Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

На правах рукописи

Сенуси Марьям Абделькадеровна

# Об ограниченности интегральных операторов в общих пространствах типа Морри

Специальность 1.1.1.
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Буренков Виктор Иванович

Москва — 2024

# Оглавление

# Введение

**Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Данная диссертационная работа посвящена исследованиям по современному активно разрабатываемому в последние десятилетия направлению в гармоническом и функциональном анализе и теории функциональных пространств: теории операторов в общих пространствах типа Морри.

Она посвящена изучению условий на функциональные параметры, характеризующие общие локальные пространства типа Морри, обеспечивающие ограниченность обобщенных потенциалов Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое, а также изучению условий, обеспечивающих ограниченность обобщенных многомерных операторов Римана-Лиувилля из одного пространства типа Морри на параллелепипеде в другое и получению точных оценок норм этих операторов в зависимости от размеров параллелепипеда.

Теория пространств типа Морри и теория операторов в пространствах типа Морри активно развивается. Этой тематике посвящены многочисленные работы математиков из многих стран мира (см., например, обзорные статьи [6], [7], [26], [33], [38], [43], [44]).

Цель диссертационной работы состоит в исследовании ограниченности перечисленных выше многомерных интегральных операторов в пространствах типа Морри. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1) свести задачу об ограниченности обобщенных потенциалов Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое к задаче об ограниченности оператора Харди из одного весового пространства Лебега в другое на конусе неотрицательных невозрастающих функций,

2) для любых допустимых значений числовых параметров получить достаточные условия на функциональные параметры, характеризующие общие локальные пространства типа Морри, при которых обобщенные потенциалы Рисса ограниченно действуют из одного локального пространства типа Морри в другое, которые для некоторого диапазона числовых параметров совпадают с необходимыми условиями,

3) для многомерного оператора Римана-Лиувилля и многомерного обобщенного оператора Римана-Лиувилля получить точные оценки условия их ограниченности из одного изотропного или анизотропного пространства типа Морри на конечном параллелепипеде в другое.

4) получить точные оценки норм этих операторов в зависимости от размеров параллелепипеда.

**Научная новизна.**

В данной работе

1) получены новые результаты об ограниченности обобщенного потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое, обобщающие известные ранее результаты в ограниченности классического потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое, которые были получены В. И. Буренковым, А. Гогатишвили, В. Гулиевым и Р. Мустафаевым [4],

2) получены новые результаты об ограниченности обобщенного многомерного оператора Римана-Лиувилля из одного пространства Морри на конечном параллелепипеде в другое, а также получены новые точные оценки норм таких операторов в зависимости от размеров параллелепипеда; в одномерном случае ограниченность оператора Римана-Лиувилля установлена Z. Fu, J. Trujillo и Q. Wu в [23].

**Теоретическая и практическая значимость.**

Результаты работы носят теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории классических операторов теории функций в пространствах типа Морри, а также в задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными.

**Методология и методы исследования.**

Исследования основываются на общих методах функционального анализа и на методах, используемых в теории операторов в пространствах типа Морри. Эти методы надлежащим образом модифицируются и развиваются так, чтобы их можно было применить к рассматриваемым в диссертационной работе интегральным операторам и различным вариантам рассматриваемых в работе пространств типа Морри.

**Апробация работы.**

Результаты, полученные в рамках работы над диссертацией, неоднократно излагались на научном семинаре Математического института РУДН по функциональному анализу и его приложениям под руководством профессоров В. И. Буренкова и М.Л. Гольдмана, на научном семинаре Математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского, на научном семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинар Никольского, руководитель член-корреспондент РАН О.В. Бесов), на научном семинаре по функциональному анализу и его приложениям в Ярославском государственном университете имени П. Демидова и на научном семинаре по функциональному анализу в Евразийском национальном университете имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан).

Полученные результаты представлялись и обсуждались на следующих научных конференциях:

Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021» и «Ломоносов-2022» (Москва),

Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2021), Конференция Ecole doctorale (Алжир, 2021),

Третья международная конференция конференции «3rd International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science. ICRAMCS (2021, Casablanca, Morocco),

Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория нформации"(Уфа, 2021 и 2022)

Научная школа молодых ученых «Математические методы механики» (Москва, 2021).

**Публикации.**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях (2 - в соавторстве с научным руководителем, 2 - без соавторов), которые опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Скопус и РИНЦ и в тезисах конференций. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором лично.

**Статьи.**

1. M.A. Senouci, Boundedness of Riemann-Liouville fractional integral operator in Morrey spaces, Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 1, 82-91.

2. V.I. Burenkov, M.A. Senouci. Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces, Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 4, 92-98.

3. V.I. Burenkov, M.A. Senouci. On boundedness of the generalized Riesz potential in local Morre type spaces. Journal of Mathematical Sciences, 266 (2023), 765-793.

4. M.A. Senouci, Boundedness of the generalized Riemann-Liouville operator in local Morrey type spaces. Eurasian Math. J., 14 (2023), no. 4, 63-68.

**Тезисы докладов.**

1. M.A. Senouci, Boundedness of the multi-dimensional Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020»,

Москва. Ноябрь 2020. Материалы XXVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020». Второе издание. М.: МАКС Пресс, 2020.

2. M.A. Senouci. Boundedness of the generalized Riemann-Liouville fractional integral operatorin weighted Morrey spaces. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методытеории функций и смежные проблемы», Воронеж, Материалы Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа"(28 января - 2 февраля 2021 г.) Издательскийдом ВГУ 2021, стр. 327-328.

3. M.A. Senouci. Bornetude de l'operateur fractionnaire de Riemann-Liouville dans les espaces de Morrey. ICRAMCS 2021ю International Conference on Research in Applied Mathematics andComputer Science, March 26-27, 2021, Casablanca, Morocco. Book of proceeding, p. 212. Proceedings ISSN : 2605-7700

4. M.A. Senouci, Boundedness of generalized Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces, Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации". Сборник тезисов Международной конференции (г. Уфа, 4 - 7 октября 2021 г.), УФА АЭТЕРНА 2021, стр. 41.

5. M.A. Сенуси, On boundedness of the generalized Riesz gjntytial in ocal Morrey type spaces. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», Москва. Апрель 2022. Материалы XXIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов». М.: МАКС Пресс, 2022.

6. V.I. Burenkov, M.A. Senouci, On boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces. Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации Уфа. 21 октября 2022 г., г. Уфа.

**Степень достоверности результатов, полученных в диссертации,** обеспечивается строгостью приведенных доказательств, выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

**Объем и структура работы.**

Диссертация состоит из введения, 2 глав и заключения.

Полный объем диссертации составляет 100 страниц.

Список литературы содержит 46 наименований.

**Содержание работы.**

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, связанных с темой исследования, и изложение основных результатов диссертации.

## Основные определения и результаты.

### Глава 1.

**Определение 1.** Обобщенный потенциал Рисса $I_{\rho(\cdot)}$ определяется равенством

$$\left(I_{\rho(\cdot)}f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x-y|)f(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\rho$ - неотрицательная измеримая по Лебегу функция на $(0,\infty)$, ядро обобщенного потенциала Рисса.

Если $0 < \alpha < n$, $t > 0$, $\rho(t) = t^{\alpha-n}$, то получим классический потенциал Рисса, который обозначается через $I_\alpha$.

**Определение 2.** Пусть $0 < p,\theta \leqslant \infty$ и пусть функция $w \in \mathfrak{M}^+\big((0,\infty)\big)$ не эквивалентна 0. Через $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ обозначим локальное пространство типа Морри, а именно, пространство всех функций $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квази-нормой

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \big\|w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))}\big\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Если $w(r) = 0$ и $\|f\|_{L_p(B(0,r))} = \infty$, то будем считать, что $w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))} = 0$.

Если в этом определении квази-норма $\|f\|_{L_p(B(0,r))}$ в лебеговом пространстве заменена на квази-норму $\|f\|_{WL_p(B(0,r))}$ в слабом лебеговом пространстве, то получающееся при этом слабое локальное пространство типа Морри обозначается через $WLM_{p\theta,w(\cdot)}$.

**Определение 3.** Пусть $0 < \theta \leqslant \infty$, $\Omega_\theta$ обозначает множество всех функций $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, таких, что

$$\|w\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

для некоторого $t > 0$.

**Лемма** [11], [13], [18]. Пусть $0 < p$, $\theta \leqslant \infty$ и $w$ неотрицательная, измеримая по Лебегу функция $(0,\infty)$, не эквивалентная 0.

Тогда пространство $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ не тривиально, тогда и только тогда когда $w \in \Omega_\theta$.

**Определение 4.** Пусть $n \in \mathbb{N}$. Мы будем говорить, что $\rho \in S_n$, если $\rho \in \mathfrak{M}^+((0,\infty))$ и

1) $\int_0^r \rho(t)t^{n-1}dt < \infty$ для всех $r > 0$,

2) для некоторых $c_1, c_2 > 0$,

$$c_1\rho(t) \leqslant \rho(s) \leqslant c_2\rho(t)$$

для всех $s,t > 0$, удовлетворяющих неравенству $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$.

**Определение 5.** Для $\rho \in S_n$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{I}_{\rho(\cdot),r}f(x) = \int_{{}^cB(x,r)} \rho(|x-y|)f(y)dy$$

и

$$\underline{I}_{\rho(\cdot),r} f(x) = \int_{B(x,r)} \rho(|x-y|) f(y) dy.$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $F,G : A \times B \longrightarrow [0,\infty]$. Всюду в этой работе будем говорить, что $G$ доминирует над $F$ на $B$ равномерно по $x \in A$ и писать $F \lesssim G$ равномерно по $x \in A$, если для любого $y \in B$ существует $c(y) > 0$ такое, что

$$F(x,y) \leqslant c(y) G(x,y) \text{ для любых } x \in A.$$

Также, говорить что $F$ эквивалентно $G$ и писать

$$F \approx G \text{ равномерно по } x \in A$$

если $F$ доминирует над $G$ на $B$ равномерно по $x \in A$ и $G$ доминирует над $F$ на $B$ равномерно по $x \in A$.

**Определение 6.** Пусть $1 \leqslant p_1 < \infty, 0 < p_2 \leqslant \infty$. Тогда $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$ if $\rho \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ и существует положительная невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{\rho} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такая, что

1) $\tilde{\rho}(t) \approx \rho(t)$ равномерно по $t > 0$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$,

3) $\tilde{\rho} \in S_n$,

4) $\int\limits_0^1 \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt = \infty$, $\int\limits_1^\infty \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt < \infty$,

5) $|\tilde{\rho}'(t)| t \gtrsim \tilde{\rho}(t)$ равномерно по $t > 0$,

6) if $0 < p_2 \leqslant p_1$ и $1 \leqslant p_1 < \infty$, то

$$\int_0^r \tilde{\rho}(t) t^{n-1} dt \lesssim \tilde{\rho}(r) r^n$$

равномерно по $r > 0$,

7) если $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, то функция $\varphi_{n,\tilde{\rho},p_1,p_2}(t) = \tilde{\rho}(t) t^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)}$ почти не убывает на $(0,\infty)$.

Более того, если $p_1 = 1$ и $1 < p_2 < \infty$, то $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$ если существует положительная невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{\rho} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такая, что выполняются условия 1) - 3) и 5), 4) и условия 6) выполняются для $p_1 = 1$ и вместо условия 7) выполняется следующее условие

8)

$$\left\|\tilde{\rho}(t)t^{\frac{n-1}{p_2}}\right\|_{L_{p_2}(0,r)} \lesssim \tilde{\rho}(r)r^{\frac{n}{p_2}}$$

равномерно по $r > 0$.

Целью первой главы является обобщение результатов работы [8] об условиях ограниченности классического потенциала Рисса на случай обобщенного потенциала Рисса с ядрами $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$.

**Основными результатами первой главы являются теоремы 1-3.**

**Теорема 1** Пусть $1 \leqslant p_1 < \infty$, $0 < p_2 \leqslant \infty$, $0 < \theta_2 \leqslant \infty$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, $\rho$ - положительная непрерывная функция на $(0,\infty)$ и

$$\mu_{n,\rho,p_1}(r) = \frac{\int_r^\infty \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt}{\int_1^\infty \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt}, \; r > 0, \tag{1}$$

$$v_2(r) = w_2\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right)\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right)^{\frac{n}{p_2}}|(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r))'|^{\frac{1}{\theta_2}}, \; r > 0, \tag{2}$$

$$g_{n,\rho,p_1}(t) = \|f\|_{L_{p_1}\left(B(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t))\right)}, \; t > 0.$$

1. Если $1 < p_1 < p_2 < \infty$ или $1 \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < p_2 \leqslant p_1$, и $\rho \in S_{n,p_1.p_2}$, то

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \lesssim \|Hg_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)}$$

равномерно по $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $p_1 = 1$ и $0 < p_2 < \infty$, и $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, то

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \approx \|Hg_{n,\rho,1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)}$$

равномерно по всем функциям $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $p_1 = 1$ и $1 < p_2 < \infty$, и $\rho \in S_{n,1,p_2}$, то

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{WLM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \approx \|Hg_{n,\rho,1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)}$$

равномерно по всем функциям $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

**Теорема 2** Предположим, что $1 \leqslant p_1 < \infty$, $0 < p_2 \leqslant \infty$, $0 < \theta_1,\ \theta_2 \leqslant \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, $\mu_{n,\rho,p_1}$ определяется формулой (1),

$$v_1(r) = w_1\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right) \left| \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right)' \right|^{\frac{1}{\theta_1}},\ r > 0,$$

и $v_2$ определяется формулой (2).

1. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ или $1 \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < p_2 \leqslant p_1$, и $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. Если оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$, то есть

$$\|Hg\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \lesssim \|g\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)}$$

равномерно по $g \in \mathbb{A}$, то оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$.

2. Пусть $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ и $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ тогда и только тогда, когда оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$.

3. Пусть $p_1 = 1$, $1 < p_2 < \infty$ и $\rho \in S_{n,1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $WLM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ тогда и только тогда, когда оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$.

