

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ**

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.04.01 «Математика»

специализация «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень) выпускника

**магистр**

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

**1. Цели и задачи дисциплины:** Курс предназначен для студентов, обучающихся по направлению «Математика», и исходит из концепции экономического прогнозирования на основе сценарных численных экспериментов с математическими моделями экономических систем, построенных на принципах системного анализа развивающейся экономики.

Основной целью курса является дать представление слушателям о современном состоянии теории и практики социально-экономического прогнозирования, основанного на использовании математических моделей экономических систем.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Математические модели в экономике» относится к вариативной компоненте учебного плана (модуль по выбору 1). В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Универсальные компетенции			
1.	УК-5. Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия	-	Государственный экзамен

## 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: УК-5

УК-5. Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**Знать:** математическое и алгоритмическое моделирование при анализе экономических и социальных процессов

**Уметь:** решать задачи бизнеса, финансовой и актуарной математики

**Владеть:** основными понятиями экономического прогнозирования.

## 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
		1	2	3	
Аудиторные занятия (всего)				63	
В том числе:					

Лекции				27	
Практические занятия (ПЗ)				36	
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>				<b>81</b>	
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>				81	
Вид промежуточной аттестации (экзамен)					
Общая трудоемкость	час			144	
	зач. ед.			4	

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1.	Модель межотраслевого баланса Леонтьева	Модель межотраслевого баланса Леонтьева. Постановка задачи о продуктивности производства
2.	Продуктивные матрицы	Продуктивные матрицы. Теорема о разложении в ряд резольвенты продуктивной матрицы
3.	Теорема Фробениуса-Перрона	Теорема Фробениуса – Перрона. Свойства числа Фробениуса – Перрона и их экономическая интерпретация. Неразложимые матрицы и их свойства. Теорема об устойчивых матрицах.
4.	Теоремы о неотрицательных матрицах	Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах. Задача о планировании крупных научно-исследовательских проектов. Задача о поиске арбитражных цепочек на валютных рынках. Теорема Африата-Вермана
5.	Двойственность	Задачи линейного программирования со смешанными ограничениями. Двойственность.
6.	Экономическая интерпретация двойственности	Экономическая интерпретация двойственности: трудовая теория стоимости и ее критика
7.	Декомпозиция задачи распределения ресурсов	Декомпозиция задачи распределения ресурсов с помощью множителей Лагранжа и ее экономическая интерпретация. Оценка эффективности новых технологий.
8.	Экономическая интерпретация принципа максимума	Экономическая интерпретация принципа максимума в моделях оптимального экономического роста
9.	Понятие магистрали	Понятие магистрали в моделях экономического роста. Теорема Моришимы.

10.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.
11.	Игра в нормальной форме	Игра в нормальной форме. Понятия равновесия по Нэшу и оптимальности по Парето. Примеры игр: «дилемма заключенного», «семейный спор», «чет-нечет». Равновесие по Штаккельбергу. Смешанные стратегии. Теорема фон Неймана о равновесии в смешанных стратегиях в матричной игре.
12.	Теорема Нэша	Теорема Нэша. Модель олигополии Курно.
13.	Модель Эрроу-Дебре	Модель Эрроу-Дебре. Понятие конкурентного равновесия. Закон Вальраса. Первая теорема теории благосостояния.

## 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего час.
1.	Модель межотраслевого баланса Леонтьева	2	5		6	13
2.	Продуктивные матрицы	2	2		6	10
3.	Теорема Фробениуса-Перрона	2	2		6	10
4.	Теоремы о неотрицательных матрицах	2	2		6	10
5.	Двойственность	2	2		6	10
6.	Экономическая интерпретация двойственности	2	3		6	11
7.	Декомпозиция задачи распределения ресурсов	2	2		7	11
8.	Экономическая интерпретация принципа максимума	2	2		6	10
9.	Понятие магистрали	2	2		7	11
10.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.	2	2		7	11
11.	Игра в нормальной форме	2	2		6	10
12.	Теорема Нэша	2	4		6	12
13.	Модель Эрроу-Дебре	2	4		6	12
14.	Итоговый контроль	1	2			3

## 6. Лабораторный практикум не предусмотрен

## 7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Темы практического занятия	Трудо-емкость (час.)
1.	Модель межотраслевого баланса Леонтьева	5

2.	Продуктивные матрицы	2
3.	Теорема Фробениуса-Перрона	2
4.	Теоремы о неотрицательных матрицах	2
5.	Двойственность	2
6.	Экономическая интерпретация двойственности	3
7.	Декомпозиция задачи распределения ресурсов	2
8.	Экономическая интерпретация принципа максимума	2
9.	Понятие магистрали	2
10.	Модель Кокса-Росса-Рубинштейна.	2
11.	Игра в нормальной форме	2
12.	Теорема Нэша	4
13.	Модель Эрроу-Дебре	4

**8. Курсовые работы** не предусмотрены.

**9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

*Основная литература*

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. - М., Наука, 1984.
2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М., Мир, 1972.

*Дополнительная литература*

1. Обен Ж-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. - М., Мир, 1988.
2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. - М., Мир, 1985.
3. Экланд И. Элементы математической экономики. - М., Мир, 1983.
- 4.

