

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук*

*Рекомендовано МСН*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Обратные задачи вариационного исчисления**

**Рекомендуется для направления подготовки/специальности**

01.03.01 Математика

*(указываются код и наименование направления подготовки/специальности)*

**Квалификация выпускника: бакалавр**

## **1. Цели и задачи дисциплины:**

Сформировать представление о методах и областях применения теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению других основных математических курсов и естественнонаучных дисциплин. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами; отработку приемов решения задач на практических занятиях; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП:**

Цикл Б.2.- Элективные дисциплины по выбору.

Необходимо знание математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление функций действительного переменного, числовые и функциональные ряды), начальные сведения из функционального анализа. Дисциплина является предшествующей к курсу по методам математической физики.

*(указывается цикл, к которому относится дисциплина; формулируются требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента, необходимым для ее изучения; определяются дисциплины, для которых данная дисциплина является предшествующей)*

## **3. Требования к результатам освоения дисциплины:**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ПК-1: способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области

ПК-9: способностью к организации учебной деятельности в конкретной предметной области (математика, физика, информатика).

В результате изучения дисциплины студент должен:

### **Знать:**

классификацию линейных интегральных уравнений, определение вырожденного ядра, метод последовательных приближений для интегральных уравнений второго рода, определение самосопряжённого оператора определение характеристических чисел и собственных функций самосопряжённого оператора, теорему Гильберта-Шмидта, альтернативу Фредгольма, определение функции Грина в задаче Штурма-Лиувилля, теорему Стеклова, необходимые условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления.

### **Уметь:**

находить характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с самосопряжённым ядром, находить решение неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром, находить решение неоднородного интегрального уравнения Вольтерра типа свёртки с помощью преобразования Лапласа, находить экстремали в простейшей задаче вариационного исчисления.

**Владеть:**

методом нахождения характеристических чисел и собственных функций и нахождения решения неоднородного интегрального уравнения с симметричным ядром сведением интегрального уравнения к краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка, методом решения неоднородного интегрального уравнения Вольтерра второго рода с помощью преобразования Лапласа, методом нахождения экстремалей в простейшей задаче вариационного исчисления.

#### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
					С
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	32				32
В том числе:					
Лекции	16				16
Практические занятия (ПЗ)	16				16
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	76				76
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	40				40
Вид промежуточной аттестации (зачет)	36				36
Общая трудоемкость	час	108			108
	зач. Ед.	3			3

## **5. Содержание дисциплины**

### **5.1. Содержание разделов дисциплины**

#### **Семестр 4**

##### **Часть 1. Краткие сведения из функционального анализа**

Краткое введение в функциональный анализ. Гильбертово пространство. Определение гильбертова пространства. Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Системы ортонормированных функций. Метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Базис в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Теорема Фишера-Рисса.

Дельта-функция Дирака. Определение. Свойства дельта-функции. Разложение дельта-функции в интеграл Фурье. Формулы Сохоцкого.

##### **Часть 2. Введение**

Интегральные уравнения. Классификация линейных интегральных уравнений.

Уравнения с вырожденным ядром.

##### **Часть 3. Уравнения Фредгольма второго рода**

Уравнения Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Самосопряженные ядра. Теоремы о спектрах самосопряженных ядер. Теорема Гильберта-Шмидта. Альтернатива Фредгольма. Задача Штурма-Лиувилля. Функция Грина. Теорема Стеклова.

##### **Часть 4. Уравнения типа свёртки**

Уравнения типа свёртки по Фурье. Преобразование Фурье. Уравнения Вольтерра типа свёртки. Преобразование Лапласа.

##### **Часть 5. Интегральные уравнения первого рода**

Уравнение Абеля. Теорема Пикара. Определение корректности постановки математической задачи по Адамару. Метод наименьших квадратов. Метод регуляризации Тихонова.

##### **Часть 6. Элементы вариационного исчисления**

Простейшая задача вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера. Функционал от нескольких траекторий. Изопериметрическая задача.

*Коллоквиум*

*Контрольная работа № 1. Интегральные уравнения*

Задачи:

1. Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром;
2. Неоднородное интегральное уравнение Вольтерра типа свёртки.