**Теорема 3** Предположим, что $0 < \theta_1,\theta_2 \leqslant \infty, w_1 \in \Omega_{\theta_1}, w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

1. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ или $1 \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < p_2 \leqslant \infty$, и $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1,\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2,\theta_2,w_2(\cdot)}$, если выполняются следующие условия:

$(a)$ если $1 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, то

$$B_{11} := \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w^{\theta_2}_{2,n,p_2}(x)\mu^{\theta_2}_{n,\rho,p_1}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty,$$

где $w_{2,n,p_2}(x) = w_2(x)x^{\frac{n}{p_2}}$. и

$$B_{12} := \sup_{t>0}\left(\int_0^t w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(x)}{(\int_x^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds)^{\theta_1'}}dx\right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

$(b)$ если $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, то

$$B_2 :=$$

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{-\frac{1}{\theta_1}}\left(\int_0^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\min\{\mu_{n,\rho,p_1}(t), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\}^{\theta_2}dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty,$$

$(c)$ если $1 < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$, то

$$B_{31} := \left(\int_0^\infty\left(\frac{\int_t^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx}\right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(t)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

и

$$B_{32} :=$$

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_z^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int_z^\infty \frac{\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(\tau)w_1^{\theta_1}(\tau)}{\left(\int_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(u)du\right)^{\theta_1'}}d\tau\right)^{\frac{r}{\theta_1'}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(z)dz\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}$,

$(d)$ если $0 < \theta_2 < \theta_1 \leqslant 1$, то $B_{41} := B_{31} < \infty$ и

$$B_{42} :=$$

$$\left(\int_0^\infty \sup_{y<z<\infty}\mu_{n,\rho,p_1}(z)^r\left(\int_z^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{-\frac{r}{\theta_1}}\left(\int_0^y w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(y)dy\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$(e)$ если $0 < \theta_1 \leqslant 1, \theta_2 = \infty$, то

$$B_5 := \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \operatorname{ess\,sup}_{x>0} w_{2,n,p_2}(x)\min\{\mu_{n,\rho,p_1}(t), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\} < \infty,$$

$(f)$ если $1 < \theta_1 < \infty, \theta_2 = \infty$, то

$$B_6 :=$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z>0} w_{2,n,p_2}(z)\left(\int\limits_z^\infty \left(\int\limits_x^z \left(\int\limits_u^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{-1} \rho(u)u^{\frac{n}{p_1'}-1}du\right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

$(g)$ если $\theta_1 = \infty,\ 0 < \theta_2 < \infty$, то

$$B_7 := \left(\int_0^\infty \left(w_{2,n,p_2}(\tau)\int_\tau^\infty \frac{\rho(z)z^{\frac{n}{p_1'}-1}dz}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z<s<\infty} w_1(s)}\right)^{\theta_2} d\tau\right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty.$$

$(h)$ если $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, то

$$B_8 := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau>0}\left(\int_\tau^\infty \frac{\rho(z)z^{\frac{n}{p_1'}-1}dz}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z<s<\infty} w_1(s)}\right) w_{2,n,p_2}(\tau) < \infty.$$

2. Пусть $p_1 = 1, 0 < p_2 < \infty$ и $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(.)}$ ограничен из $LM_{1,\theta_1,w_1(.)}$ в $LM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $(a)$ - $(h)$ с $p_1 = 1$.

3. Пусть $p_1 = 1, 1 < p_2 < \infty$ и $\rho \in S_{n,1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(.)}$ ограничен из $LM_{1,\theta_1,w_1(.)}$ в $WLM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $(a)$ - $(h)$ при $p_1 = 1$.

**Следствие.** Пусть выполнены предложения теоремы 3 относительно числовых параметров $\theta_1$,$\theta_2, p_1$,$p_2$ и функций $w_1$,$w_2$. Пусть, кроме того $\beta < 0$, $p_2 > p_1$ $n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) < \alpha < \frac{n}{p_1}$ и

$$\rho(t) = t^{\alpha-n}(1 + |\ln t|)^{\beta}.$$

Тогда для обобщенного потенциала Рисса $I_{\rho(.)}$ справедливы все утверждения теоремы 3, в которых функция $\mu_{n,\rho,p_1}(r)$ заменена на функцию $r^{\frac{n}{p_1'}}\rho(r)$.

**Замечание.** По сравнению со статьей [8] рассмотрен существенно более широкий класс обобщенных потенциалов Рисса, содержащий, в частности, случай, когда $\rho(t) = t^{\alpha-n}(1 + |lnt|)^{\beta}$. При этом, как и в [8], полученные достаточные условия ограниченности обобщенных потенциалов Рисса для определенного диапазона числовых параметров совпадают с необходимыми.

Теоремы 1, 2, 3 опубликованы в [16], [17].

## Глава 2.

**Определение 7.** Левосторонний многомерный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля $I^{\alpha}_{a_+}$ порядка $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1,...,n, a = (a_1,\ a_2,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$, определяется следующим образом:

$$\left(I^{\alpha}_{a_+} f\right)(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)} \int_{a_n}^{x_n} ... \int_{a_1}^{x_1} \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i - t_i)^{\alpha_i - 1}\right) f(t_1,...,t_n) dt_1...dt_n$$

для всех $x = (x_1,...,x_n)$ $\mathbb{R}^n$ таких, что $x_i > a_i$, $i = 1,..,n$, где $\Gamma$ - гамма-функция Эйлера.

**Определение 8.** Пусть $f \in L_p(\Omega)$, где $0 < p \leqslant \infty$, $\overline{k} = (k_1,...,k_n)$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1,...,n$. Обобщенный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля $I^{\overline{\alpha},\overline{k}} f$ порядка $\overline{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1,...,n$, $n \in \mathbb{N}$, определяется следующим образом

$$\left(I^{\overline{\alpha},\overline{k}}_{a_+} f\right)(x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{(k_i + 1)^{1-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{a_n}^{x_n} ... \int_{a_1}^{x_1} \prod_{i=1}^{n} \left[(x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1})^{\alpha_i - 1} t_i^{k_i}\right] f(t_1,...,t_n) dt_1...dt_n$$

**Определение 9.** Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $\lambda > 0$, если $p < \infty$, если $p = \infty$, $\lambda \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество. Говорят, что функция $f$ принадлежит локальному пространству Морри $LM^{\lambda}_{p}(\Omega)$, если $f$ измерима по Лебегу на $\Omega$ и

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,x_0}(\Omega)} = \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(\Omega \bigcap B(x_0,r))} < \infty.$$

Мы будем часто пользоваться определением, когда $x_0 = 0$. Будем для краткости обозначать $LM^{\lambda}_{p,x_0}(\Omega)$ через $LM^{\lambda}_{p}(\Omega)$.

**Определение 10.** Пусть $\overline{p} = (p_1,...,p_n)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,...,\theta_n)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1,...,\lambda_n)$, $\overline{a} = (a_1,...,a_n)$, $\overline{b} = (b_1,...,b_n)$, $0 < p_i \leqslant \infty$, $0 < \theta_i \leqslant \infty$, $0 < \lambda_i < \infty$, $i = 1,...,n$, $Q(\overline{a},\overline{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i, i = 1,...,n\}$.

Пусть $\overrightarrow{LM}_{\bar{p}\bar{\theta},a}(Q(\overline{a},\overline{b}))$, $\overleftarrow{LM}_{\bar{p}\bar{\theta},a}(Q(\overline{a},\overline{b}))$ - это пространства всех измеримых по Лебегу функций на $Q(\overline{a},\overline{b})$, для которых

$$\|f\|_{\overrightarrow{LM}^{\bar{\lambda}}_{\bar{p}\bar{\theta},\bar{a}}(Q(\overline{a},\overline{b}))} = \Big\|...\|f(x_1,...,x_n)\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,a_1,,x_1}((a_1,b_1))}...\Big\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n,\theta_n,a_n,x_n}((a_n,b_n))} < \infty$$

и

$$\|f\|_{\overleftarrow{LM}_{\bar{p}\bar{\theta},\bar{a}}(Q(\overline{a},\overline{b}))} = \Big\|...\|f(x_1,...,x_n)\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n,\theta_n,a_n,x_n}((a_n,b_n))}...\Big\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,a_1,x_1}((a_1,b_1))} < \infty$$

соответственно.

Целью второй главы является развитие результата работы [23], об условиях ограниченности одномерного оператора Римана- Лиувилля из одного пространства Морри в другое: рассмотрение многомерного случая, расширение диапазона числовых параметров, рассмотрение обобщенных операторов Римана-Лиувилля, получение точных оценок квази-норм операторов в зависимости от размеров параллелепипеда.

**Основными результатами второй главы являются теоремы 4-7.**

**Теорема 4** Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q}$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$, $i = 1,...,n$. Тогда существует $C_1 > 0$ такое, что

$$\| I^{\alpha}_{a_+} f \|_{M^{\mu}_q(Q(a,b))} \leqslant C_1 \mid b-a \mid^{\nu} \| f \|_{M^{\lambda}_p(Q(a,b))}, \tag{3}$$

где

$$\nu = \lambda + \alpha_1 + ... + \alpha_n - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \mu, \tag{4}$$

для всех конечных параллелепипедов $Q(a,b)$ и для всех $f \in M^{\lambda}_p(Q(a,b))$.

Показатель степени $\nu$ не может быть заменен никаким другим.

**Замечание.** По сравнению с работой [23], рассмотрен многомерный случай. Кроме того, в отличие от [23], установлена точная зависимость точной постоянной в неравенстве (3) от диаметра параллелепипеда. Этот результат опубликован в статье [42].

**Теорема 5** Пусть $1 \leqslant p \leqslant s < \infty$, $0 < q \leqslant s$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{s} < \alpha_i < 1, i = 1,...,n$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$,

$$0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q} - \frac{p(n - \alpha_1 ... - \alpha_n)}{p + s(p-1)},$$

тогда существует $C_2 > 0$ такое, что

$$\left\| I^{\alpha}_{a_+} f \right\|_{M^{\mu}_q(Q(a,b))} \leqslant C_2 \mid b - a \mid^{\nu} \| \, f \, \|_{M^{\lambda}_p(Q(a,b))},$$

где $\nu > 0$ определяется по формуле (4) для всех конечных параллелепипедов $Q(a,b)$ и для всех $f \;\; M^{\lambda}_p(Q(a,b))$.

Показатель $\nu$ не может быть заменен никаким другим.

**Замечание.** Кроме того, что рассмотрен многомерный случай, рассмотрен более широкий диапазон числовых параметров. Как и в теореме 4, получены точные оценки нормы многомерного оператора Римана-Лиувилля в зависимости от диаметра параллелепипеда.

**Теорема 6** Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q}$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$, $\overline{k} = (k_1,...,k_n)$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1,...,n$.

Тогда существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\| \; I^{\overline{\alpha}\overline{k}}_{a_+} f \; \|_{LM^{\mu}_q(Q(a,b))} \leqslant C_3 \mid b \mid^{\nu} \| \; f \; \|_{LM^{\lambda}_p(Q(a,b))},$$

где

$$\nu = \lambda + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} + \sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)\alpha_i - \mu,$$

для всех конечных параллелепипедов $Q(a,b)$ и для всех $f \in LM^{\lambda}_p(Q(a,b))$.

Показатель $\nu$ не может быть заменен никаким другим.

**Замечание.** Теорема 6 является аналогом теоремы 4 для обобщенных операторов Римана-Лиувилля. Этот результат опубликован в статье [43].

**Лемма** (Обобщенное неравенство Минковского для локальных пространств типа Морри) Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant c \leqslant d \leqslant \infty$, $0 < \max\{p,\theta\} \leqslant \min\{q,\sigma\} \leqslant \infty$, $0 < \lambda$, $\mu < \infty$.

Тогда

$$\left\| \| f(x,y) \|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a,x}(a,b)} \right\|_{LM^{\mu}_{q\sigma,c,y}(c,d)} \leqslant \left\| \| f(x,y) \|_{LM^{\mu}_{q\sigma,c,y}(c,d)} \right\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a,x}(a,b)}. \qquad (5)$$

**Теорема 7** Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\tilde{k} = (k_1,...,k_n)$, $\overline{p} = (p_1,..., p_n)$, $\overline{q} = (q_1,..., q_n)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1,..., \lambda_n)$, $\overline{\mu} = (\mu_1,..., \mu_n)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,..., \theta_n)$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1,..., \sigma_n)$,

$$1 < p_i \leqslant \infty, 0 < q_i, \theta_i \leqslant \infty, k_i \geqslant 0, \frac{1}{p_i} < \alpha_i < 1, \lambda_i, \mu_i > 0, i = 1,...,n;$$

$$\max\{p_i,\theta_i\} \leqslant \min\{q_j, \sigma_j\}, i = 1,..., n-1 \ \text{ и } j = i+1,...,n.$$

Тогда существует $C_4 > 0$, такое, что

$$\left\| I^{\overline{\alpha},\overline{k}}_{0_+} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\mu}}_{\bar{q}\,\bar{\sigma},a}(Q(a,b))} \leqslant C_4 \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^{\nu_i} \| f \|_{\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\bar{p}\,\bar{\theta},a}(Q(a,b))} \qquad (6)$$

где

$$\nu_i = \lambda_i + \frac{1}{q_i} + \alpha_i(k_i + 1) - \frac{1}{p_i} - \mu_i, i = 1,...,n$$

для всех конечных параллелепиппедов $Q(a,b)$ и всех $f \in \overleftarrow{LM}^{\lambda}_{\bar{p}\,\bar{\theta},a}((Q(a,b))$.

Каждое $\nu_i$, $i = 1,...;n$, не может быть заменено на никакое другое.

**Замечание.** Теорема 7 - это анизотропный вариант теоремы 6. В этом случае установлена точная зависимость точной постоянной в неравенстве (6) от длин ребер параллелепипеда. В доказательстве существенно использовалось неравенство (5).

# Глава 1. Ограниченность обобщенного потенциала Рисса, действующего из одного общего локального пространства типа Морри в другое

## 1.1 Определение и базовые свойства пространств Морри

В этом параграфе будут представлены общие свойства пространств Морри, построенных на базе лебеговых пространств.

**Определение 1.1.1.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *измеримое по Лебегу множество,* $0 < p \leqslant \infty$*, говорят, что измеримая на* $\Omega$ *функция* $f \in L_p(\Omega)$*, если* $\|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty$*, где*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 0 < p < \infty,$$

*если* $p < \infty$*, и, если* $p = \infty$*, то*

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

**Определение 1.1.2.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *измеримое по Лебегу множество,* $0 < p \leqslant \infty$*,* $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$*. Пространство Морри* $M_p^\lambda(\Omega)$ *– это пространство всех функций* $f$ *измеримых по Лебегу на* $\Omega$*, для которых*

$$\|f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r) \bigcap \Omega)} < \infty. \tag{1.1}$$

Отметим ряд известных свойств пространств $M_p^\lambda(\Omega)$.

Если $\lambda = 0$, то очевидно, что

$$M_p^0(\Omega) = L_p(\Omega). \tag{1.2}$$

Если $\lambda = \frac{n}{p}$, то

$$M_p^{\frac{n}{p}}(\Omega) = L_\infty(\Omega). \tag{1.3}$$

Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то пространство $M_p^\lambda(\Omega)$ состоит только из функций $f$ эквивалентных 0 на $\Omega$.

Таким образом, допустимый диапазон параметров

$$0 < p \leqslant \infty \;\text{ и }\; 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}. \tag{1.4}$$

(Если $p = \infty$, то неравенство для $\lambda$ выполняется только в том случае, если $\lambda = 0$ и $M_\infty^0 = L_\infty$.)

В случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$, мы будем считать, что $M_p^\lambda \equiv M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$.

**Пример 1.** Если $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$|x|^\alpha \chi_{B(0,1)}(x) \in M_p^\lambda \Longleftrightarrow \alpha \geqslant \lambda - \frac{n}{p}$$

и

$$|x|^\alpha \chi_{\complement_{B(0,1)}}(x) \in M_p^\lambda \Longleftrightarrow \alpha \leqslant \lambda - \frac{n}{p},$$

$$|x|^\alpha \in M_p^\lambda \Longleftrightarrow \alpha = \lambda - \frac{n}{p},$$

Здесь $\chi_G$ - характеристическая функция множества $G \subset \mathbb{R}^n$, а $\complement G$ - дополнение множества $G$. Этот пример, в частности, показывает, что при $0 < \lambda < \frac{n}{p}$ $M_p^\lambda \not\subset L_p$.

**Пример 2.** Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ |x|^\beta & \text{если } |x| > 1 \end{cases} \in M_p^\lambda$$

тогда и только тогда, когда

$$\beta \leqslant \alpha \;\text{ и }\; \frac{n}{p} + \beta \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p} + \alpha.$$

Пространство $M_p^\lambda(\Omega)$ является банаховым для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и квази-банаховым для $0 < p < 1$.

