

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Оптимизация и выпуклый анализ

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.03.01 «Математика»

Квалификация (степень) выпускника

бакалавр

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины: Курс "оптимизация и выпуклый анализ" содержит основные классические и современные результаты выпуклого анализа и выпуклой оптимизации. В курсе рассматриваются геометрические свойства выпуклых множеств, топологические и дифференциальные свойства выпуклых функций, качественная теория выпуклых задач оптимизации и методы решения выпуклых задач оптимизации. Курс нацелен на студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "математика". Для изучения дисциплины «Оптимизация и выпуклый анализ» необходимо знание основ математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Оптимизация и выпуклый анализ» относится к вариативной части блока 1 учебного плана. В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Профессиональные компетенции			
1	ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	Алгебра	Преддипломная практика

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций (для направления «Математика и компьютерные науки актуальна только первая компетенция):
ПК.1

ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.
В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: понятия выпуклого множества, выпуклой функции, относительной внутренней множеств, отделимости множеств.

Уметь: строить выпуклую оболочку множеств, аффинную оболочку множеств, находить субдифференциал, строить двойственную задачу к данной задаче линейного программирования.

Владеть: основами выпуклого анализа, линейного программирования.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
		C	D		
Аудиторные занятия (всего)	56	56			
В том числе:					
Лекции	24	24			
Практические занятия (ПЗ)	32	32			
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	52	52			
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	52	52			
Вид промежуточной аттестации (экзамен)					
Общая трудоемкость	час	108	108		
	зач. Ед.	3	3		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1	Выпуклый анализ	<p>Понятие выпуклого множества. Выпуклая комбинация. Пересечение выпуклых множеств. Линейная комбинация выпуклых множеств. Сдвиг выпуклого множества на вектор.</p> <p>Выпуклая оболочка множества. Теорема Каратеодори.</p>

Выпуклая оболочка компакта.

Выпуклая оболочка замкнутого множества. Выпуклая оболочка ограниченного множества.

Внутренность выпуклых множеств. Выпуклая оболочка открытого множества.

Аффинная комбинация.
Аффинная оболочка множества.
Понятие многообразия.

Пересечение произвольного количества аффинных многообразий. Сдвиг аффинного многообразия на вектор.

Свойства аффинной и линейной оболочки множества. Понятие аффинной независимости системы векторов (точек).
Необходимое и достаточное условие аффинной независимости системы векторов (точек).
Барицентрические координаты вектора (точки). Понятие n -мерного симплекса. Внутренность n -мерного симплекса. Понятие относительной внутренней множеству. Относительная внутренность выпуклого множества.

Понятие выпуклой функции.
Надграфик функции.
Неравенство Йенсена.

Эффективное множество функции. Понятие собственной функции. Максимум выпуклых

		<p>функций. Суперпозиция выпуклых функций. Критерий выпуклости функции.</p> <p>Понятие полунепрерывности сверху (снизу). Множество Лебега. Симплектические множества. Необходимые условия непрерывности и липшицевости функций.</p> <p>Функционал Минковского. Его свойства. Теорема Хана-Банаха. Понятие отделимости (строгой отделимости) множеств. Теоремы об отделимости.</p> <p>Замыкание функции. Понятие сопряженной функции. Свойства сопряженной функции. Неравенство Юнга-Фенхеля. Теорема Фенхеля-Моро. Понятие инфимальной конволюции функций. Свойства инфимальной конволюции функций.</p> <p>Опорная функция множества. Свойства опорной функции множества.</p>
2	Оптимизация	<p>Задача линейного программирования. Теорема о существовании решения задачи линейного программирования. Двойственная задача линейного программирования.</p> <p>Конус. Заостренный конус. Сопряженный конус. Свойства сопряженного конуса. — Лемма Фаркаша. Лемма о конечно порожденном конуса.</p> <p>Производная по направлению.</p>