**Итоговый контроль знаний – зачет.**

*(Содержание указывается в дидактических единицах. По усмотрению разработчиков материал может излагаться не в форме таблицы)*

**5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми**

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин						
		1	2	3	4	5	6
1.	<b>Дифференциальные уравнения</b>			1			
2.	<b>Методы математической физики</b>			1	1		
3.	<b>Основы теории колебаний</b>			1			
4.	<b>Физика</b>			1			1
5.	<b>Аналитическая механика</b>			1			1

**5.3. Разделы дисциплин и виды занятий**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практические, лабораторные занятия			СРС	Все-го час.
			ПЗ/С	ЛЗ	из них в ИФ		
1.	Краткие сведения из функционального анализа	1				1	
2.	Введение	1				1	
3.	Уравнения Фредгольма второго рода	8	10		10	28	
4.	Уравнения типа свёртки	2	4		10	16	

5.	Интегральные уравнения первого рода	2				10	12
6.	Элементы вариационного исчисления	4	2			10	16
7.	Итоговый контроль					36	36

**6. Лабораторный практикум: нет**

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудо-емкость (час.)
-------	----------------------	---------------------------------	----------------------

**7. Практические занятия (семинары)**

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1.	1	Краткие сведения из функционального анализа	
2.	2	Введение	
3.	3	Уравнения Фредгольма второго рода	10
4.	4	Уравнения типа свёртки	4
5.	5	Интегральные уравнения первого рода	
6.	6	Элементы вариационного исчисления	2

**8. Примерная тематика курсовых проектов (работ) – нет**

**9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

а) основная литература

1. Зон Б.А. Лекции по интегральным уравнениям. М., Высшая школа, 2004.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения. М., Наука, все годы изданий.
3. Хацкевич В.П. Интегральные уравнения.

[http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/prep\\_2071](http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/prep_2071)

4. Хацкевич В.П. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения.

[http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/prep\\_2071](http://web-local.rudn.ru/web-local/prep/prep_2071)

а) дополнительная литература

Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М., Физматлит, 2002.

Вся литература есть в библиотеке РУДН и в электронном виде на кафедре.

**Программное обеспечение** – Windows, Microsoft Office, Maple, TeX, WinEdt.

**Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы** – Yandex, Google, MathNet.

## **10. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Аудитории для проведения лекций и семинаров в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, 3.  
Ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz, мультимедийный проектор и экран.

## **11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

Курс изучается на лекциях, на практических занятиях и в самостоятельной работе студентов. Соотношение часов между ними следующее: на 2 часа лекций и практических занятий приблизительно 1,6 часа на СРС в неделю.

На СРС выносятся двухнедельные задания, состоящие из контрольных теоретических вопросов и задач по текущей теме. Результаты выполнения домашних заданий входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний.

За семестр проводится одна контрольная работа (две задачи) и один коллоквиум. На коллоквиуме требуется знание основных понятий, определений, формулировок теорем без доказательства. Итоговый контроль знаний предполагает более углублённое знание и понимание идейной стороны теории интегральных уравнений и основ вариационного исчисления, изложение теорем с доказательствами, навыки нахождения решений простейших задач.

Базой для данного курса являются курс математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление, числовые и функциональные ряды) и начальные сведения из функционального анализа, которые излагаются непосредственно в данном курсе.

**Разработчик**

к.ф.-м.н., ст. преподаватель



**В.А. Краснов**

**Директор Математического института,**

д.ф.-м.н., профессор



**А.Л. Скубачевский**

**Приложение 1.**  
(обязательное)

**Математический институт им. С.М. Никольского**

УТВЕРЖДЕН

на заседании института

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г., протокол №\_\_

Директор института

\_\_\_\_\_ А.Л. Скубачевский  
(подпись)

# **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

## **ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**Обратные задачи вариационное исчисление**

(наименование дисциплины)

01.03.01 «Математика»

**бакалавр**

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Обратные задачи вариационного исчисления»

Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика»

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства											Баллы темы	Баллы раздела			
			Текущий контроль									Промежуточная аттестация						
			Опрос	СРС (Домашний тест)	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Реферат	Выполнение РГР	...	...	...	Зачет	...	...	
ПК-1,9	Раздел 1: «Интегральные уравнения»	Тема 1: «Интегральные уравнения. Классификация линейных интегральных уравнений. Уравнения с вырожденным ядром. Уравнения Фредгольма второго рода. Уравнения типа свёртки. Интегральные уравнения первого		10		30			5					25			70	70