## 1.2 Определение и базовые свойства общих локальных пространств типа Морри

Пусть $\Omega$– измеримое по Лебегу множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathfrak{M}(\Omega)$ обозначает пространство всех функций $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ измеримых по Лебегу на $\Omega$ и $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ обозначает подмножество всех неотрицательных функций из $\mathfrak{M}(\Omega)$.

**Определение 1.2.1.** *Пусть* $0 < p,\theta \leqslant \infty$ *и пусть функция* $w \in \mathfrak{M}^+\big((0,\infty)\big)$ *не эквивалентна* $0$. *Через* $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ *обозначим локальное пространство типа Морри, а именно, пространство всех функций* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ *с конечной квази-нормой*

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))}\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

*Если* $w(r) = 0$ *и* $\|f\|_{L_p(B(0,r))} = \infty$, *то будем считать, что* $w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))} = 0$.

**Определение 1.2.2.** *Пусть* $0 < \theta \leqslant \infty$, $\Omega_\theta$ *обозначает множество всех функций* $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, *таких, что*

$$\|w\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty. \tag{1.5}$$

*для некоторого* $t > 0$.

**Лемма 1.2.1.** [11], [13], [18]. *Пусть* $0 < p$, $\theta \leqslant \infty$ *и пусть* $w$ *неотрицательная измеримая по Лебегу функция на* $(0,\infty)$ *не эквивалентная нулю.*

*Тогда пространство* $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ *не тривиально (т.е. состоит не только из функций эквивалентных* $0$ *на* $\mathbb{R}^n$*) тогда и только тогда, когда* $w \in \Omega_\theta$.

*Известно, что пространства* $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ *банаховы, если* $1 \leqslant p$, $\theta \leqslant \infty$ *и квази-банаховы, если* $0 < p < 1$ *или* $0 < \theta < 1$, *или* $0 < p < 1$ *и* $0 < \theta < 1$.

Ознакомиться более подробно со свойствами пространств Морри, операторов в таких пространствах и приложениями можно в обзорных статьях [6], [7], [27], [34], [39], [44], [45].

Пусть $n \in \mathbb{N}, 0 < p \leqslant \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество. Напомним, что слабое Лебегово пространство $WL_p(\Omega)$ - это пространтво всех измеримых по Лебегу функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$ для которых

$$\|f\|_{WL_p(\Omega)} = \sup_{t>0} t\,|\{y \in \Omega : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

**Определение 1.2.3.** *Пусть* $0 < p,\theta \leqslant \infty$ *и пусть функция* $w \in \mathfrak{M}^+\big((0,\infty)\big)$ *не эквивалентна* 0. *Через* $WLM_{p\theta,w(\cdot)}$ *обозначим слабое локальное пространство типа Морри, а именно, пространство всех функций* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ *с конечной квази-нормой*

$$\|f\|_{WLM_{p\theta,w(\cdot)}} \equiv \|f\|_{WLM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \big\|w(r)\|f\|_{WL_p(B(0,r))}\big\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

## 1.3 Условия обеспечивающие ограниченность классического потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое

В [8] была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.3.1.** *Предположим, что* $0 < \theta_1,\theta_2 \leqslant \infty, w_1 \in \Omega_{\theta_1}, w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

1. *Пусть* $1 < p_1 \leqslant \infty, 0 < p_2 < \infty$, *или* $1 = p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 < \infty$, *и* $n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < n$. *Тогда оператор* $I_\alpha$ *ограничен из* $LM_{p_1,\theta_1,w_1(\cdot)}$ *в* $LM_{p_2,\theta_2,w_2(\cdot)}$, *если* $p_1 = 1$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(*a*) *если* $1 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_1^1 := \sup_{t>0}\left(\int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2\left(\alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})\right)}(r)dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty,$$

*и*

$$B_2^1 := \sup_{t>0}\left(\int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2\frac{n}{p_2}}dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(r) r^{\theta_1'\left(\alpha - \frac{n}{p_1}\right)}}{(\int_r^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds)^{\theta_1'}}dr\right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

$(b)$ *если* $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, *то* $B_1^1 < \infty$ *то*

$$B_2^2 :=$$

$$\sup_{t>0} t^{\alpha - \frac{n}{p_1}} \left( \int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{n}{p_2}} dr \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \left( \int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty,$$

$(c)$ *если* $1 < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$, *то*

$$B_1^3 := \left( \int_0^\infty \left( \frac{\left( \int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \left( \alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) \right)}(r) dr \right)}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr} \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}} w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \left( \alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) \right)} dt \right)^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 \theta_2}} < \infty$$

*и*

$$B_2^3 :=$$

$$\left( \left[ \int_0^\infty \left( \int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{n}{p_2}} dr \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left( \int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(r) r^{\theta_1' \left( \alpha - \frac{n}{p_1} \right)}}{(\int_r^\infty w_1^{\theta_1}(s) ds)^{\theta_1'}} dr \right)^{\frac{\theta_2 - 1}{\theta_2}} \right]^{\frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}} \cdot \frac{w_1^{\theta_1}(t) t^{\theta_1' (\alpha - \frac{n}{p_1})}}{(\int_r^\infty w_1^{\theta_1}(s) ds)^{\theta_1'}} dt \right)^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 \theta_2}}$$

$(d)$ *если* $1 = \theta_2 < \theta_1 \leqslant \infty$, *то* $B_{41} := B_{31} < \infty$ *и*

$$B_1^4 :=$$

$$\left( \int_0^\infty \left( \frac{\left( \int_t^\infty w_2(r) r^{\alpha - n\left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} dr \right)}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr} \right)^{\frac{1}{\theta_1 - 1}} w_2(t) t^{\alpha - n\left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} dt \right)^{\frac{\theta_1 - 1}{\theta_1}} < \infty$$

*и*

$$B_2^4 :=$$

$$\left( \int_0^\infty \left( \frac{\left( \int_t^\infty w_2(r) r^{\alpha - n\left( \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} + t^{\alpha - \frac{n}{p_1}} \int_0^t w_2(r) r^{\frac{n}{p_2}} dr \right)}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr} \right)^{{\theta_1}' - 1} dt \right).$$

$$.t^{\alpha - \frac{n}{p_1}} \left( \int_0^t w_2(r) r^{\frac{n}{p_2}} dr \right) \frac{dt}{t}$$

(*e*) *если* $0 < \theta_2 \leqslant \theta_1 = 1$, *то*

$$B_1^5 := \left( \int_0^\infty \left( \frac{\left( \int_t^\infty w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \left( \alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) \right)}(r) dr \right)}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr} \right)^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \left( \alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) \right)} dt \right)^{\frac{1-\theta_2}{\theta_2}} < \infty,$$

*и*

$$B_2^5 :=$$

$$\left( \left( \int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{n}{p_2}} dr \right)^{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}} \left( \inf_{t<s<\infty} s^{\frac{n}{p_1} - \alpha} \int_s^\infty w_1^{\theta_1}(\rho) d\rho \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_2 - 1}} \cdot \right.$$

$$\left. . w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \frac{n}{p_2}} dt \right)^{\frac{1-\theta_2}{\theta_2}} < \infty.$$

(*f*) *если* $0 < \theta_2 < \theta_1 < 1$, *то* $B_1^3 < \infty$ *и*

$$B_2^6 :=$$

$$\left( \int_0^\infty \sup_{t \leqslant s < \infty} \frac{s^{\alpha - \frac{n}{p_1}}}{\left( \int_s^\infty w_1^{\theta_1}(\rho) d\rho \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_2}}} \left( \int_0^t w_2^{\theta_2}(r) r^{\theta_2 \frac{n}{p_2}} dr \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1 - \theta_2}} . w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \frac{n}{p_2}} dt \right)^{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 \theta_2}} < \infty.$$

*и*

(*g*) *если* $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_2 = \infty$, *то*

$$B_7 := \operatorname{ess} \sup_{0 < t \leqslant s < \infty} \frac{w_2(t) t^{\frac{n}{p_2}}}{s^{\frac{n}{p_1} - \alpha} \left( \int_s^\infty w_1^{\theta_1}(r) dr \right)^{\frac{1}{\theta_1}}} < \infty.$$

(*h*) *если* $1 < \theta_1 < \infty, \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_8 := \operatorname{ess} \sup_{t>0} w_2(t) t^{\frac{n}{p_2}} \left( \int_t^\infty \frac{r^{\theta_1'(\alpha - \frac{n}{p_1})}}{\left( \int_r^\infty w_1^{\theta_1}(s) ds \right)^{\theta_1' - 1}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty.$$

(*i*) *если* $\theta_1 = \infty, 0 < \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_9 := \left( \int_0^\infty \left( t^{\frac{n}{p_1} - \alpha} \int_t^\infty \frac{s^{\alpha - \frac{n}{p_1} - 1} ds}{\operatorname{ess} \sup_{y < s < \infty} w_1(y)} \right)^{\theta_2} \cdot \right.$$

$$\left. . w_2^{\theta_2}(t) t^{\theta_2 \left( \alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) \right)} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty.$$

*(j) если* $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_{10} := \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} w_2(t) t^{\frac{n}{p_2}} \int_t^\infty \frac{s^{\alpha - \frac{n}{p_1} - 1}}{\operatorname{ess\,sup}_{s<y<\infty} w_1(y)} ds < \infty.$$

2. *Пусть* $p_1 = 1, 0 < p_2 < \infty$ *и* $n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)_+ < \alpha < n$. *Тогда оператор* $I_{\rho(.)}$ *ограничен из* $LM_{1,\theta_1,w_1(.)}$ *в* $WLM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (a) - (h) *при* $p_1 = 1$.

Целью первой главы является обобщение этой теоремы на случай обобщенного потенциала Рисса.

Излагаемые ниже полученные в этом направлении результаты результаты опубликованы в [16], [17].

## 1.4 Обобщенный потенциал Рисса

**Определение 1.4.1.** *Обобщенный потенциал Рисса* $I_{\rho(\cdot)}$ *определяется равенством*

$$\left(I_{\rho(\cdot)} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x-y|) f(y) dy,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

*где* $\rho$ *– неотрицательная измеримая по Лебегу функция на* $(0,\infty)$, *ядро обобщенного потенциала Рисса.*

Если $0 < \alpha < n$, $t > 0$, $\rho(t) = t^{\alpha - n}$, то получим классический потенциал Рисса, который обозначается через $I_\alpha$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $F, G : A \times B \longrightarrow [0,\infty]$. Всюду в этой работе будем говорить, что $G$ доминирует над $F$ на $B$ равномерно по $x \in A$ и писать $F \lesssim G$ равномерно по $x \in A$, если для любого $y \in B$ существует $c(y) > 0$ такое, что

$$F(x,y) \leqslant c(y) G(x,y) \text{ для любых } x \in A.$$

Также, говорить что $F$ эквивалентно $G$ и писать

$$F \approx G \text{ равномерно по } x \in A$$

если $F$ доминирует $G$ на $B$ равномерно по $x \in A$ и $G$ доминирует над $F$ на $B$ равномерно по $x \in A$.

## 1.5 $L_p$ и $WL_p$ - оценки обобщенного потенциала Рисса

**Определение 1.5.1.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Мы будем говорить, что $\rho \in S_n$, если $\rho \in \mathfrak{M}^+((0,\infty))$ и*

1) $\int_0^r \rho(t) t^{n-1} dt < \infty$ для всех $r > 0$,

2) *для некоторых $c_1, c_2 > 0$,*

$$c_1 \rho(t) \leqslant \rho(s) \leqslant c_2 \rho(t)$$

*для всех $s,t > 0$, удовлетворяющих неравенству $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$.*

**Замечание 1.5.1.** *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $y \in B(x,r)$, $z \in {}^cB(x,2r)$. Тогда*

$$|y-z| \leqslant |y-x| + |x-z| \leqslant r + |x-z| \leqslant \frac{1}{2}|x-z| + |x-z| < 2|x-z|$$

*и*

$$|y-z| \geqslant |x-z| - |y-x| \geqslant |x-z| - r \geqslant |x-z| - \frac{1}{2}|x-z| = \frac{1}{2}|x-z|.$$

*Пусть $s = |y-z|$ и $t = |x-z|$. из условия 2) определения 1.5.1 мы имеем*

3) $c_1 \rho(|x-z|) \leqslant \rho(|y-z|) \leqslant c_2 \rho(|x-z|)$

*для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $y \in B(x,r)$, $z \in {}^cB(x,2r)$.*

**Замечание 1.5.2.** *Если функции* $\rho_1,\rho_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *удовлетворяют условию* 2) *определения* 1.5.1 *с* $c_{11}$, $c_{12} > 0$, $c_{21}$, $c_{22} > 0$, *соответственно, то произведение* $\rho_1\rho_2$ *удовлетворяет условию* 2) *с* $c_1 = c_{11}c_{21}$ *и* $c_2 = c_{12}c_{22}$. *Для доказательства достаточно перемножить неравенства*

$$c_{i1}\ \rho_i(t) \leqslant \rho_i(s) \leqslant c_{i2}\rho_i(t),$$

*где* $s,t > 0$, $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$ *и* $i = 1,2$.

**Замечание 1.5.3.** *Если функция* $\rho_1 : (0,1] \to (0,\infty)$ *удовлетворяет условию* 2) *определения* 1.5.1 *с* $c_{11}$, $c_{12} > 0$ *и функция* $\rho_2 : (1,\infty) \to (0,\infty)$ *удовлетворяет условию* 2) *определения* 1.5.1 *с* $c_{21}$, $c_{22} > 0$, *то функция*

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho_1(t),\ 0 < t \leqslant 1, \\ \rho_2(t),\ 1 < t < \infty \end{cases}$$

*удовлетворяет условию* 2) *определения* 1.5.1 *с некоторыми* $c_1, c_2 > 0$.

Действительно, пусть $s,t > 0$, $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$. Если $t \leqslant \frac{1}{2}$, то $s \leqslant 1$, $\rho(s) = \rho_1(s)$, $\rho(t) = \rho_1(t)$ и условие 2) определения 1.5.1 выполняется с $c_{11}, c_{12} > 0$. Соответственно, если $t > 2$, тогда $s > 1$, $\rho(s) = \rho_2(s)$, $\rho(t) = \rho_2(t)$ и условие 2) определения 1.5.1 выполняется с $c_{21}, c_{22} > 0$. Пусть $\frac{1}{2} < t \leqslant 2$, тогда $\frac{1}{4} < s \leqslant 4$,

$$\min\{c_{11},c_{21}\} \leqslant \begin{cases} c_{11},\ \frac{1}{4} < s \leqslant 1, \\ c_{21},\ 1 < s < 4 \end{cases} \leqslant \rho(s) \leqslant \begin{cases} c_{12},\ \frac{1}{4} < s \leqslant 1, \\ c_{22},\ 1 < s < 4 \end{cases} \leqslant \max\{c_{12},c_{22}\},$$

$$\min\{c_{11},c_{21}\} \leqslant \begin{cases} c_{11},\ \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ c_{21},\ 1 < t \leqslant 2 \end{cases} \leqslant \rho(t) \leqslant \begin{cases} c_{12},\ \frac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ c_{22},\ 1 < t \leqslant 2 \end{cases} \leqslant \max\{c_{12},c_{22}\},$$

следовательно

$$\min\{c_{11},c_{21}\}(\max\{c_{12},c_{22}\})^{-1}\rho(t) \leqslant \rho(s) \leqslant \max\{c_{12},c_{22}\}(\min\{c_{11},c_{21}\})^{-1}\rho(t).$$

Значит, для $\frac{1}{2} < t \leqslant 2$, $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$, условие 2) определения 1.5.1 выполняется с

$$c_1 = \min\{c_{11}, c_{21}\} \max\{c_{12}, c_{22}\}^{-1}, \; c_2 = \max\{c_{12}, c_{22}\} \min\{c_{11}, c_{21}\}^{-1}.$$

Приведенное выше неравенство выполняется для всех $s, t > 0$, $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$, потому что $c_{11} \leqslant 1 \leqslant c_{12}$, $c_{21} \leqslant 1 \leqslant c_{22}$, следовательно $c_1 \leqslant c_{11}$, $c_1 \leqslant c_{21}$, $c_{12} \leqslant c_2$, $c_{22} \leqslant c_2$.