**10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1 шт., проектор - 1 шт., экран - 1 шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1 шт., сканер - 1 шт.

**11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

Проводятся по две контрольные работы и одному коллоквиуму. Студентам, набравшим низкие баллы на коллоквиумах и контрольных работах, в обязательном порядке предписывается посещать дополнительные консультации лектора.

Для сильных студентов, желающих рассматривать геометрию как основу дальнейшей научной деятельности, функционирует кружок под руководством лектора.

### 11.1 Структура практических занятий

На практических занятиях решаются задачи и упражнения по текущим темам. В конце семестра студентам предлагается домашнее задание, состоящее из трех задач.

Результаты работы на практических (интерактивных) занятиях и домашнего задания входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний студентов.

Методически курс построен так, чтобы все наиболее сложные задачи рассматривались в простейших случаях, что облегчает понимание их студентами.

### 11.2 Самостоятельная работа студента

На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

В рамках курса запланировано домашнее задание (максимально за выполнение данной работы можно получить 25 баллов).

**Разработчик:**

**д.ф.-м.н., проф.,  
проф. Математического института**

**им. С.М. Никольского**



**А.А. Шананин**

**Директор Математического института  
им. С.М. Никольского,  
д.ф.-м.н., профессор**



**А.Л. Скубачевский**

**Математический институт им. С.М. Никольского**  
**(наименование кафедры)**

УТВЕРЖДЕН

на заседании института

«31»\_\_08\_\_2020\_\_ г., протокол №\_1\_\_

Директор института

(подпись)

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**Математические модели в экономике**  
(наименование дисциплины)

*01.04.01 Математика*

(код и наименование направления подготовки)

Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование  
и машинное обучение»

(специализация)

магистр

Квалификация (степень) выпускника

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства														Баллы <sup>8</sup> темы	Баллы раздела		
			Текущий контроль											Промежуточная аттестация						
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Реферат	Выполнение РГР	Работа на инт. зан.	...	...	Экзамен/Зачет	...	...			
УК-5	Математические модели в экономике	Простейшая модель экономики								5			5			10			20	100
		Схематическая модель отрасли экономики								5			5			10			20	
		Проблема идентификации внешних параметров модели								5			5			10			20	
		Методы прогнозирования спроса на инновации								5			5			10			20	
		Параллельные вычисления								5			5			10			20	
		<b>ИТОГО:</b>							<b>25</b>			<b>25</b>			<b>50</b>			<b>100</b>	100	



## Приложение 3

### Математические модели в экономике

(наименование дисциплины)

### 1. ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

#### Вариант 1

1. Чему равна цена в модели Курно с двумя производителями, имеющими

одинаковые функции издержек производства  $\mathbf{c}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{c}_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2$ ,

и потребителем с обратными функциями спроса  $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = 1 - \mathbf{X}^2$ .

2. Найти равновесия по Нэшу и оптимальные по Парето исходы в биматричной игре двух лиц

$$\text{а) } \begin{pmatrix} (2,1) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} (2,0) & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} (2,-1) & (0,1) \\ (4,0) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} (-2,0) & (2,0) \\ (3,1) & (1,1) \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} (5,0) & (-1,1) \\ (1,2) & (1,-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} (2,4) & (-2,0) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}$$

3. Найти равновесие по Нэшу и оптимальные по Парето исходы в антагонистической игре двух лиц

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{е) } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

1. Является ли неотрицательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0, & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

а) продуктивной, б) неразложимой, в) устойчивой.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$$

2. Пусть  $A$  неотрицательная квадратная матрица. Доказать, что если  $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$ ,

то ряд  $\sum_{t=0}^{\infty} A^t$  сходится.

3. Пусть  $A$  неразложимая матрица,  $A \geq B \geq 0$ ,  $A \neq B$ . Доказать, что  $\lambda(A) > \lambda(B)$ . (Здесь  $\lambda(A)$  и  $\lambda(B)$  числа Фробениуса-Перрона матриц  $A$  и  $B$  соответственно).

## 2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ (для самоконтроля)

1. Какие величины модели называют эндогенными?

- а) неизвестные, определяемы в процессе решения задачи прогнозирования;
- б) известные, рассчитываемые вне модели;
- в) параметры модели, заданные из внешних соображений;
- г) макропоказатели модели, заданные статистическими данными.

2. Какие величины модели называют экзогенными?

- а) неизвестные, определяемы в процессе решения задачи прогнозирования;
- б) известные, рассчитываемые вне модели;
- в) параметры модели, заданные из внешних соображений;

г) макропоказатели рассчитываемые по модели.

