравнений; Математические методы в экономике.
	ПК-3 умение сформулировать задачу исследования и пути ее осуществления, обобщить полученные результаты и сделать соответствующие выводы, должен понимать практические аспекты получаемых теоретических результатов		
<b>Универсальные компетенции</b>			
	УК-1 способность к критическому анализу и	-	Общая теория функционально-дифференциальных урав-

	<p>оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p> <p>УК-2 способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки</p> <p>УК-3 готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач</p> <p>УК-5 способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития</p>		<p>нений;</p> <p>Методы теории оптимального управления;</p> <p>Математические методы в экономике.</p>
--	---	--	---

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: УК-1, УК-2, УК-3, УК-5, ПК-1, ПК-3

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:**

- основные типы функциональных пространств;
- критерии ограниченности основных операторов гармонического анализа в различных функциональных пространствах;
- основы теории оптимальных вложений;
- решения задач о следах и продолжениях для основных функциональных пространств.

**Уметь:**

- ставить и исследовать задачи теории приближений;
- ставить задачи об оптимальных вложениях;
- ставить и решать задачи об оценках норм интегральных операторов в функциональных пространствах;
- выбирать и обосновывать методы их исследования.

**Владеть:**

современным математическим аппаратом, требующимся для решения задач теории функциональных пространств.

#### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость курса «Дополнительные главы функционального анализа» составляет 4 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>		1	2		
В том числе:	-	-	-	-	-
<i>Лекции</i>	40	20	20		
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	40	20	20		
<i>Семинары (С)</i>					
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	64	32	32		
Общая трудоемкость	144	72	72		
час		2	2		
зач. ед.					

#### 5. Содержание дисциплины

##### 5.1. Содержание разделов дисциплины

###### 1 Семестр

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Определение и общие свойства пространства $L_p$ , $0 < p \leq \infty$ . Свойства нормы и квазинормы	Основные понятия теории меры и интеграла Лебега. Неравенство Чебышева и его следствия. Теоремы Леви, Лебега и Фату о предельном переходе в интеграле Лебега. Определение и общие свойства пространства $L_p$ , $0 < p \leq \infty$ . Сходимость и полнота.
2.	Неравенство Гельдера.	Неравенство Гельдера, его обоснование. Точность неравенства Гельдера. Отсутствие линейных непрерывных функционалов в пространстве $L_p$ , $0 < p < 1$ . Применения неравенства Гельдера: вложение пространств на множествах конечной меры, мультипликативное неравенство, дискретное неравенство Гельдера.
3.	Неравенство Минковского	Неравенство Минковского при $p \geq 1$ , свойство нормы. Неравенство Минковского при $0 < p < 1$ , свойство квазинормы. Точность констант в неравенстве Минковского. Обобщенное неравенство Минковского для сумм при $p \geq 1$ . Обобщенное неравенство Минковского для сумм при $0 < p < 1$ . Обобщенное неравенство Минковского для интегралов. Обобщенное неравенство Минковского для свертки. Неравенство Юнга.

4.	Неравенство Харди	Вывод неравенства Харди. Неулучшаемость условий справедливости неравенства Харди. Точность постоянной в неравенстве Харди (вычисление нормы оператора Харди).
5.	Базовые понятия теории интерполяции. Классическая интерполяционная теорема Рисса-Торина и ее применения в теории преобразования Фурье.	Преобразование Фурье функций из $L_p$ . Теорема Планшереля и равенство Парсеваля в $L_2$ . Теоремы типа Хаусдорфа - Юнга и Пэли и их обоснование методами интерполяции.
6	Определение и основные свойства Фурье – мультипликаторов	Пространство Фурье- мультипликаторов в $L_p$ . Достаточные условия Фурье- мультипликатора в $L_p$ - интегрируемость его преобразования Фурье. Формулировка и доказательство основной теоремы о мультипликаторах интеграла Фурье.
7.	Теоремы о мультипликаторах интеграла Фурье и их применения	Теоремы Марцинкевича, Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье. Теорема М. Рисса об ограниченности сумм Дирихле. Характеристические функции полосы, прямоугольного параллелепипеда и выпуклого многогранника как мультипликаторы интеграла Фурье. Результат Ч. Фейффермана по проблеме Фурье- мультипликаторов.
8.	Подпространство целых функций экспоненциального типа в пространстве Лебега	Интегральное представление целой функции экспоненциального типа. Основные интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа. Оценки производных, неравенство разных метрик. Следы функций и неравенство разных измерений для целых функций экспоненциального типа
9	Наилучшие приближения функций из пространств Лебега с помощью целых функций экспоненциального типа	Понятие наилучшего приближения, его общие свойства. Реализация наилучшего приближения в пространстве квадратично интегрируемых функций. Алгоритмы построения приближений «порядка наилучшего», их связь с теорией Фурье-мультипликаторов.
10.	Теоремы о приближении интегрируемых функций финитными бесконечно дифференцируемыми функциями	Усреднение функций по Соболеву, его связь с обобщенным дифференцированием. Построение приближений финитными бесконечно дифференцируемыми функциями. Пространство Соболева, его полнота.