**Замечание 1.5.4.** *Если функция $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ удовлетворяет условию 2) определения 1.5.1, то для любых $\gamma > 0$ существуют $c_{1\gamma}, c_{2\gamma} > 0$ такие, что для $t > 0$*

$$c_{1\gamma}\rho(t) \leqslant \rho(\gamma t) \leqslant c_{2\gamma}\rho(t).$$

*Действительно, если $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 2$, то это неравенство следует из условия 2) с $s = \gamma t$. Пусть $2 \leqslant \gamma < 4$, тогда по условию 2) с $t = 2\tau$, $\tau > 0$ и $s = \gamma\tau$ и приведенное выше неравенство с $t = \tau$ и $\gamma = 2$*

$$c_1^2\rho(\tau) \leqslant c_1\rho(2\tau) \leqslant \rho(\gamma\tau) \leqslant c_2\rho(2\tau) \leqslant c_2^2\rho(\tau), \; \tau > 0,$$

*потому что $\frac{1}{2}(2\tau) \leqslant \gamma\tau \leqslant 2(2\tau)$.*

*Далее, пусть $4 \leqslant \gamma < 8$ по условию 2) с $t = 4\tau, \tau > 0, s = \gamma\tau$,*

$$\frac{1}{2}(4\tau) \leqslant \gamma\tau \leqslant 2(4\tau),$$

*то*

$$c_1^3\rho(\tau) \leqslant c_1^2\rho(2\tau) \leqslant c_1\rho(4\tau) \leqslant \rho(\gamma\tau) \leqslant c_2\rho(4\tau) \leqslant c_2^2\rho(2\tau) \leqslant c_2^3\rho(\tau), \; \tau > 0.$$

*Кроме того, если $2^{k-1} \leqslant \gamma < 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 3 \Leftrightarrow k = \left[\frac{\ln\gamma}{\ln 2}\right] + 1$, то*

$$c_1^k\rho(\tau) \leqslant c_1^{k-1}\rho(2\tau) \leqslant \ldots \leqslant \rho(\gamma\tau) \leqslant c_2^2\rho(2\tau) \leqslant \ldots \leqslant c_2^k\rho(\tau).$$

*Рассуждение для случая $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ аналогично.*

## 1.6 Некоторые примеры ядер обобщенного потенциала Рисса

**Пример 3.** *Пусть* $\rho(t) = t^{\alpha-n}, t > 0, 0 < \alpha < n$. *Тогда* $\rho \in S_n$ *потому что*

$$\int_0^r t^{\alpha-n+n-1}dt < \infty \text{ для всех } \quad 0 < r < \infty \ \Leftrightarrow \alpha > 0$$

*и для любого* $s,t > 0$ *для которого* $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$,

$$2^{\alpha-n}\rho(s) = 2^{\alpha-n}s^{\alpha-n} = (2s)^{\alpha-n}$$

$$\leqslant \rho(t) = t^{\alpha-n} \leqslant \left(\frac{s}{2}\right)^{\alpha-n} = 2^{n-\alpha}s^{\alpha-n} = 2^{n-\alpha}\rho(s).$$

**Пример 4.** *Пусть* $0 < \alpha < n$, $-\infty < \beta_1,\beta_2 < \infty$,

$$\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t) = \begin{cases} (1 + |\ln t|)^{\beta_1},\ 0 < t \leqslant 1, \\ (1 + |\ln t|)^{\beta_2},\ 1 < t < \infty \end{cases}$$

*и* $\rho(t) = t^{\alpha-n}\Psi_{\beta_1\beta_2}(t)$, $t > 0$. *Тогда* $\rho \in S_n$.

*Поскольку функция* $\rho$ *непрерывна на* $(0,\infty)$, *достаточно доказать условие 1) определения 1.5.1 для* $r = 1$. *Напомним, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $C_\varepsilon \geqslant 1$ *такое, что*

$$1 + |\ln t| \leqslant C_\varepsilon t^{-\varepsilon}$$

*для всех* $t \in (0,1]$.

*Если* $\beta_1 \leqslant 0$, *то*

$$\int_0^1 \rho(t)t^{n-1}dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1 + |\ln t|)^{\beta_1}dt \leqslant \int_0^1 t^{\alpha-1}dt < \infty.$$

*Если* $\beta_1 > 0$, *то*

$$\int_0^1 \rho(t)t^{n-1}dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1 + |\ln t|)^{\beta_1}dt \leqslant C_\varepsilon^{\beta_1}\int_0^1 t^{\alpha-\varepsilon\beta_1-1}dt < \infty$$

*если мы выберем* $\varepsilon > 0$ *таким образом, чтобы* $\varepsilon\beta_1 < \alpha$.

*Что касается условия 2) определения 1.5.1, то с помощью Замечания 1.5.2 и Примера 3 достаточно доказать, что функция* $\psi_{\beta_1,\beta_2}$ *удовлетворяет этому условию.*

*Пусть* $s,t > 0$ *и* $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$. *Если* $s > 1$, *следовательно* $t > \frac{1}{2}$, *то*

$$1 + |\ln s| \leqslant 1 + \ln 2t = 1 + \ln 2 + \ln t \leqslant 2(1 + |\ln t|)$$

*и*

$$1 + |\ln t| \leqslant 1 + \ln 2 < 2(1 + |\ln s|),$$

*следовательно*

$$\frac{1}{2}(1 + |\ln t|) \leqslant 1 + |\ln s| \leqslant 2(1 + |\ln t|).$$

*По аналогичным причинам это неравенство также выполняется, если* $s \leqslant 1$, *следовательно,* $t \leqslant 2$. *Следовательно, для* $s \leqslant 1$

$$2^{-|\beta_1|}(1 + |\ln t|)^{\beta_1} \leqslant (1 + |\ln s|)^{\beta_1} \leqslant 2^{|\beta_1|}(1 + |\ln t|)^{\beta_1}.$$

*Если* $t \leqslant 1$, *это означает, что*

$$2^{-|\beta_1|}\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t) \leqslant \Psi_{\beta_1,\beta_2}(s) \leqslant 2^{|\beta_1|}\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t).$$

*Если* $1 < t \leqslant 2$, *то*

$$2^{-|\beta_1|-|\beta_2|} \leqslant (1 + |\ln t|)^{\beta_1}(1 + |\ln t|)^{-\beta_2} \leqslant 2^{|\beta_1|+|\beta_2|},$$

*поэтому*

$$2^{-2|\beta_1|-|\beta_2|}(1 + |\ln t|)^{\beta_2} \leqslant (1 + |\ln s|)^{\beta_1} \leqslant 2^{2|\beta_1|+|\beta_2|}(1 + |\ln t|)^{\beta_2}$$

*что означает, что*

$$2^{-2|\beta_1|-|\beta_2|}\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t) \leqslant \Psi_{\beta_1,\beta_2}(s) \leqslant 2^{2|\beta_1|+|\beta_2|}\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t).$$

*Тогда, это неравенство справедливо для всех* $s \leqslant 1$ *и всех* $t$, *удовлетворяющих неравенству* $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$.

*По аналогичным причинам для всех $s > 1$ и всех $t$, удовлетворяющих неравенству $\frac{t}{2} \leqslant s \leqslant 2t$*

$$2^{-|\beta_1|-2|\beta_2|}\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t) \leqslant \Psi_{\beta_1,\beta_2}(s) \leqslant 2^{|\beta_1|+2|\beta_2|}\Psi_{\beta_1,\beta_2}(t).$$

**Пример 5.** *Пусть $0 < \alpha < n$, $-\infty < \beta < \infty$ и*

$$\rho(t) = \begin{cases} t^{\alpha-n}, \ 0 < t \leqslant 1, \\ t^{\beta}, \ 1 < t < \infty. \end{cases}$$

*Тогда $\rho \in S_n$. Действительно, условие 1) очевидно выполняется. Что касается условия 2), оно также выполняется согласно замечанию 1.5.3, потому что $\rho_1(t) = t^{\alpha-n}$ удовлетворяет условию 2) на $(0,1]$ в примере 3 и $\rho_2(t) = t^{\beta}$ удовлетворяет условию 2) для $(1,\infty)$ с помощью аргумента, аналогичного аргументу доказательства примера 3.*

*Отметим, что $t^{\beta}$ может быть заменена любой измеримой по Лебегу функцией $\sigma(t)$, удовлетворяющей на $(1,\infty)$ условию 2) определения 1.5.1.*

**Определение 1.6.1.** *Для $\rho \in S_n$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$*

$$\overline{I}_{\rho(\cdot),r} f(x) = \int_{^cB(x,r)} \rho(|x-y|) f(y) dy$$

*и*

$$\underline{I}_{\rho(\cdot),r} f(x) = \int_{B(x,r)} \rho(|x-y|) f(y) dy.$$

**Замечание 1.6.1.** *Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $M > 0$. Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ эквивалентна $M$ на $\Omega$, то*

$$\|f\|_{WL_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} = M|\Omega|^{\frac{1}{p}}$$

*и если $f \geqslant M$ почти всюду на $\Omega$, то*

$$\|f\|_{WL_p(\Omega)} \geqslant M|\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

**Лемма 1.6.1.** *Пусть* $\rho \in S_n$, $0 < p \leqslant \infty, x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* [1]

$$\|I_{\rho(.)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))} \gtrsim r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x) \tag{1.6}$$

*равномерно по* $(x,r,f) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty] \times \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ($\Longleftrightarrow$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$) .

*Доказательство.* По свойству 3) замечания 1.5.1 для любого $y \in B(x,r)$

$$I_{\rho(.)}|f|(y) \geqslant \int_{^cB(x,2r)} \rho(|y-z|)|f(z)|dz$$

$$\geqslant \frac{1}{c_1}\int_{^cB(x,2r)} \rho(|x-z|)|f(z)|dz,$$

следовательно, по замечанию 1.6.1 мы получаем

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))} \geqslant c_1^{-1}\left(v_n r^n\right)^{\frac{1}{p}} \int_{^cB(x,2r)} \rho(|x-z|)|f(z)|dz$$

$$= c_1^{-1} v_n^{\frac{1}{p}} r^{\frac{n}{p}} \overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. Здесь $v_n$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. □

**Лемма 1.6.2.** *Пусть* $\rho \in S_n$, $0 < p \leqslant \infty, x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{L_p(B(x,r))} \approx \|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)}\|_{L_p(B(x,r))} + r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x) \tag{1.7}$$

*и*

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))} \approx \|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)}\|_{WL_p(B(x,r))} + r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x) \tag{1.8}$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ *и* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

---

[1] Согласно определениям, приведенным во введении, это означает, что для любых $n \in \mathbb{N}, \rho \in S_n, 0 < p \leqslant \infty$ существует $c(n,\rho,p) > 0$ такое, что

$$\|I_{\rho(.)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))} \geqslant c(n,\rho,p) r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

В этом случае $A = \{(x,r,f) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0, f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)\}$, $B = \{(n,\rho,p) : n \in \mathbb{N}, \rho \in S_n, p \in (0,\infty]\}$, $F = \|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))}$, $G = r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x)$.

*Доказательство.* В соответствии со свойствами [2] пространств $L_p(\Omega)$ и $WL_p(\Omega)$

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{L_p(B(x,r))}$$
$$\leqslant 2^{(\frac{1}{p}-1)_+}\left(\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))}+\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{{}^cB(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))}\right), \tag{1.9}$$
$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))}$$
$$\leqslant 2^{\frac{1}{p}}\Big(\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{WL_p(B(x,r))}+\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{{}^cB(x,2r)})\|_{WL_p(B(x,r))}\Big). \tag{1.10}$$
$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{L_p(B(x,r))}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\Big(\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))}+\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{{}^cB(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))}\Big), \tag{1.11}$$

и

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))}\ \geqslant\ \|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{WL_p(B(x,r))}. \tag{1.12}$$

Далее,

$$\|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{{}^cB(x,2r)})\|_{WL_p(B(x,r))}\ \leqslant\ \|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{{}^cB(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))}$$
$$=\left[\int_{B(x,r)}\left(\int_{{}^cB(x,2r)}\rho(|y-z|)|f(z)|dz\right)^p dy\right]^{\frac{1}{p}}=J.$$

По условию 3) замечания

$$J\leqslant C_2\left[\int_{B(x,r)}\left(\int_{{}^cB(x,2r)}\rho(|x-z|)|f(z)|dz\right)^p dy\right]^{\frac{1}{p}}=C_2v_n^{\frac{1}{p}}r^{\frac{n}{p}}\left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x). \tag{1.13$'$}$$

Таким образом, согласно (1.9) и (1.13’)

$$\|I_{\rho(.)}|f|\|_{L_p(B(x,r))}\lesssim\ \|I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))}+r^{\frac{n}{p}}\left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x),$$

и

$$\|I_{\rho(.)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))}\lesssim\ \|I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{WL_p(B(x,r))}+r^{\frac{n}{p}}\left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x),$$

равномерно по $x\in\mathbb{R}^n, r>0$ и $f\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

[2]Далее $a_+=a$ если $a\geqslant 0$ и $a_+=0$ if $a<0$.

Также, согласно условию 3) замечания 1.5.1

$$J \geqslant \frac{1}{C_1}\left[\int_{B(x,r)}\left(\int_{{}^cB(x,2r)}\rho(|x-z|)|f(z)|dz\right)^p dy\right]^{\frac{1}{p}} = C_1^{-1}v_n^{\frac{1}{p}}r^{\frac{n}{p}}\left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x),$$

от куда согласно (1.11), имеем

$$\|I_{\rho(.)}|f|\|_{L_p(B(x,r))} \gtrsim \|I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{L_p(B(x,r))} + r^{\frac{n}{p}}\left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x),$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

Наконец, используя также неравенства (1.6) и (1.12), мы получаем, что

$$\|I_{\rho(.)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))} \gtrsim \|I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\|_{WL_p(B(x,r))} + r^{\frac{n}{p}}\left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x),$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

**Лемма 1.6.3.** *Пусть* $\rho \in S_n$, $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, *и*

$$\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(t) = \rho(t)t^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)},\ t > 0, \tag{1.13}$$

*где* $p_1'$ *сопряженное число к* $p_1$ $\left(p_1' = \frac{p_1}{p_1-1}\right)$.

1. *Предположим, что функция* $\rho$ *такая, что функция* $\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}$ *почти не убывает на* $(0,\infty)$, *т.е. для некоторого* $c > 0$

$$\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(t_1) \leqslant c\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(t_2) \text{ для всех } 0 < t_1 < t_2 < \infty. \tag{1.14}$$

*Если* $1 < p_1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\|_{L_{p_2}(B(x,r))} \lesssim \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))} \tag{1.15}$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in L_{p_1}(B(x,2r))$.