	<p>Свойства производной по направлению. Субградиент функции в точке.</p> <p>Субдифференциал функции в точке. Свойства субдифференциала функции.</p> <p>Необходимое и достаточное условие дифференцируемости в точке выпуклой функции.</p> <p>Теорема Моро-Рокафеллара.</p>
--	--

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего час.
1.	Выпуклые множества	6	8		13	27
2.	Отделимость выпуклых множеств	6	8		13	27
3.	Выпуклые функции и их свойства	6	8		13	27
4.	Элементы теории двойственности	6	8		13	27

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Темы практического занятия	Трудоемкость (час.)
1.	Выпуклые множества	8
2.	Отделимость выпуклых множеств	8
3.	Выпуклые функции и их свойства	8

4.	Элементы теории двойственности	8
----	--------------------------------	---

8. Курсовые работы не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

ЛИТЕРАТУРА

Основная

а) основная литература:

1. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу Физматлит, 2014 г.

б) дополнительная литература:

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., Мир, 1973.
2. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач, М., Наука, 1974.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1 шт., проектор - 1 шт., экран - 1 шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1 шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

11.1 Структура практических занятий

На практических занятиях решаются задачи и упражнения по текущим темам.

В конце семестра студентам предлагается домашнее задание, состоящее из трех задач.

Результаты домашнего задания входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний студентов.

Методически курс построен так, чтобы все наиболее сложные задачи рассматривались в простейших случаях, что облегчает понимание их студентами.

11.2 Самостоятельная работа студента

Еженедельно студенты получают домашнее задание по текущей теме практического занятия. Следующее практическое занятие начинается с проверки выполненного домашнего задания, вопросов по домашнему заданию и его обсуждения. После этого происходит переход к следующим задачам по текущей или новой теме.

На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

В рамках курса запланировано домашнее задание (максимально за выполнение данной работы можно получить 24 баллов).

Разработчик:

**д.ф.-м.н., проф.
профессор Математического института**

им. С.М. Никольского



А.В. Арутюнов

**Директор Математического института
им. С.М. Никольского,
д.ф.-м.н., профессор**



А.Л.Скубачевский

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН

На заседании института
« » 2020 г.,
протокол №
Директор института

_____ А.Л.Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Оптимизация и выпуклый анализ

Рекомендуется для направления подготовки

01.03.01 «Математика»

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Оптимизация и выпуклый анализ»

Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика»

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства													Баллы темы	Баллы раздела	
			Текущий контроль										Промежуточная аттестация					
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	СРС (Выполнение ДЗ)	Реферат	Выполнение РГР	Зачет	
ПК.1.	Выпуклые множества	Выпуклые множества	6					6						13			25	
ПК.1.	Отделимость выпуклых множеств	Отделимость выпуклых множеств	6					6						13			25	
ПК.1.	Выпуклые функции и их свойства	Выпуклые функции и их свойства	6					6						13			25	
ПК.1.	Элементы теории двойственности	Элементы теории двойственности	6					6						13			25	
		ИТОГО:	24					24						52			100	100

Перечень оценочных средств

по дисциплине Оптимизация и выпуклый анализ

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
	Опрос	Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу или теме.	Примерные вопросы для опроса
	Зачет	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Комплект экзаменационных билетов, список экзаменационных вопросов
<i>Самостоятельная работа</i>			
	СРС (домашнее задание)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерный вариант домашнего задания

Приложение 3

Дисциплина *Оптимизация и выпуклый анализ*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Доказать теорему Каратеодори.
2. Является ли функция $f(x) = x^4 + 1$ выпуклой?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Доказать, что в пространстве \mathbb{R}^n всякий n -мерный симплекс имеет непустую внутренность.
2. Является ли функция $f(x) = x^2 + 2x + 1$ выпуклой?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Дать определение отделимости множеств.
2. Является ли выпуклая оболочка компакта компактом?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Доказать теорему о конечномерной отделимости выпуклых множеств.
2. Является ли функция $f(x) = x^3$ выпуклой?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Дать определение относительной внутренней выпуклого множества.
2. Является ли выпуклая оболочка замкнутого множества замкнутым?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Доказать, что $\text{aff } A$ совпадает с пересечением всех линейных многообразий, содержащих множество A .
2. Построить $\text{aff } A$, если A - единичный шар в \mathbb{R}^n .