## 2 Семестр

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Теория пространств Соболева для областей, удовлетворяющих условию конуса	Интегральное представление Соболева и следствия из него. Оценки промежуточных производных для функций из пространств Соболе-

		ва. Применение неравенств Юнга и Харди-Литтлвуда-Соболева. Вложение разных метрик для пространств Соболева.
2.	Свойства модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости.	Свойства конечных разностей и модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости функций. Свойства монотонности и оценки модулей непрерывности. Теорема Маршо о связи модулей непрерывности различных порядков.
3.	Общие свойства пространств дробной гладкости. Классические пространства Никольского-Бесова . Пространства обобщенной гладкости	Определения пространств Никольского- Бесова, их общие свойства. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского- Бесова в терминах модулей непрерывности, в интегральной и в дискретной форме. Полнота пространств Никольского- Бесова. Обобщения пространств Никольского-Бесова – пространства обобщенной гладкости
4.	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики	Основная лемма об оценке дискретных сумм. Теорема вложения по показателю гладкости и по второму индексу. Расширяющаяся шкала пространств Никольского- Бесова. Оценка модуля непрерывности функции с локальной сингулярностью и критерии ее принадлежности пространствам Соболева, Никольского-Бесова и пространствам обобщенной гладкости .
5.	Разностная характеристика обобщенных производных и пространств Соболева	Операторы усреднения, свойства их ядер. Интегральные представления разностей через производные. Теоремы о свойствах операторов усреднения. Разностные критерии принадлежности обобщенных производных по направлениям к $L_p$ .
6.	Разностная характеристика пространств Соболева и их связь с пространствами Никольского – Бесова.	Эквивалентные нормы и разностная характеристика пространств Соболева. Взаимные вложения пространств Соболева и Никольского- Бесова.
7.	Точное описание пространства следов функций из пространств Соболева на подпространствах меньшей размерности .	Теорема о следах функций из пространств Соболева. Теоремы продолжения. Совпадение пространства следов с пространством Бесова на границе области. Постановка краевых задач в классах Соболева
8.	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова и их обобщений	Эквивалентные нормы в обобщенных пространствах Никольского- Бесова с использованием обобщенных производных и модулей непрерывности.
9.	Вложение разных метрик для обобщенных пространств Никольского-Бесова.	Эквивалентные нормы в обобщенных пространствах Никольского- Бесова в терминах разложений в ряды по целым функциям экспоненциального типа Формулировка и доказательство теоремы вложения разных метрик. Неулучшаемость теоремы вложения.
10.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	Понятие следа на подпространстве меньшей размерности. Теорема о точном описании

		пространства следов для пространств Никольского- Бесова. Предельный случай теоремы о следах. Отсутствие линейных операторов продолжения в предельном случае.
--	--	--

## 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

### 1 Семестр

№ п/п	Наименование раздела	Лекц.	Практические занятия и лабораторные работы			СР	Всего
			ПЗ/С	ЛР	из них в ИФ		
1.	Определение и общие свойства пространства $L_p$ , $0 < p \leq \infty$ . Свойства нормы и квазинормы	4	4			6	14
2.	Неравенство Гельдера.	2	2			4	8
3.	Неравенство Минковского	2	2			4	8
4.	Неравенство Харди	2	2			4	8
5.	Базовые понятия теории интерполяции. Классическая интерполяционная теорема Рисса- Торина и ее применения в теории преобразования Фурье.	2	2			3	7
6.	Определение и основные свойства Фурье – мультипликаторов.	2	2			3	7
7.	Теоремы о мультипликаторах интеграла Фурье и их применения.	2	2			4	8
8.	Подпространство целых функций экспоненциального типа в пространстве Лебега.	2	2			2	6
9.	Наилучшие приближения функций из пространств Лебега с помощью целых функций экспоненциального типа.	1	1			1	3
10.	Теоремы о приближении интегрируемых функций финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.	1	1			1	3
	Итого:	20	20			32	72