*Также, если* $p_1 = 1$, $1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \lesssim \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))} \tag{1.16}$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in L_1(B(x,2r))$.

2. *Неравенство* (1.15) *также выполняется для* $p_1 = 1$ *и* $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, *если предположение* (1.14) *заменено на предположение*

$$\|\rho(t)t^{\frac{n-1}{p_2}}\|_{L_{p_2}(0,r)} \lesssim \rho(r)r^{\frac{n}{p_2}} \tag{1.17}$$

*равномерно по* $r > 0$.

3. *Неравенство* (1.15) *также выполняется для* $1 \leqslant p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \leqslant p_1$, *если предположение* (1.14) *заменено на предположение*

$$\|\rho(t)t^{n-1}\|_{L_1(0,r)} \lesssim \rho(r)r^n \tag{1.18}$$

*равномерно по* $r > 0$.

4. *Условие* (1.18) *необходимо для выполнения неравенств* (1.15) *и* (1.16) *для всех* $0 < p_1,p_2 \leqslant \infty$.

5. *Условие* (1.18) *необходимо и достаточно для выполнения неравенств* (1.15) *и* (1.16) *для всех* $1 \leqslant p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \leqslant p_1$.

*Доказательство.* 1. Пусть $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $z \in B(x,r)$ и $f \in L_{p_1}(B(x,2r))$. Тогда

$$\Big(I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\Big)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(|z-y|)|f(y)|\chi_{B(x,2r)}(y)dy$$

$$= \int\limits_{B(x,2r)} \rho\left(|z-y|\right)|z-y|^{n\left(1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)} \frac{|f(y)|\chi_{B(x,2r)}(y)}{|z-y|^{n-n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}}dy$$

$$\leqslant \left(\sup_{\substack{z\in B(x,r)\\ y\in B(x,2r)}} \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(|z-y|)\right)\Big(I_{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\Big)(z).$$

Поскольку функция $\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}$ почти не убывает на $(0,\infty)$ и, для $z \in B(x,r)$, $y \in B(x,2r)$,

$$|z-y| \leqslant |z-x| + |x-y| \leqslant r + 2r = 3r,$$

мы имеем

$$\sup_{\substack{z\in B(x,r)\\ y\in B(x,2r)}} \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(|z-y|) \leqslant c\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(3r) = c3^{n(1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2})}\rho(3r)r^{n(1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2})}.$$

Из замечания 1.5.4 с $\gamma = 3$ следует, что

$$\rho(3r) \leqslant c_{23}\rho(r),\ r > 0.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{z\in B(x,r)\\ y\in B(x,2r)}} \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(|z-y|) \leqslant c\, c_{23}\, 3^{n(1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2})}\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)$$

и

$$\Big(I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\Big)(z) \lesssim \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\Big(I_{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\Big)(z) \tag{1.19}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $z \in B(x,r)$ и $f \in L_{p_1}(B(x,2r))$.

Далее, мы применяем хорошо известные неравенства для классических потенциалов Рисса. Если $1 < p_1 < p_2 < \infty$, то

$$\|I_{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}f\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.20}$$

равномерно по $f \in L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $1 < p_2 < \infty$, то

$$\|I_{n\left(1-\frac{1}{p_2}\right)}f\|_{WL_q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \tag{1.21}$$

равномерно по $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Если $1 < p_1 < p_2 < \infty$, из (1.19) и (1.20), следует, что

$$\|I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\ \|\ |f|\chi_{B(x,2r)}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_{p_1}(B(x,2r))$, что является неравенством (1.15).

Соответственно, если $1 < p_2 < \infty$, из (1.19) и (1.21) следует неравенство (1.16).

2. Если $p_1 = 1$ и $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, то, применяя неравенство Юнга для усеченных сверток, мы получаем

$$\|\ I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)})\ \|_{L_{p_2}(B(x,r))} = \left\|\int_{B(x,2r)} \rho(.-y)|f(y)|dy\right\|_{L_{p_2}(B(x,r))}$$

$$\leqslant \| \rho \|_{L_{p_2}(B(x,r)-B(x,2r))} \| f \|_{L_1(B(x,2r))}$$

$$= \| \rho \|_{L_{p_2}(B(0,3r))} \| f \|_{L_1(B(x,2r))}$$

$$= \sigma_n^{\frac{1}{p_2}} \| \rho(t) t^{\frac{n-1}{p_2}} \|_{L_{p_2}(0,3r)} \| f \|_{L_1(B(x,2r))},$$

где $\sigma_n = n v_n$ - площадь поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Из неравенства (1.17) и замечания 1.5.4 с $\gamma = 3$ следует, что

$$\| \rho(t) t^{\frac{n-1}{p_2}} \|_{L_{p_2}(0,3r)} \lesssim \rho(3r) r^{\frac{n}{p_2}} \lesssim \rho(r) r^{\frac{n}{p_2}} = \varphi_{n,\rho,1,p_2}(r),$$

откуда следует неравенство (1.15).

3. Если $1 \leqslant p_2 = p_1 < \infty$, затем аналогично шагу 2

$$\| I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \|_{L_{p_1}(B(x,r))} \leqslant \| \rho \|_{L_1(B(x,r)-B(x,2r))} \| f \|_{L_{p_1}(B(x,2r))}$$

$$= \sigma_n \| \rho(t) t^{n-1} \|_{L_1(0,3r)} \| f \|_{L_{p_1}(B(x,2r))} \ .$$

Из неравенства (1.18) и замечания 1.5.4 с $\gamma = 3$ следует, что

$$\| \rho(t) t^{n-1} \|_{L_1(0,3r)} \lesssim \rho(3r) r^n \lesssim \rho(r) r^n = \varphi_{n,\rho,p_1,p_1}(r),$$

равномерно по $r > 0$, откуда следует неравенство (1.15).

Если $0 < p_2 < p_1, 1 \leqslant p_1 < \infty$, то, применяя неравенство Гёльдера, получим, что

$$\| I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \leqslant (v_n r^n)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \| I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \|_{L_{p_1}(B(x,r))}$$

$$\lesssim \rho(r) r^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)} \| f \|_{L_{p_1}(B(x,2r))} = \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r) \| f \|_{L_{p_1}(B(x,2r))},$$

что неравенство (1.15).

4. Предположим, что для некоторого $0 < p_1,p_2 \leqslant \infty$ выполняется неравенство (1.16). Возьмем в этом неравенстве $x = 0$ и $f \equiv 1$. Тогда для любого $y \in B(0,r)$ справедливо включение $B(y,2r) \supset B(0,r)$ и

$$I_{\rho(.)}(\chi_{B(0,2r)})(y) = \int_{B(0,2r)} \rho(y-z) dz = \int_{B(y,2r)} \rho(u) du$$

$$\geqslant \int_{B(0,r)} \rho(u)du = \sigma_n \int_0^r \rho(t)t^{n-1}dt.$$

Согласно замечанию 1.6.1.

$$\left\| I_{\rho(.)}(\chi_{B(0,2r)}) \right\|_{WL_{p_2}(B(0,r))} \gtrsim r^{\frac{n}{p_2}} \int_0^r \rho(t)t^{n-1}dt$$

и $\left\|\chi_{B(0,2r)}\right\|_{L_{p_2}(B(0,r))} = (\sigma_n r^n)^{\frac{1}{p_1}}$, следовательно, в силу (1.16)

$$r^{\frac{n}{p_2}} \int_0^r \rho(t)t^{n-1}dt \lesssim \rho(r)r^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)} r^{\frac{n}{p_1}}$$

для всех $r > 0$, откуда следует неравенство (1.18).

5. Последнее утверждение леммы 1.6.3 следует из шагов 3 и 4. $\square$

**Следствие 1.6.1.** *Пусть выполняются условия леммы 1.6.3 для* $n, \rho, p_1, p_2$ *и функции* $\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}$. *Тогда для* $1 < p_1 < p_2 < \infty$, *для* $p_1 = 1, 1 < p_2 \leqslant \infty$, *и для* $1 \leqslant p_1 < \infty, 0 < p_2 \leqslant p_1$

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \lesssim \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r) \| f \|_{L_{p_1}(B(x,2r))} + r^{\frac{n}{p_2}} \left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x) \qquad (1.22)$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \bigcap L_{p_1}(B(x,2r))$ *и, для* $1 < p_2 < \infty$

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \lesssim \varphi_{n,\rho,1,p_2}(r) \| f \|_{L_1(B(x,2r))} + r^{\frac{n}{p_2}} \left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x) \qquad (1.23)$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(B(x,2r))$.

**Лемма 1.6.4.** *Пусть* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ *неотрицательная функция, а* $\rho$ — *неотрицательная, невозрастающая, непрерывно дифференцируемая функция на* $(0,\infty)$ *такая, что* $\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = 0$. *Тогда для любых* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $r > 0$

$$\int_{{}^c B(x,r)} \rho(|x-y|)f(y)dy = \int_r^\infty \left( \int_{B(x,t)\setminus B(x,r)} f(y)dy \right) |\rho'(t)|dt. \qquad (1.24)$$

*Доказательство.* Применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_{{}^c B(x,r)} \rho(|x-y|)f(y)dy = \int_{y:|x-y|>r} \rho(|x-y|)f(y)dy$$

$$= \int_{y:|x-y|>r} \left( \int_{|x-y|}^\infty |\rho'(t)|dt \right) f(y)dy$$

$$= \int_r^\infty \left( \int_{y:|x-y|>r,|x-y|<t} |\rho'(t)| f(y) dy \right) dt$$
$$= \int_r^\infty \left( \int_{B(x,t)\setminus B(x,r)} f(y) dy \right) |\rho'(t)| dt.$$

$\square$

**Определение 1.6.2.** *Пусть* $1 \leqslant p_1 < \infty, 0 < p_2 \leqslant \infty$. *Тогда* $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$ *если* $\rho \in \mathfrak{M}^+((0,\infty))$ *и существует положительно невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция* $\tilde{\rho} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *такая, что*

1) $\tilde{\rho}(t) \approx \rho(t)$ *равномерно по* $t > 0$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{\rho}(t) = 0$,

3) $\tilde{\rho} \in S_n$,

4) $\int\limits_0^1 \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt = \infty, \int\limits_1^\infty \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt < \infty$,

5) $|\tilde{\rho}'(t)| t \gtrsim \tilde{\rho}(t)$ *равномерно по* $t > 0$,

6) *если* $0 < p_2 \leqslant p_1$ *и* $1 \leqslant p_1 < \infty$, *то*

$$\int_0^r \tilde{\rho}(t) t^{n-1} dt \lesssim \tilde{\rho}(r) r^n$$

*равномерно по* $r > 0$,

7) *если* $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, *то функция* $\varphi_{n,\tilde{\rho},p_1,p_2}(t) = \tilde{\rho}(t) t^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)}$ *почти не убывает на* $(0,\infty)$.

*Более того, если* $p_1 = 1$ *и* $1 < p_2 < \infty$, *то* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$ *если существует положительная невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция* $\tilde{\rho} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *такая, что выполняются условия* 1) - 3) *и* 5), 4) *и условия* 6) *выполняются для* $p_1 = 1$ *и вместо условия* 7) *выполняется следующее условие*

8)

$$\left\| \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n-1}{p_2}} \right\|_{L_{p_2}(0,r)} \lesssim \tilde{\rho}(r) r^{\frac{n}{p_2}}$$

*равномерно по* $r > 0$.

**Теорема 1.6.1.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p_1 < \infty, 0 < p_2 \leqslant \infty$.

1. $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *и* $1 \leqslant p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \leqslant p_1$, *и* $\rho \in S_{n,p_1.p_2}$, *то*

$$\| I_{\rho(.)}(|f|) \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} \| f \|_{L_{p_1}(B(x,t))} \, dt \tag{1.25}$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ *и* $f \in L^{\rm loc}_{p_1}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Если* $p_1 = 1$ *и* $0 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, *то*

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \approx \| I_{\rho(.)}|f| \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \approx r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \| f \|_{L_1(B(x,t))} \, dt \tag{1.26}$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ *и* $f \in L^{\rm loc}_1(\mathbb{R}^n)$.

3. *Если* $p_1 = 1$ *и* $1 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in S_{n,1,p_2}$, *то*

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \approx r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \| f \|_{L_1(B(x,t))} \, dt \tag{1.27}$$

*равномерно по* $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ $f \in L^{\rm loc}_1(\mathbb{R}^n)$.

**Замечание 1.6.2.** *Если* $p_1 = 1$ *и* $0 < p_2 < \infty$ *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, *эквивалентность (1.26) выполняется, если условие* 6) *определения 1.6.2 для* $0 < p_2 \leqslant 1$ *и условие* 7) *определения 1.6.2 для* $1 < p_2 < \infty$ *выполнено. Если* $\rho(t) = t^{\alpha - n}, 0 < \alpha < n$, *то это означает, что* $n(1 - \frac{1}{p_2})_+ < \alpha < n$.

*Если* $p_1 = 1$ *и* $1 < p_2 < \infty$ *и* $\rho \in S_{n,1,p_2}$, *эквивалентность (1.27) выполняется, если условие* 8) *определения 1.6.2 выполнено. Если* $\rho(t) = t^{\alpha - n}$, $0 < \alpha < n$, *то это означает, что* $n(1 - \frac{1}{p_2}) \leqslant \alpha < n$.

*В частности, для* $\alpha = n(1 - 1/p_2)$ *выполняется утверждение* 3 *теоремы 1.6.1, в то время как доказанное в лемме 1.6.3 из [**4**], утверждение* 2 *не выполняется.*

*Доказательство.* Шаг 1 (доказательство соотношения (1.25)). Мы применяем эквивалентность (1.7).