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Дать определение суммы множеств по Минковскому.
2. Пусть A и B окружности радиуса 1 и 2 на плоскости соответственно. Посчитать $A+B$ и $A-B$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Доказать, что система векторов $x_0, \dots, x_n \in X$ аффинно независима тогда и только тогда, когда для любого заданного номера i_0 векторы $(x_i - x_{i_0}), i = 0, \dots, n, i \neq i_0$, линейно независимы.
2. Привести пример аффинно-независимой системы векторов в трёхмерном пространстве. Проверить эту систему на линейную независимость.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Пусть $A \subset X$ — выпуклое множество, $x_1 \in \text{int}A$ и $x_2 \in \text{cl}A$. Доказать $[x_1, x_2] \subset \text{int}A$.
2. Является ли выпуклая оболочка замкнутого множества замкнутым?

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

- 1) Понятие выпуклого множества. Выпуклая комбинация. Пересечение выпуклых множеств.
- 2) Линейная комбинация выпуклых множеств. Сдвиг выпуклого множества на вектор.
- 3) Выпуклая оболочка множества. Теорема Каратеодори. Выпуклая оболочка компакта.
- 4) Выпуклая оболочка замкнутого множества. Выпуклая оболочка ограниченного множества.
- 5) Внутренность выпуклых множеств. Выпуклая оболочка открытого множества.
- 6) Аффинная комбинация. Аффинная оболочка множества. Понятие многообразия.
- 7) Пересечение произвольного количества аффинных многообразий. Сдвиг аффинного

многообразия на вектор. Свойства аффинной и линейной оболочки множества.

- 9) Понятие аффинной независимости системы векторов (точек). Необходимое и достаточное условие аффинной независимости системы векторов (точек). Бариецентрические координаты вектора(точки).
- 10) Понятие n -мерного симплекса. Внутренность n -мерного симплекса.
- 11) Понятие относительной внутренней множеству. Относительная внутренность выпуклого множества.
- 12) Понятие выпуклой функции. Надграфик функции. Неравенство Йенсена.
- 13) Эффективное множество функции. Понятие собственной функции. Максимум выпуклых функций.
- 14) Суперпозиция выпуклых функций. Критерий выпуклости функции.
- 15) Понятие полунепрерывности сверху (снизу). Множество Лебега. Симплектические множества. Необходимые условия непрерывности и липшицевости функций.
- 16) Функционал Минковского. Его свойства. Теорема Хана-Банаха. Понятие отделимости (строгой отделимости) множеств. Теоремы об отделимости.
- 17) Замыкание функции. Понятие сопряженной функции. Свойства сопряженной функции.
- 18) Неравенство Юнга-Фенхеля. Теорема Фенхеля-Моро. Понятие инфимальной конволюции функций. Свойства инфимальной конволюции функций.
- 19) Опорная функция множества. Свойства опорной функции множества.
- 20) Задача линейного программирования. Теорема о существовании решения задачи линейного программирования. Двойственная задача линейного программирования.
- 21) Конус. Заостренный конус. Сопряженный конус. Свойства сопряженного конуса. Лемма Фаркаша. Лемма о конечно порожденном конуса.
- 22) Производная по направлению. Свойства производной по направлению. Субградиент функции в точке. Субдифференциал функции в точке. Свойства субдифференциала функции.
- 23) Необходимое и достаточное условие дифференцируемости в точке выпуклой функции.
- 24) Теорема Моро-Рокафеллара.