3. Производственная функция записывается в виде  $Y=F(x_1, x_2)$ :

а) где  $Y$  – объем производственного фактора,  $x_1$ - объем выпуска продукции,  $x_2$  – объем используемых трудовых ресурсов;

б) где  $Y$  – объем основных фондов,  $x_1$ - объем трудовых ресурсов,  $x_2$  – объем выпуска продукции;

**в) где  $Y$  – стоимость объема товарной продукции,  $x_1$ - стоимость объема используемых производственных фондов,  $x_2$  – объем используемых трудовых ресурсов.**

4. Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

а)  $Y = ax_1 + (1-a)x_2$

б)  $Y = (ax_1^{-b} + (1-a)x_2^{-b})^{-1/b}$

в)  $Y = x_1^a / x_2^{(1-a)}$

г)  $Y = x_1^a x_2^{(1-a)}$

5. Производственная функция с постоянной эластичностью замещения имеет вид::

а)  $Y = ax_1 + (1-a)x_2$

б)  $Y = (ax_1^{-b} + (1-a)x_2^{-b})^{-1/b}$

в)  $Y = x_1^a / x_2^{(1-a)}$

г)  $Y = x_1^a x_2^{(1-a)}$

6. Критерием Дарбина-Уотсона (DW) пользуются, оценивая:

**а) статистическую независимость остатков,**

б) значимость уравнения регрессии в целом;

в) значимости коэффициента регрессии.

7. Коэффициент корреляции ( $r_{yx}$ ) находится в интервале:

а)  $0 \leq r_{yx} \leq 1$ ;

б)  $-1 \leq r_{yx} \leq 1$ ;

в)  $-2 \leq r_{yx} \leq 1$ .

8. Индекс Тейла ( $T_{yx}$ ) находится в интервале:

а)  $0 \leq T_{yx} \leq 1$ ;

б)  $-1 \leq T_{yx} \leq 1$ ;

в)  $-2 \leq T_{yx} \leq 1$ .

9. Идентификация модели это:

а) привязка модели к управляющим переменным

**б) определение параметров модели**

10. Экономическое прогнозирование осуществляют с помощью:

а) гадания на кофейной гуще

б) опроса экспертов в экономике

**в) построения математической модели экономики**

г) дискуссии

11. Коэффициент детерминации  $R_2$  характеризует:

а) параметры линейной регрессии;

**б) долю дисперсии результативного показателя, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного показателя;**

в) значимость модели в целом.

12. Параллельные вычисления на кластерных системах дают существенное ускорение:

а) при больших объемах передачи сообщений между узлами вычислительной системы

**б) при малых объемах передачи сообщений между узлами вычислительной системы**

в) при наличии тупиковых ситуаций в алгоритме расчета

13. Имитационные игры применяют в экономическом прогнозировании:

**а) развития взаимодействующих экономических систем**

б) объема выпуска продукции по уравнению регрессии

в) динамики демографических процессов

**г) экологических последствий крупномасштабных экономических преобразований**

14. Матрица прямых затрат  $A$  характеризует в экономике:

а) динамику финансовых процессов;

**б) динамику технологических процессов;**

в) воспроизводственные процессы.

15. Модель Хаутеккера-Йохансена:

а) определяет производственную функцию Кобба-Дугласа

б) определяет производственную функцию с постоянной эластичностью замещения

**в) определяет производственную функцию, представимую распределением производственных мощностей по технологиям**

г) определяет степенную производственную функцию, представимую распределением производственных фондов типа Кобба-Дугласа

### 3. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

#### *I. Модели межотраслевого баланса и теория неотрицательных матриц.*

1. Модель межотраслевого баланса В.В.Леонтьева. Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности.
2. Неотрицательная обратимость матрицы  $(xE-A)$  и ее связь с продуктивностью. Теорема о разложении резольвенты.
3. Теорема Фробениуса-Перрона. Оценка темпов сбалансированного экономического роста. Свойства числа Фробениуса-Перрона.
4. Неразложимые матрицы. Свойства числа Фробениуса-Перрона неразложимой матрицы.
5. Теорема об устойчивости примитивных матриц.
6. Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах. Балансовая модель Конторовича-Макарова. Задача об арбитражных цепочках на валютных рынках. Теорема Аффриата-Верриана.

#### *II. Теория двойственности и ее экономическая интерпретация.*

1. Выпуклые множества и их свойства. Проекция точки на выпуклое множество. Теорема отделимости точки от замкнутого выпуклого множества. Леммы Фаркаша (однородный и аффинный варианты, о несовместности). Теорема существования решения задачи линейного программирования. Теорема двойственности для задач линейного программирования со смешанными ограничениями. Условия дополняющей нежесткости в задачах линейного программирования (необходимые и достаточные условия оптимальности).
2. Экономическая интерпретация двойственности. Трудовая теория стоимости и ее критика.
3. Декомпозиция в задаче об оптимальном распределении ресурса между регионами и ее экономическая интерпретация.
4. Экономическая интерпретация принципа максимума в линейной динамической модели оптимального экономического роста.
5. Оценка эффективности новых технологий.
6. Теорема Моришимы о магистрали. Экономическая интерпретация вектора Фробениуса - Перрона.
7. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна. Формула Кокса-Росса-Рубинштейна для оценки стоимости опциона как следствие теоремы двойственности.

*III. Элементы теории игр.*

1. Игры в нормальной форме. Понятия оптимальности по Парето, равновесия по Нэшу и Штакельбергу. Примеры (игры «дилемма заключенного», «семейный спор», «чет-нечет»).
2. Смешанные расширения матричных игр. Теорема фон Неймана.