1.1a. К первому слагаемому в правой части (1.7) мы применяем условие 2) определения 1.5.1, заменяя $\rho$ на $\tilde{\rho}, s$ на $r, t$ на $2r$ и неравенство (1.15) и получаем, что

$$r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} \| f \|_{L_{p_1}(B(x,t))} \, dt$$

$$
\begin{aligned}
&\gtrsim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^{\infty} \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,t))}\, dt \\
&\geqslant r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^{2r} \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,t))}\, dt \\
&\geqslant r^{\frac{n}{p_2}} \tilde{\rho}(2r) \left( \int_r^{2r} t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt \right) \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,r))} \\
&\gtrsim \tilde{\rho}(r) r^{\frac{n}{p_1'}+\frac{n}{p_2}} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,r))} = \varphi_{n,\tilde{\rho},p_1,p_2}(r) \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,r))} \\
&\gtrsim \parallel I_{\tilde{\rho}(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{L_{p_2}(B(x,r))} \gtrsim \parallel I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{L_{p_2}(B(x,r))}
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

1.1b (второе доказательство неравенства (1.28)). К первому слагаемому в правой части (1.7) мы применяем неравенство (1.15) и условие 2) определения 1.5.1 с заменой $\rho$ на $\tilde{\rho}$, один раз, когда $s$ заменено на $r$ и $t$ на $2r$, и второй раз, когда $s$ заменено на $\frac{\tau}{2}$ и $t$ на $\tau$, и мы получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\parallel I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{L_{p_2}(B(x,r))} \lesssim \parallel I_{\tilde{\rho}(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{L_{p_2}(B(x,r))} \\
&\lesssim \tilde{\rho}(r) r^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,2r))} \\
&\lesssim \tilde{\rho}(2r) r^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,2r))} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \left( \int_{2r}^{4r} \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt \right) \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,2r))} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_{2r}^{\infty} \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,2t))}\, dt \\
&= 2^{-\frac{n}{p_1'}} r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^{\infty} \tilde{\rho}\left(\frac{\tau}{2}\right) \tau^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,\tau))}\, d\tau \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^{\infty} \tilde{\rho}(\tau)^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,\tau))}\, d\tau \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^{\infty} \rho(\tau)^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,\tau))}\, d\tau
\end{aligned}
$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in L_{p_1}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

1.2a. Чтобы оценить второе слагаемое в правой части (1.7), получим оценку для $(\overline{I}_{\rho(.),r}|f|)(x)$. Прежде всего отметим, что

$$\int_{2r}^{\infty} \tilde{\rho}(t)t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \tilde{\rho}(t)t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\rho}(2^k r) \parallel f \parallel_{L_1(B(x,2^k r))} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{dt}{t} = \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\rho}(2^k r) \parallel f \parallel_{L_1(B(x,2^k r))}$$

$$\geqslant \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\rho}(2^k r) \parallel f \parallel_{L_1(B(x,2^k r)\setminus B(x,2^{k-1}r))}$$

Поскольку согласно условию 2) определения 1.5.1 $\tilde{\rho}(2^k r) \geqslant c_1 \tilde{\rho}(2^{k-1}r)$ и $|x - y| \geqslant 2^{k-1}r$ для всех $y \in B(x,2^k r) \setminus B(x,2^{k-1}r)$, то

$$\int_{2r}^{\infty} \tilde{\rho}(t)t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \gtrsim \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(x,2^k r)\setminus B(x,2^{k-1}r)} \tilde{\rho}(2^{k-1}r)|f(y)|dy$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(x,2^k r)\setminus B(x,2^{k-1}r)} \tilde{\rho}(|x-y|)|f(y)|dy = \int_{{}^c B(x,r)} \tilde{\rho}(|x-y|)|f(y)|dy$$

$$= (\overline{I}_{\tilde{\rho}(.),r}|f|)(x)$$

и

$$(\overline{I}_{\tilde{\rho}(.),r}|f|)(x) \lesssim \int_{2r}^{\infty} \tilde{\rho}(t)t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \tag{1.29}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, применяя неравенство Гёльдера, получим, что

$$\begin{aligned} r^{\frac{n}{p_2}} \left(\overline{I}_{\rho(.),2r}|f|\right)(x) &\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \left(\overline{I}_{\tilde{\rho}(.),2r}|f|\right)(x) \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_{4r}^{\infty} \tilde{\rho}(t)t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_{4r}^{\infty} \tilde{\rho}(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,t))} dt \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_{r}^{\infty} \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1} \parallel f \parallel_{L_{p_1}(B(x,t))} dt \end{aligned} \tag{1.30}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ и $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Шаг 2 (доказательство эквивалентностей (1.26) и (1.27) для $p_1 = 1$). Мы применяем эквивалентности (1.7) и (1.8).

2.1a. По предположению $\tilde{\rho} \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$ неравенство (1.17) справедливо для $p_1 = 1$ и $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ и неравенство (1.18) справедливо для $p_1 = 1$ и $0 < p_2 \leqslant 1$, следовательно, Лемма 1.6.3 обеспечивает справедливость неравенства (1.15) с $p_1 = 1$, и мы имеем

$$r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \gtrsim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \tilde{\rho}(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt$$

$$\gtrsim \varphi_{n,\tilde{\rho},1,p_2}(r) \parallel f \parallel_{L_1(B(x,r))}$$

$$\gtrsim \parallel I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{L_{p_2}(B(x,r))} \geqslant \parallel I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{WL_{p_2}(B(x,r))} \tag{1.31}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, мы получили оценку сверху в эквивалентности (1.26).

2.1b. Если $\rho \in S_{n,1,p_2}$, то условие (1.14) выполняется для $p_1 = 1$ и $1 < p_2 < \infty$, следовательно, лемма 1.6.3 обеспечивает справедливость неравенства (1.16), и мы получаем, что

$$r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt$$

$$\gtrsim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \tilde{\rho}(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \geqslant \varphi_{n,\tilde{\rho},1,p_2}(r) \parallel f \parallel_{L_1(B(x,r))}$$

$$\gtrsim \parallel I_{\rho(.)}(|f|\chi_{B(x,2r)}) \parallel_{WL_{p_2}(B(x,r))} \tag{1.32}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, мы получили оценку сверху в эквивалентности (1.27).

2.2a. Если $\tilde{\rho} \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$ и $1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, то для доказательства оценки сверху в эквивалентности (1.7) мы применяем неравенство (1.29). Из эквивалентности (1.7) и неравенств (1.29) и (1.31) следует, что

$$\parallel I_{\rho(.)}|f| \parallel_{WL_{p_2}(B(x,r))} \leqslant \parallel I_{\rho(.)}|f| \parallel_{L_{p_2}(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \tag{1.33}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

2.2b. Соответственно, если $\tilde{\rho} \in S_{n,1,p_2}$ и $1 < p_2 < \infty$, то из эквивалентности (1.8) и неравенств (1.29) и (1.32) следует, что

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \| f \|_{L_1(B(x,t))} \, dt \tag{1.34}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

2.3. Для всех $y \in B(x,r)$ мы имеем $|y - z| \leqslant 2r$ если $z \in B(x,r)$ и $|y - z| \leqslant 2|x - z|$ если $z \in^c B(x,r)$ (так как $|y - z| \leqslant |y - x| + |x - z| \leqslant r + |x - z| \leqslant 2|x - z|$). Следовательно, поскольку $\tilde{\rho}$ не возрастающая

$$I_{\tilde{\rho}}(.)(|f|)(y) = \int_{B(x,r)} \tilde{\rho}(|y - z|)|f(z)|dz + \int_{{}^cB(x,r)} \tilde{\rho}(|y - z|)|f(z)|dz$$

$$\geqslant \tilde{\rho}(2r) \int_{B(x,r)} |f(z)|dz + \int_{{}^cB(x,r)} \tilde{\rho}(2|x - z|)|f(z)|dz.$$

По условию 2) определения 1.5.1 с $s = 2t$ имеем $\tilde{\rho}(2t) \geqslant c_1 \tilde{\rho}(z)$ для любого $t > 0$, следовательно, согласно равенству (1.22) равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $y \in B(x,r)$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$

$$I_{\rho(.)}(|f|)(y) \gtrsim I_{\tilde{\rho}(.)}(|f)(y) \geqslant c_1 \left( \tilde{\rho}(r) \int_{B(x,r)} |f(z)|dz + \int_{{}^cB(x,r)} \tilde{\rho}(|x - z|)|f(z)|dz \right)$$

$$= c_1 \left( \tilde{\rho}(r) \int_{B(x,r)} |f(z)|dz + \int_r^\infty \left( \int_{B(x,t) \setminus B(x,r)} |f(z)|dz \right) |(\tilde{\rho})'(t)|dt \right)$$

$$= c_1 \Big( \tilde{\rho}(r) \int_{B(x,r)} |f(z)|dz + \int_r^\infty \left( \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right) |(\tilde{\rho})'(t)|dt$$

$$- \left( \int_r^\infty |(\tilde{\rho})'(t)|dt \right) \int_{B(x,r)} |f(z)|dz \Big)$$

$$= c_1 \int_r^\infty \left( \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right) |(\tilde{\rho})'(t)|dt.$$

Следовательно, в соответствии с замечанием 1.6.1 и условием 5) определения 1.6.2

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \geqslant \| I_{\rho(.)}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \gtrsim \| I_{\tilde{\rho}}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))}$$

$$\geqslant c_1 v_n^{\frac{n}{p_2}} r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \left( \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \right) |(\tilde{\rho})'(t)|dt$$

$$\gtrsim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \tilde{\rho}(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \gtrsim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \parallel f \parallel_{L_1(B(x,t))} dt \qquad (1.35)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Шаг 3. Утверждение 1 теоремы 1.6.1 следует из неравенств (1.28) и (1.30). Утверждение 2 следует из неравенств (1.29), (1.31) и (1.35). Утверждение 3 следует из неравенств (1.29), (1.32) и (1.35).

$\square$

## 1.7 Обобщенный потенциал Рисса и оператор Харди

Обозначим через $\mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow)$ конус всех функций из $\mathfrak{M}^+((0,\infty))$ которые не возрастают на $(0,\infty)$, и положим

$$\mathbb{A} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0 \right\}.$$

Пусть $H$ - оператор Харди

$$(Hg)(t) := \int_0^t g(r)dr, \ 0 < t < \infty.$$

Более того, пусть для $0 < p \leqslant \infty$ и измеримой по Лебегу функции $v : (0,\infty) \to [0,\infty)$, $L_{p_1 v(\cdot)}(0,\infty)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу функций $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|f\|_{L_{p,v(\cdot)}(0,\infty)} = \|fv\|_{L_p(0,\infty)} < \infty.$$

**Теорема 1.7.1.** *Пусть* $1 \leqslant p_1 < \infty$, $0 < p_2 \leqslant \infty$, $0 < \theta_2 \leqslant \infty$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, $\rho$ *- положительная непрерывная функция на* $(0,\infty)$ *и*

$$\mu_{n,\rho,p_1}(r) = \frac{\int_r^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1}-1} dt}{\int_1^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1}-1} dt}, \ r > 0, \qquad (1.36)$$

$$v_2(r) = w_2\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right)\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right)^{\frac{n}{p_2}}|(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r))'|^{\frac{1}{\theta_2}},\ r>0, \tag{1.37}$$

$$g_{n,\rho,p_1}(t) = \|f\|_{L_{p_1}\left(B(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t))\right)},\ t>0. \tag{1.38}$$

1. *Если* $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *или* $1 \leqslant p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \leqslant p_1$, *и* $\rho \in S_{n,p_1.p_2}$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \lesssim \|Hg_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \tag{1.39}$$

*равномерно по* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Если* $p_1 = 1$ *и* $0 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \approx \|Hg_{n,\rho,1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \tag{1.40}$$

*равномерно по всем функциям* $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

3. *Если* $p_1 = 1$ *и* $1 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in S_{n,1,p_2}$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{WLM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \approx \|Hg_{n,\rho,1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \tag{1.41}$$

*равномерно по всем функциям* $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

**Замечание 1.7.1.** *Если* $r = \mu_{n_1,\rho,p_1}(t)$ *в* (1.54), *тогда, принимая во внимание, что* $\left(\mu^{(-1)}_{n_1,\rho,p_1}\right)' = \left(\mu'_{n_1,\rho,p_1}\left(\mu^{(-1)}_{n_1,\rho,p_1}\right)\right)^{-1}$, $r>0$, *мы получим*

$$V_1\left(\mu_{n_1,\rho,p_1}(t)\right) = w_1(t)\left|\mu'_{n_1,\rho,p_1}(t)\right|^{-\frac{1}{\theta_1}},\ t>0 \tag{1.42}$$

*и*

$$V_2\left(\mu_{n_1,\rho,p_1}(t)\right) = w_2(t)t^{\frac{n}{p_2}}\left|\mu'_{n,\rho,p_1}(t)\right|^{-\frac{1}{\theta_1}},\ t>0, \tag{1.43}$$

**Лемма 1.7.1.** *Предположим, что* $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 \leqslant \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$ *и* $\rho$ *- положительная непрерывная функция на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$\int_0^1 \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt = \infty,\ \int_1^\infty \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt < \infty, \tag{1.44}$$

*функции* $\mu_{n,\rho,p_1}$, $g_{n,\rho,p_1}$, $v_1$, $v_2$ *определяются формулами* (1.36), (1.38), (1.54), (1.37), *соответственно. Тогда*

$$\|g_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}} = \|f\|_{LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}} \tag{1.45}$$

*для всех* $f \in LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$.

*Кроме того, для любой измеримой функции* $\varphi_1 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *и* $t > 0$

$$\|v_1\varphi_1\|_{L_{\theta_1}(0,t)} = \|w_1(r)\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_1}(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t),\infty)}, \tag{1.46}$$

$$\|v_1\varphi_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)} = \|w_1(r)\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_1}(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t))}, \tag{1.47}$$

$$\|v_1\varphi_1\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)} = \|w_1(r)\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)} \tag{1.47$'$}$$

$$\|v_1\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)} = \|w_1\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)}\,, \tag{1.48}$$

*и для любой измеримой функции* $\varphi_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *и* $t > 0$

$$\|v_2\varphi_2\|_{L_{\theta_2}(0,t)} = \|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\varphi_2(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_2}(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t),\infty)}, \tag{1.49}$$

$$\|v_2\varphi_2\|_{L_{\theta_2}(t,\infty)} = \|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\varphi_2(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_2}(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t))}, \tag{1.50}$$

$$\|v_2\varphi_2\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} = \|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\varphi_2(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}, \tag{1.51$'$}$$

$$\|v_2\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} = \left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}. \tag{1.51}$$

*Доказательство.* 1. Действительно,

$$\|g_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}} = \left\|v_1(t)\|f\|_{L_{p_1}(B(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)))}\right\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)}$$

$$= \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t) = r, t = \mu_{n,\rho,p_1}(r), \quad \text{применяя (4.13)} \lim_{r\to 0^+}\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t) = \infty, \lim_{n\to\infty}\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t) = 0\right)$$

$$= \left\|v_1\left(\mu_{n,\rho,p_1}(r)\right)|\mu'_{n,\rho,p_1}(r)|^{\frac{1}{\theta_1}}\|f\|_{L_{p_1}(B(0,r))}\right\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)}$$

$$= \left\|w_1(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(0,r))}\right\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)} = \|f\|_{LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}}.$$

(Мы использовали равенство (1.42)).