### 2 Семестр

1.	Теория пространств Соболева для областей, удовлетворяющих условию конуса.	4	4			6	14
----	---	---	---	--	--	---	----

2.	Свойства модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости.	2	2			4	8
3.	Общие свойства пространств дробной гладкости. Классические пространства Никольского-Бесова . Пространства обобщенной гладкости.	2	2			4	8
4.	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики.	2	2			4	8
5.	Разностная характеристика обобщенных производных и пространств Соболева.	2	2			3	7
6.	Разностная характеристика пространств Соболева и их связь с пространствами Никольского – Бесова.	2	2			3	7
7.	Точное описание пространства следов функций из пространств Соболева на подпространствах меньшей размерности	2	2			4	8
8.	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова и их обобщений	2	2			2	6
9.	Вложение разных метрик для обобщенных пространств Никольского-Бесова.	1	1			1	3
10.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	1	1			1	3
	Итого:	20	20			32	72

**6. Лабораторный практикум** – не предусмотрен

**7. Практические занятия (семинары)**

**1 Семестр**

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1.	<b>1</b>	Определение и общие свойства пространства $L_p$ , $0 < p \leq \infty$ . Свойства нормы и квазинормы	2
2.	<b>2</b>	Неравенство Гельдера.	2
3.	<b>3</b>	Неравенство Минковского	2
4.	<b>4</b>	Неравенство Харди	2
5.	<b>5</b>	Базовые понятия теории интерполяции. Классическая интерполяционная теорема Рисса- Торина и ее применения в теории преобразования Фурье.	2
6.	<b>6</b>	Определение и основные свойства Фурье – мультипликаторов.	2



7.	7	Теоремы о мультипликаторах интеграла Фурье и их применения.	2
8.	8	Подпространство целых функций экспоненциального типа в пространстве Лебега.	2
9.	9	Наилучшие приближения функций из пространств Лебега с помощью целых функций экспоненциального типа.	2
10.	10	Теоремы о приближении интегрируемых функций финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.	2

## 2 Семестр

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
11.	1	Теория пространств Соболева для областей, удовлетворяющих условию конуса.	2
12.	2	Свойства модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости.	2
13.	3	Общие свойства пространств дробной гладкости. Классические пространства Никольского-Бесова. Пространства обобщенной гладкости.	2
14.	4	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики.	2
15.	5	Разностная характеристика обобщенных производных и пространств Соболева.	2
16.	6	Разностная характеристика пространств Соболева и их связь с пространствами Никольского – Бесова.	2
17.	7	Точное описание пространства следов функций из пространств Соболева на подпространствах меньшей размерности	2
18.	8	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова и их обобщений	2
19.	9	Вложение разных метрик для обобщенных пространств Никольского-Бесова.	2
20.	10	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	2

### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитории 495а, 398, 509 в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, д. 3, групповые аудитории в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, д. 3 на 3, 4 и 5 этажах, дисплей-классы, лаборатории (ауд. 510 и 424).

### 9. Информационное обеспечение дисциплины:

Используются только лицензированное, установленное в РУДН программное обеспечение:

- пакет программ Microsoft Office;
- средства мультимедийной техники и персональные компьютеры;
- полнотекстовые базы данных и ресурсы, доступ к которым обеспечен из сети РУДН;
- электронная библиотека РФФИ <http://www.rfbr.ru/rffi/ru/library>

## **11. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:**

### **а) основная литература:**

1. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
3. Л. Хермандер. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: ИЛ, 1962.
4. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973
5. В. И. Буренков. Функциональные пространства. Пространства Соболева. М.: РУДН, 1991.
6. Т. А. Леонтьева, В. С. Парфенов, В. С. Серов. Задачи по теории функций действительного переменного. М.: МГУ, 1997.

### **б) дополнительная литература:**

7. В. Г. Мазья. Пространства Соболева. ЛГУ, 1985.
8. Г. Трибель. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
9. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. Интерполяция линейных операторов. М. Наука, 1978.
9. C. Bennett, R. Sharpley "Interpolation of operators", Pure and Applied Mathematics, V. 129 ,Academic Press, 1988.