		рода»																	
	Раздел 2: «Вариационное исчисление»	Тема 1: «Простейшая задача вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера. Функционал от нескольких траекторий. Изопериметрическ ая задача»						5						25				30	30
		<b>ИТОГО:</b>		10		30		10						40				100	100

Дисциплина *Обратные задачи вариационного исчисления*

Вопросы к зачету

1. Гильбертовы пространства.
2. Дельта-функция Дирака (определение, простейшие свойства). Преобразование Фурье.
3. Классификация линейных интегральных уравнений.
4. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.
5. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений второго рода.
6. Самосопряжённые ядра. Определение самосопряжённого оператора.
7. Определение характеристических чисел и собственных функций оператора  $\hat{K}$ .
8. Определение вырожденных характеристических значений. Кратность вырождения.
9. Действительность характеристических значений самосопряжённого оператора.
10. Ортогональность собственных функций, принадлежащих разным характеристическим значениям.
11. Теорема о спектре самосопряжённого ядра.
12. Теорема об оценке нормы функции  $\hat{K}z$ .
13. Теорема о спектре редуцированного оператора.
14. Теорема Гильберта-Шмидта.
15. Решение неоднородного уравнения Фредгольма в виде ряда по собственным функциям.
16. Альтернатива Фредгольма.
17. Задача Штурма-Лиувилля. Определение функции Грина. Теорема Стеклова
18. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода типа свертки. Определение и примеры.
19. Простейшая задача вариационного исчисления.
20. Основная лемма вариационного исчисления.

Каждый студент вытягивает два вопроса из данного перечня. Ответ на каждый оценивается от 0 до 25 баллов в зависимости от полноты ответа.

**Примерный вариант теста**

1. Ядро самосопряженного оператора
  - а) инвариантно при комплексном сопряжении
  - б) инвариантно при перестановке аргументов
  - в) инвариантно при перестановке аргументов и комплексном сопряжении
  - г) не инвариантно ни при перестановке аргументов, ни при комплексном сопряжении
2. Характеристические значения самосопряженного оператора всегда
  - а) положительные
  - б) чисто мнимые
  - в) вещественные
  - г) отрицательные
3. Собственные функции, отвечающие различным характеристическим значениям самосопряженного оператора, всегда
  - а) совпадают
  - б) ортогональны
  - в) равны нулю
  - г) неортогональны
4. Сколько различных вещественных значений может принимать дельта-функция Дирака?

- а) одно
- б) два
- в) три
- г) четыре

5. Чему равно значение дельта-функции Дирака при  $x \neq 0$ ?

- а) 1
- б) 2
- в) -1
- г) 0

6. Точка  $z=1$  является для функции  $w = \frac{1}{z-1}$

- а) полюсом первого порядка
- б) полюсом второго порядка
- в) существенно особой точкой
- г) неособой точкой

7. Решением интегрального уравнения  $\varphi(x) - \int_{-1}^1 e^{\arcsin t} \varphi(t) dt = tg x$  является функция

- а)  $tgx$
- б)  $ctgx$
- в)  $\arcsin x$
- г)  $\sin x$

8. Сколько собственных функций имеет уравнение  $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (3x - 2)\varphi(t) dt = 0$ ?

- а) одну
- б) две
- в) ни одной
- г) бесконечно много

Вопрос 1 – 6 оценивается в 1 балл, а 7 – 8 – в 2 балла.

### Варианты контрольных работ

*Контрольная работа.*

*Вариант 1.*

1. (15 баллов) Найти решение неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода; найти характеристические значения и собственные функции соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)\varphi(s)ds = x,$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} x(s+1), & 0 \leq x \leq s, \\ s(x+1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. (15 баллов) С помощью преобразования Лапласа найти решение неоднородного интегрального уравнения Вольterra второго рода

$$\varphi(x) = \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds + \sin x.$$

*Вариант 2.*

1. Найти решение неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода; найти характеристические значения и собственные функции соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s)\varphi(s)ds = x,$$

где

$$K(x,s) = \begin{cases} \frac{\sin x \cos(s-1)}{\cos 1}, & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{\sin s \cos(x-1)}{\cos 1}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. С помощью преобразования Лапласа найти решение неоднородного интегрального уравнения Вольterra второго рода

$$\varphi(x) = \int_0^x shx(x-s)\varphi(s)ds + chx.$$

**Домашнее задание**

По курсу «предполагается индивидуальное ДЗ на 10 баллов, в котором предлагается решить одно уравнение Фредгольма 2 рода с симметричным ядром.