2. Обратим внимание, что согласно (1.15) и (1.52), для $0 < \theta_1 < \infty$, $t > 0$

$$\|v_1\varphi_1\|_{L_{\theta_1}(0,t)} = \left(-\int_0^t w_1\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s)\right)^{\theta_1}\varphi_1(s)^{\theta_1}\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s)\right)' ds\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$$

$$= \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s) = r\right) = \left(\int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)}^{\infty} w_1(r)^{\theta_1}\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))^{\theta_1}dr\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$$
$$= \|w_1(r)\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_1}(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t),\infty)}$$

и, аналогично,

$$\|v_1\|_{L_{\theta_1}(t,\infty)} = \|w_1(r)\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_{\theta_1}(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t))}.$$

Эти равенства справедливы и для $\theta_1 = \infty$, поскольку, например, согласно (1.54)

$$\|v_1\varphi_1\|_{L_\infty(0,t)} = \left\|w_1\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s)\right)\varphi_1(s)\right\|_{L_\infty(0,t)}$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{0<s<t}\left|w_1\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s)\right)\varphi_1(s)\right|$$
$$= \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s) = r, \mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}((0,t)) = \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1},\infty\right)\right)$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)<r<\infty}\left|w_i\left(r\right)\varphi_1\left(\mu_{n,\rho,p_1}(r)\right)\right|$$
$$= \|w_1(r)\varphi_1(\mu_{n,\rho,p_1}(r))\|_{L_\infty\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t),\infty\right)}.$$

Аналогичным образом, с помощью (1.37), (1.52) и (1.43) для $0 < \theta_2 \leqslant \infty$, $t > 0$

$$\|v_2\|_{L_{\theta_2}(0,t)} = \left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\right\|_{L_{\theta_2}\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t),\infty\right)}$$

и

$$\|v_2\|_{L_{\theta_2}(t,\infty)} = \left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\right\|_{L_{\theta_2}\left(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)\right)}.$$

Из доказанных равенств следуют равенства (1.48) и (1.51) путем перехода к пределу $t \to 0^+$ или $t \to +\infty$. $\square$

**Замечание 1.7.2.** *Если* $\rho(t) = t^{\alpha-n}$, $1 \leqslant p_1 < \infty$, $0 < p_2 < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p_1}$, *то* $\mu_{n,\rho,p_1}(r) = r^{-\sigma}$, *где* $\sigma = \frac{n}{p_1} - \alpha$, $\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r) = r^{-\frac{1}{\sigma}}$, $v_2(r) = \sigma^{-\frac{1}{\theta_2}}w_2(r^{-\frac{1}{\sigma}})r^{-\frac{n}{\sigma p_2}-\frac{1}{\sigma\theta_2}-\frac{1}{\theta_2}}$, $g_{n,\rho,p_1}(t) = \| f \|_{L_{p_1}(B(0,t^{-\frac{1}{\sigma}}))}$ *и теорема* 1.7.1 *принимает форму теоремы* 4.1 *в [8].*

**Замечание 1.7.3.** *Из условия* 4) *определения* 1.6.2 *следует, что*

$$\lim_{r\to 0^+}\mu_{n,\rho,p_1}(r)=\lim_{r\to 0^+}\mu_{n,\tilde\rho,p_1}(r)=\infty,\ \lim_{r\to\infty}\mu_{n,\rho,p_1}(r)=\lim_{r\to\infty}\mu_{n,\tilde\rho,p_1}(r)=0 \quad (1.52)$$

*и что* $\mu_{n,\rho,p_1}$ *- это строго убывающая непрерывно дифференцируемая функция на* $(0,\infty)$. *Более того,*

$$\lim_{r\to 0^+}\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)=\infty,\ \lim_{r\to\infty}\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)=0. \quad (1.53)$$

*Доказательство.* 1. Пусть $1<p_1<p_2<\infty$ или $1\leqslant p_1\leqslant\infty$ и $0<p_2\leqslant p_1$, и $\rho\in S_{n,p_1,p_2}$. По неравенству (1.25) мы имеем $\left(c=\left(\int_1^\infty \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt\right)^{-1}\right)$

$$\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}}\lesssim\left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\int_r^\infty\rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}\|f\|_{L_{p_1}(B(0,t))}dt\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}$$

$$=c\left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\left(-\int_r^\infty\|f\|_{L_{p_1}(B(0,t))}d\mu_{n,\rho,p_1}(t)\right)\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}$$

$$=c\left(\mu_{n,\rho,p_1}(t)=\tau,\ t=\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(\tau),\ \lim_{r\to\infty}\mu_{n,\rho,p_1}(t)=0\right)$$

$$=c\left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\int_0^{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}\|f\|_{L_{p_1}\left(B(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(\tau))\right)}d\tau\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}$$

$$=c\Big(\mu_{n,\rho,p_1}(r)=u,\ r=\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(u),\ \lim_{r\to0}\mu_{n,\rho,p_1}(r)=\infty,\ \lim_{r\to\infty}\mu_{n,\rho,p_1}(r)=0\Big)$$

$$=c\left\|w_2\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(u)\right)\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(u)\right)^{\frac{n}{p_2}}\left|\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(u)\right)'\right|^{\frac{1}{\theta_2}}\int_0^u\|f\|_{L_{p_1}\left(B(0,\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(\tau))\right)}d\tau\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}$$

$$=c\left\|v_2(u)\left(Hg_{n,\rho,p_1}\right)(u)\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}=c\|Hg_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot),}(0,\infty)}$$

равномерно по $f\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

2. Пусть $p_1=1$ и $0<p_2\leqslant 1$, и $\rho\in\tilde S_{n,p_1,p_2}$. По неравенству (1.26) мы имеем аналогично шагу 1

$$\left\|I_{\rho(\cdot)}f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}}\approx\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\int_r^\infty\rho(t)t^{-1}\|f\|_{L_1(B(0,t))}\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}$$

$$=c\left\|w_2(r)r^{\frac{n}{p_2}}\left(-\int_r^\infty\|f\|_{L_1(B(0,t))}d\mu_{n,\rho,1}(t)\right)\right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)}$$

$$= c \left\| v_2(u) \left(Hg_{n,1}\right)(u) \right\|_{L_{\theta_2}(0,\infty)} = c \| Hg_{n,\rho,1} \|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot),}(0,\infty)}$$

для всех функций $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $p_1 = 1$ и $1 < p_2 < \infty$, а $\rho \in S_{n,1,p_2}$. Эквивалентность (1.41) следует аналогично шагу 2 из эквивалентности (1.27). $\square$

**Теорема 1.7.2.** *Предположим, что $1 \leqslant p_1 < \infty$, $0 < p_2 \leqslant \infty$, $0 < \theta_1, \theta_2 \leqslant \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, $\mu_{n,\rho,p_1}$ определяется формулой (1.36),*

$$v_1(r) = w_1\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right) \left| \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(r)\right)' \right|^{\frac{1}{\theta_1}}, \ r > 0, \tag{1.54}$$

*и $v_2$ определяется формулой (1.37).*

*1. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ или $1 \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < p_2 \leqslant p_1$, и $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. Если оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$, то есть*

$$\|Hg\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \lesssim \|g\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)} \tag{1.55}$$

*равномерно по $g \in \mathbb{A}$, то оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$.*

*2. Пусть $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ и $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ тогда и только тогда, когда оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$.*

*3. Пусть $p_1 = 1$, $1 < p_2 < \infty$ и $\rho \in S_{n,1,p_2}$. Тогда оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $WLM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ тогда и только тогда, когда оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$.*

*Доказательство.* 1. Пусть $1 < p_1 < p_2 < \infty$ или $1 \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < p_2 \leqslant p_1$, и $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. Предположим, что оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$. Поскольку $g_{n,\rho,p_1} \in \mathbb{A}$, согласно утверждению 1 теоремы 1.7.1 и формуле (1.45) мы имеем

$$\left\|I_{\rho(\cdot)}f\right\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \lesssim \left\|Hg_{n,\rho,p_1}\right\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)}$$

$$\lesssim \|g_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)} = \|f\|_{LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}} \tag{1.56}$$

равномерно по $f \in LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$, следовательно, оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$.

2.1. Пусть $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ и $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. Если оператор $H$ ограничен из $L_{\theta_1,v_1(\cdot)(0,\infty)}$ в $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$, то из утверждения 2 теоремы 1.7.1, как и на шаге 1, следует, что оператор $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$.

2.2. Предположим, что $I_{\rho(\cdot)}$ ограничен из $LM_{1\theta_1,w_1(\cdot)}$ в $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$. Согласно утверждению 2 теоремы 1.7.1 и формуле (1.45) с $p_1 = 1$

$$\left\|H_{g_{n,\rho,1}}\right\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \approx \left\|I_{\rho(\cdot)}f\right\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{LM_{1\theta_1,w_1(\cdot)}} = \|g_{n,\rho,1}\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}} \tag{1.57}$$

равномерно по всем неотрицательным функциям $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $g \in \mathbb{A}$ непрерывно дифференцируемая на $(0,\infty)$. Рассмотрим положительную измеримую по Лебегу функцию $h$ на $(0,\infty)$, определенную однозначно с точностью до эквивалентности равенством

$$g(t) = \|h(|\cdot|)\|_{L_1(B(0,\mu_{n,\rho,1}^{(-1)}(t)))} = \sigma_n \int_0^{\mu_{n,\rho,1}^{(-1)}(t)} h(\tau)\tau^{n-1}d\tau,\ t > 0$$

$$\Leftrightarrow g'(t) = \sigma_n\big(\mu_{n,\rho,1}^{(-1)}(t)\big)' h\big(\mu_{n,\rho,1}^{(-1)}(t)\big)\big(\mu_{n,\rho,1}^{(-1)}(t)\big)^{n-1}, t > 0$$

$$\Leftrightarrow h(r) = \sigma_n^{-1} g'(\mu_{n,\rho,1}(r))\mu'_{n,\rho,1}(r)r^{1-n}, r > 0.$$

Если возьмем в (1.57) $f(x) = h(|x|)$, то согласно (1.38) $\|f\|_{L_1(B(0,\mu_{n,\rho,1}^{(-1)}(t)))} = g(t)$ и согласно (1.56)

$$\|Hg\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \lesssim \|g\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}} \tag{1.58}$$

равномерно по $g \in \mathbb{A}$ которые непрерывно дифференцируемы на $(0,\infty)$.

Наконец, если $g$ является произвольной функцией в $\mathbb{A}$, то существуют функции $g_k \in \mathbb{A}$, $k \in \mathbb{N}$, которые непрерывно дифференцируемы на $(0,\infty)$ и такие, что $g_k \leqslant g_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} g_k = g$ на $(0,\infty)$. Следовательно, переходя к пределу в (1.58), где $g$ заменено на $g_k$, при $k \to \infty$, получим, что соотношение (1.58) выполняется по $g \in \mathbb{A}$.

3. Пусть $p_1 = 1$, $1 < p_2 < \infty$ и $\rho \in S_{n,1,p_2}$. В этом случае аргумент аналогичен аргументу на шаге 2, следует только использовать утверждение 3 теоремы 1.7.1 и пространство $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ заменить на пространство $WLM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$. $\square$

## 1.8 Неравенство Харди на конусе монотонных функций

Необходимые и достаточные условия ограниченности оператора $H$ из одного весового пространства Лебега $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ в другое весовоепространство $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ на конусе $\mathbb{A}$ известны для любых значений $0 < \theta_1,\ \theta_2 \leqslant \infty$. Ниже мы приводим эти результаты, которые являются следствием более общих утверждений, содержащихся в работе А. Гогатишвили и В.Д. Степанова [25] (теоремы 2.5, 3.15 и 3.16). См. также работу М.Л. Гольдмана [26].

**Теорема 1.8.1.** *Пусть* $0 < \theta_1,\ \theta_2 \leqslant \infty$, $v_1$, $v_2$ *- неотрицательные измеримые по Лебегу функции на* $(0,\infty)$. *Тогда оператор* $H$ *ограничен из* $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ *в* $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ *на конусе* $\mathbb{A}$ *тогда и только тогда, когда*

*(a) если* $1 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, *то*

$$A_{11} := \sup_{t>0} \left( \int_0^t s^{\theta_2} v_2^{\theta_2}(s) ds \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left( \int_0^t v_1^{\theta_1}(s) ds \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty,$$

*и*

$$A_{12} := \sup_{t>0} \left( \int_t^\infty v_2^{\theta_2}(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left( \int_0^t z^{\theta_1'} \left( \int_0^z v_1^{\theta_1}(s) ds \right)^{-\theta_1'} v_1^{\theta_1}(z) dz \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

*(b) если* $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, *то*

$$A_2 := \sup_{t>0} \left( \int_0^t v_1^{\theta_1}(s) ds \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \left( \int_0^\infty \min\{s,t\}^{\theta_2} v_2^{\theta_2}(s) ds \right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty,$$

*(c) если* $1 < \theta_1 < \infty$, $0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$,

$$A_{31} := \left( \int_0^\infty \left( \int_0^t v_1^{\theta_1}(\tau) d\tau \right)^{-\frac{r}{\theta_1}} \left( \int_0^t s^{\theta_2} v_2^{\theta_2}(s) ds \right)^{\frac{r}{\theta_1}} t^{\theta_2} v_2^{\theta_2}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

*и*

$$A_{32} := \left( \int_0^\infty \left( \int_t^\infty v_2^{\theta_2}(s) ds \right)^{\frac{r}{\theta_1}} \left( \int_0^t s^{\theta_1'} \Big( \int_0^s v_1^{\theta_1}(\tau) d\tau \Big)^{-\theta_1'} v_1^{\theta_1}(s) ds \right)^{\frac{r}{\theta_1'}} v_2^{\theta_2}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

*где* $\frac{1}{r} = \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}$,

(*d*) *если* $0 < \theta_2 < \theta_1 \leqslant 1$, *то* $A_{41} := A_{31} < \infty$ *и*

$$A_{42} := \left( \int_0^\infty \left( \sup_{0<s\leqslant t} s^{\theta_1} \left( \int_0^s v_1^{\theta_1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \right)^{\frac{r}{\theta_1}} \left( \int_t^\infty v_2^{\theta_2}(z) dz \right)^{\frac{r}{\theta_1}} v_2^{\theta_2}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

(*e*) *если* $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_2 = \infty$, *то*

$$A_5 := \sup_{t>0} \left( \int_0^t v_1^{\theta_1}(s) ds \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \left( \operatorname*{ess\,sup}_{y>0} \min(t,y) v_2(y) \right) < \infty,$$

(*f*) *если* $1 < \theta_1 < \infty$, $\theta_2 = \infty$, *то*

$$A_6 := \operatorname*{ess\,sup}_{s>0} v_2(s) \left( \int_0^s \left( \int_t^s \left( \int_0^y v_1^{\theta_1}(z) dz \right)^{-1} dy \right)^{\theta_1'} v_1^{\theta_1}(t) dt \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

(*g*) *если* $\theta_1 = \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$, *то*

$$A_7 := \left( \int_0^\infty \left( v_2(x) \int_0^x \frac{dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{0<z<y} v_1(z)} \right)^{\theta_2} dx \right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty,$$

(*h*) *если* $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, *то*

$$A_8 := \operatorname*{ess\,sup}_{x>0} \left( v_2(x) \int_0^x \frac{dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{0<z<y} v_1(z)} \right) < \infty.$$

## 1.9 Условия, обеспечивающие ограниченность обобщенного потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое

Для получения достаточных условий при $p_1 \geqslant 1$ и необходимых и достаточных условий при $p_1 = 1$ на весовые функции $w_1$, $w_2$ обеспечивающих ограниченность $I_{\rho(.)}$ из $LM_{p_1,\theta_1,w_1(.)}$ в $LM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ для $1 < p_1 < p_2 < \infty$ или $1 \leqslant p_1 < \infty$ и $0 < p_2 \leqslant \infty$ достаточно применить теоремы 1.7.2 и 1.8.1, лемму 1.7.1 и выполнить надлежащие замены переменных.

Пусть $w_{2,n,p_2}(x) = w_2(x)x^{\frac{n}{p_2}}$.