### **в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы**

1. ВАК РФ <http://vak.ed.gov.ru>
2. Электронная библиотека РГБ <http://www.rsl.ru/>
3. Сайт библиотеки РУДН <http://lib.rudn.ru/>
4. Science Direct <http://www.sciencedirect.com> Описание: Ресурс содержит коллекцию научной, технической полнотекстовой и библиографической информации. База данных мультидисциплинарного характера включает научные журналы по точным и техническим наукам.
5. EBSCO <http://search.ebscohost.com>, Academic Search Premier (база данных комплексной тематики, содержит информацию по гуманитарным и естественным областям знания).
6. Oxford University Press <http://www3.oup.co.uk/jnls>. Журналы по точным и техническим наукам Oxford University Press представленные в коллекции HSS
7. Sage Publications <http://online.sagepub.com> . База публикаций Sage включает в себя журналы по разным отраслям знаний: Sage\_STM – более 100 журналов в области естественных наук, техники.

8. Springer/Kluwer <http://www.springerlink.com>. Журналы и книги издательства
9. Springer/Kluwer охватывают различные области знания и разбиты на предметные категории.
10. Tailor & Francis <http://www.informaworld.com>. Коллекция журналов насчитывает более 1000 именованных по всем областям знаний.
11. American Mathematical Society <http://www.ams.org/> Ресурс американского математического общества.
12. European Mathematical Society <http://www.euro-math-soc.eu/> Ресурс европейского математического общества.
13. Portal to Mathematics Publications <http://www.emis.de/projects/EULER/>
14. Каталог математических интернет ресурсов <http://www.mathtree.ru/>
15. Zentralblatt MATH (zbMATH) <https://zbmath.org>
16. Общероссийский математический портал mathnet.ru
17. Web of Science <http://www.isiknowledge.com>
18. Ресурсы Института научной информации по общественным наукам Российской академии наук (ИНИОН РАН) <http://elibrary.ru>.
19. Университетская информационная система РОССИЯ. <http://www.cir.ru/index.jsp>.
20. Гости система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу <http://www.ifap.ru/library/gost/sibid.htm>.
21. Электронная библиотека РУДН <http://www.rsl.ru/>

#### г) периодические издания

Алгебра и анализ, Дискретная математика, Журнал вычислительной математики и математической физики, Известия Российской академии наук. Серия математическая, Математические заметки Математический сборник, Математическое моделирование, Теоретическая и математическая физика, Теория вероятностей и ее применения, Успехи математических наук, Функциональный анализ и его приложения, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Современные проблемы математики, Вычислительные методы и программирование, Труды семинара имени И. Г. Петровского, Учёные записки Московского государственного университета Фундаментальная и прикладная математика, Review of Modern Physics, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Annual Review of Biochemistry, Chemical Reviews Nature Physics, Annual Review of Condensed Matter Physics, Annals of Mathematics, Journal of the American Mathematical Society, Acta Mathematica, Communications on Pure and Applied Mathematics Swarm and Evolutionary Computation Geometric and Functional Analysis Formal Aspects of Computing, Discrete Mathematics, Theory of Computing Systems Reports on Progress in Physics New Journal of Physics.

#### 12. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

##### 13.

Формат семинара – презентация ключевых идей хрестоматийных источников-текстов по курсу. Конкретно презентация выглядит так: обучаемый выбирает одну из ключевых идей обсуждаемого на семинаре текста, готовит в виде тезисов (на 1–1,5 стр.) свое ее понимание и критическую оценку, затем на семинаре все это представляется и защищается. Тезисы заранее размножаются и раздаются всем участникам семинара.

Предполагается написание реферата – по теме, согласованной с преподавателем. Объем реферата – не более 15 тысяч знаков с пробелами. Как реферат принимается также перевод статьи зарубежного автора вместе с развернутой критико-аналитической ее оценкой. Согласование и автора, и текста с преподавателем обязательно.

В конце семестра – экзамен в форме эссе по одной из предложенных (на выбор) преподавателем тем. После собеседования выставляется итоговая оценка. Результаты определяются путем проведения промежуточной аттестации с выставлением оценок «лично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» и в системе ECTS (A, B,

## 12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

*Материалы для оценки уровня освоения учебного материала дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа» (оценочные материалы), включающие в себя перечень компетенций с указанием этапов их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания, типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы, методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций, разработаны в полном объеме и доступны для обучающихся на странице дисциплины в ТУИС РУДН.*

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

### **Разработчики:**

Профессор Математического института  
им. С.М. Никольского

Гольдман М.Л.

### **Руководитель программы:**

Директор Математического института  
им. С.М. Никольского

Скубачевский А.Л.

### **Заведующий кафедрой:**

Директор Математического института  
им. С.М. Никольского

Скубачевский А.Л.