**Теорема 1.9.1.** *Предположим, что* $0 < \theta_1,\theta_2 \leqslant \infty, w_1 \in \Omega_{\theta_1}, w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

1. *Пусть* $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *или* $1 \leqslant p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \leqslant \infty$, *и* $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. *Тогда оператор* $I_{\rho(.)}$ *ограничен из* $LM_{p_1,\theta_1,w_1(\cdot)}$ *в* $LM_{p_2,\theta_2,w_2(\cdot)}$, *если выполняются следующие условия:*

$(a)$ *если* $1 < \theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_{11} := \sup_{t>0} \left( \int_t^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x) \mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left( \int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty,$$

*и*

$$B_{12} := \sup_{t>0} \left( \int_0^t w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left( \int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(x)}{(\int_x^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds)^{\theta_1'}} dx \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

$(b)$ *если* $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_1 \leqslant \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_2 :=$$

$$\sup_{t>0} \left( \int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \left( \int_0^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x) \min\{\mu_{n,\rho,p_1}(t), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\}^{\theta_2} dx \right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty,$$

$(c)$ *если* $1 < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$, *то*

$$B_{31} := \left( \int_0^\infty \left( \frac{\int_t^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx} \right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(t)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(t)dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

*и*

$$B_{32} :=$$

$$\left( \int_0^\infty \left( \int_z^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx \right)^{\frac{r}{\theta_1}} \left( \int_z^\infty \frac{\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(\tau) w_1^{\theta_1}(\tau)}{\left( \int_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(u)du \right)^{\theta_1'}} d\tau \right)^{\frac{r}{\theta_1'}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(z)dz \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

*где* $\frac{1}{r} = \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}$,

$(d)$ *если* $0 < \theta_2 < \theta_1 \leqslant 1$, *то* $B_{41} := B_{31} < \infty$ *и*

$$B_{42} :=$$

$$\left( \int\limits_0^\infty \sup_{y<z<\infty} \mu_{n,\rho,p_1}(z)^r \left( \int\limits_z^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{-\frac{r}{\theta_1}} \left( \int\limits_0^y w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx \right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(y)dy \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$(e)$ *если* $0 < \theta_1 \leqslant 1, \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_5 := \sup_{t>0} \left( \int\limits_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \operatorname*{ess\,sup}_{x>0} w_{2,n,p_2}(x) \min\{\mu_{n,\rho,p_1}(t), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\} < \infty,$$

$(f)$ *если* $1 < \theta_1 < \infty, \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_6 :=$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z>0} w_{2,n,p_2}(z) \left( \int\limits_z^\infty \left( \int\limits_x^z \left( \int\limits_u^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{-1} \rho(u) u^{\frac{n}{p_1'}-1} du \right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(x)dx \right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

$(g)$ *если* $\theta_1 = \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_7 := \left( \int_0^\infty \left( w_{2,n,p_2}(\tau) \int_\tau^\infty \frac{\rho(z) z^{\frac{n}{p_1'}-1} dz}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z<s<\infty} w_1(s)} \right)^{\theta_2} d\tau \right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty.$$

$(h)$ *если* $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_8 := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau>0} \left( \int_\tau^\infty \frac{\rho(z) z^{\frac{n}{p_1'}-1} dz}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z<s<\infty} w_1(s)} \right) w_{2,n,p_2}(\tau) < \infty.$$

2. *Пусть* $p_1 = 1, 0 < p_2 < \infty$ *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. *Тогда оператор* $I_{\rho(.)}$ *ограничен из* $LM_{1,\theta_1,w_1(.)}$ *в* $LM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* $(a)$ - $(h)$ *с* $p_1 = 1$.

3. *Пусть* $p_1 = 1, 1 < p_2 < \infty$ *и* $\rho \in S_{n,1,p_2}$. *Тогда оператор* $I_{\rho(.)}$ *ограничен из* $LM_{1,\theta_1,w_1(.)}$ *в* $WLM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* $(a)$ - $(h)$ *при* $p_1 = 1$.

*Доказательство.* Достаточно с помощью леммы 1.7.1 и соответствующих замен переменных доказать, что при $\mu_{n,\rho,p_1}$, $v_1$ и $v_2$, определяемыми формулами (1.36), (1.54), (1.37), соответственно, $A_{11} = B_{11}$. $A_{12} = B_{12}$, $A_2 = B_2$,

$A_{31}=B_{31}$, $A_{32}=B_{32}$, $A_{41}=B_{41}$, $A_5=B_5$ и $A_6=cB_6$, $A_7=cB_7$, $A_8=cB_8$, где $c=\left(\int\limits_1^\infty \rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt\right)^{-1}$.

(a) Если $1<\theta_1\leqslant\theta_2<\infty$, то согласно теореме 1.7.1, (1.46) с $\varphi_1\equiv 1$ и (1.49) с $\varphi_2(s)\equiv s$, получим, что

$$A_{11}=\sup_{t>0}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)}^\infty w^{\theta_2}_{2,n,p_2}(r)\mu^{\theta_2}_{n,\rho,p_1}(r)dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)}^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}}$$

$$\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)=\tau\right)$$

$$=\sup_{\tau>0}\left(\int\limits_\tau^\infty w^{\theta_2}_{2,n,p_2}(r)\mu^{\theta_2}_{n,\rho,p_1}(r)dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int\limits_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}}=B_{11}$$

и

$$A_{12}=\sup_{t>0}\left(\int\limits_0^{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)} w^{\theta_2}_{2,n,p_2}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int\limits_0^t z^{\theta_1'}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(z)}^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\theta_1'} w_1^{\theta_1}(z)dz\right)^{\frac{1}{\theta_1'}}.$$

Далее, согласно (1.47) с

$$\varphi_1(z)=\left(z^{\theta_1'}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(z)}^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\theta_1'}\right)^{\frac{1}{\theta_1}},$$

получим, что

$$A_{12}=\sup_{t>0}\left(\int\limits_0^{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)} w^{\theta_2}_{2,n,p_2}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)}^\infty \mu^{\theta_1'}_{n,\rho,p_1}(x)\left(\int\limits_x^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\theta_1'} w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_1'}}$$

$$\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)=\tau\right)$$

$$=\sup_{\tau>0}\left(\int\limits_0^\tau w_2^{\theta_2}(x)x^{\frac{n\theta_2}{p_2}}dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\left(\int\limits_\tau^\infty \mu^{\theta_1'}_{n,\rho,p_1}(x)\left(\int\limits_x^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\theta_1'} w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_1'}}=B_{12}.$$

(b) Если $0<\theta_1\leqslant 1$, $\theta_1\leqslant\theta_2<\infty$, то согласно (1.46) с $\varphi_1\equiv 1$ и по (1.51') с $\varphi_2(s)=\min\{t,s\}$, $s>0$, получим, что

$$A_2=\sup_{t>0}\left(\int_{\mu^{-1}_{n,\rho,p_1}(t)}^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}}\left(\int_0^\infty w^{\theta_2}_{2,n,p_2}(r)\min\{t,\mu_{n,\rho,p_1}(r)\}^{\theta_2}dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$$

$$(\mu_{n,\rho,p_1}^{-1}(t)=\tau)$$

$$=\sup_{\tau>0}\left(\int_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{-\frac{1}{\theta_1}}\left(\int_0^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(r)\min\{\mu_{n,\rho,p_1}(\tau),\mu_{n,\rho,p_1}(r)\}^{\theta_2}dr\right)^{\frac{1}{\theta_2}}=B_2.$$

(c) Если $1<\theta_1<\infty$, $0<\theta_2<\theta_1<\infty$, то согласно (1.46) с $\varphi_1\equiv 1$, (1.49) с $\psi_2=s$ и (1.51') получаем, что

$$A_{31}=\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t)}^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t)}^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}t^{\theta_2}v_2^{\theta_2}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_z^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int\limits_z^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(z)w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(z)dz\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=B_{31}$$

и

$$A_{32}=$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t)}w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int\limits_0^t\frac{s^{\theta_1'}}{\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(s)}^\infty w_1^{\theta_1}(u)du\right)^{\theta_1'}}v_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{\frac{r}{\theta_1'}}v_2^{\theta_2}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t)}w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t)}^\infty\frac{\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(\tau)w_1^{\theta_1}(\tau)}{\left(\int\limits_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(u)du\right)^{\theta_1'}}d\tau\right)^{\frac{r}{\theta_1'}}v_2^{\theta_2}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_z^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int\limits_z^\infty\frac{\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(\tau)w_1^{\theta_1}(\tau)}{\left(\int\limits_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(u)du\right)^{\theta_1'}}d\tau\right)^{\frac{r}{\theta_1'}}w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(z)dz\right)^{\frac{1}{r}}=B_{32}.$$

(d) Если $0<\theta_2<\theta_1\leqslant 1$, согласно (1.46) с $\varphi_1\equiv 1$ и (1.50) с $\varphi_2\equiv 1$, получим, что

$$A_{41}=$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\sup_{0<\tau<t}\tau^r\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(\tau)}^\infty w_1^{\theta_1}(u)du\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int\limits_0^{\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t)}w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}v_2^{\theta_2}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left( \int_0^\infty \sup_{0<\tau<\mu_{n,\rho,p_1}(y)} \tau^r \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(\tau)}^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{\frac{r}{\theta_1}} \left( \int_0^y w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx \right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(y)dy \right)^{\frac{1}{r}}.$$

$$\left(\tau = \mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(z)\right)$$

$$= \left( \int_0^\infty \operatorname{ess\,sup}_{y<z<\infty} \mu_{n,\rho,p_1}(z)^r \left( \int_z^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{\frac{r}{\theta_1}} \left( \int_0^y w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx \right)^{\frac{r}{\theta_1}} \mu_{n,\rho,p_1}(x)^{\theta_2}(y)dy \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= B_{42}.$$

(e) Если $0 < \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_2 = \infty$, согласно (1.46) с $\varphi_1 \equiv 1$ и (1.51') с $\varphi_2(y) = \min\{t,y\}$, $y > 0$, получим, что

$$A_5 = \sup_{t>0} \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)}^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \operatorname{ess\,sup}_{x>0} \ w_{2,n,p_2}(x) \min\{t, \mu_{n,\rho,p_1}(x)\}$$

$$(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t) = \tau)$$

$$= \sup_{\tau>0} \left( \int_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx \right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \operatorname{ess\,sup}_{x>0} \ w_{2,n,p_2}(x) \min\{\mu_{n,\rho,p_1}(\tau), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\} = B_5.$$

(f) Если $1 < \theta_1 < \infty$, $\theta_2 = \infty$, согласно (1.46) с $\varphi_1 \equiv 1$, по той же формуле с

$$\varphi_1(t) = \left( \int_t^s \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)}^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{-1} dy \right)^{\frac{\theta_1'}{\theta_1}}$$

и, наконец, согласно (1.51') с $\theta_2 = \infty$ и

$$\varphi_2(s) = \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s)}^\infty \left( \int_{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}^s \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)}^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{-1} dy \right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(r)dr \right)^{\frac{1}{\theta_1'}}$$

получим, что

$$A_6 = \operatorname{ess\,sup}_{s>0} v_2(s) \left( \int_0^s \left( \int_t^s \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)}^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds \right)^{-1} dy \right)^{\theta_1'} v_1^{\theta_1}(t)dt \right)^{\frac{1}{\theta_1'}}$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{s>0} v_2(s)\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(s)}^{\infty}\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}^{s}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)}^{\infty} w_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{-1}dy\right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{\frac{1}{\theta_1'}}$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{z>0} w_2(z)z^{\frac{n}{p_2}}\left(\int\limits_{z}^{\infty}\left(\int\limits_{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}^{\mu_{n,\rho,p_1}(z)}\left(\int\limits_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)}^{\infty} w_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{-1}dy\right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{\frac{1}{\theta_1'}}$$

$$(y = \mu_{n,\rho,p_1}(u))$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{z>0}\ w_{2,n,p_2}(z)\left(\int\limits_{z}^{\infty}\left(\int\limits_{r}^{z}\left(\int\limits_{u}^{\infty} w_1(s)^{\theta_1}ds\right)^{-1}|(\mu_{n,\rho,p_1}(u))'|du\right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(r)dr\right)^{\frac{1}{\theta_1'}}$$

$$= cB_6,$$

где

$$c = \left(\int\limits_1^{\infty}\rho(t)t^{\frac{n}{p_1'}-1}dt\right)^{-1}.$$

(g) Если $\theta_1 = \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$, согласно формуле (1.46) с $\varphi_1 \equiv 1$ и формулу (1.51') с $\varphi_2(x) = \int\limits_0^x \frac{dy}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{r>\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)} w_1(r)}$ получим, что

$$A_7 = \left(\int\limits_0^{\infty}\left(v_2(x)\int\limits_0^x \frac{dy}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{r>\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)} w_1(r)}\right)^{\theta_2}dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$$

$$= \left(\int\limits_0^{\infty}\left(w_{2,n,p_2}(\tau)\int\limits_0^{\mu_{n,\rho,p_1}(\tau)} \frac{dy}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{r>\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)} w_1(r)}\right)^{\theta_2}d\tau\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$$

$$\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y) = z\right)$$

$$= c\left(\int\limits_0^{\infty}\left(w_{2,n,p_2}(\tau)\int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{\rho(z)z^{\frac{n}{p_1'}-1}}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z<r<\infty} w_1(r)}dz\right)^{\theta_2}d\tau\right)^{\frac{1}{\theta_2}} = cB_7.$$

(h) Если $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, то в $A_8$ согласно (1.55) и (1.37)

$$v_1(x) = w_1\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(x)\right),\ v_2(x) = w_2\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(x)\right)\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(x)\right)^{\frac{n}{p_2}}, x > 0.$$

Используя формулу (1.46) с $\psi_1 \equiv 1$ и выполнив следующие замены переменных: $y = \mu_{n,\rho,p_1}(z)$, $z > 0$, и, наконец, $t = \mu_{n,\rho,p_1}(\tau)$, $\tau > 0$, получим, что

$$A_8 = \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} \left( \int_0^t \frac{dy}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{s>\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(y)} w_1(s)} \right) w_2\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)\right) \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_1}(t)\right)^{\frac{n}{p_2}}$$

$$= c \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} \left( \int_{\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_2}(t)}^{\infty} \frac{\rho(z) z^{\frac{n}{p_1'}-1}}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{s>z} w_1(s)} dz \right) w_2\left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_2}(t)\right) \left(\mu^{(-1)}_{n,\rho,p_2}(t)\right)^{\frac{n}{p_2}}$$

$$= c \operatorname*{ess\,sup}_{\tau>0} \left( \int_{\tau}^{\infty} \frac{\rho(z) z^{\frac{n}{p_1'}-1}}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{z<s<\infty} w_1(s)} dz \right) w_{2,n,p_2}(\tau) = c B_8.$$

$\square$

**Замечание 1.9.1.** *При различных других предположениях относительно ядра* $\rho$ *для обобщенных потенциалов Рисса* $I_\rho$ *другие достаточные условия, обеспечивающие ограниченность обобщенного потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое были получены в работе [32]. В отличие от [32], достаточные условия в теореме 1.9.1 для определенной области значений числовых параметров совпадают с необходимыми.*

## 1.10 Обобщенный потенциал Рисса с ядром $\rho(t) = t^{\alpha-n}(1 + |\ln t|)^\beta$

**Лемма 1.10.1.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\beta < 0$, $1 \leqslant p_1 < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p_1}$, $0 < p_2 \leqslant \infty$, *причём при* $p_2 > p_1$ $n\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}\right) < \alpha < \frac{n}{p_1}$, *и*

$$\rho(t) = t^{\alpha-n}(1 + |\ln t|)^\beta.$$

*Тогда* $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$ *и при* $p_1 = 1$ $\sigma = \tilde{S}_{n,1,p_2}$.

*Доказательство.* Докажем, что выполняются условия 1) - 8) определения 1.6.2 с $\tilde{\rho}(t) = \rho(t)$.

Условия 2) - 4) следуют из того, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $c_{1\varepsilon} > 0$, $c_{2\varepsilon} > 0$ такие, что

$$1 + |\ln t| \leqslant c_{1\varepsilon} t^{-\varepsilon}, \text{ если } 0 < t \leqslant 1. \tag{1.59}$$

Условие 2) справедливо для любых $0 < \alpha < n$. Условие 3) ($\rho \in S_n$) доказано в разделе 1.4 (пример 4).

Расходимость первого интеграла в условии 4) следует из неравенства 1.59, так как

$$\int_0^1 \rho(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt = \int_0^1 t^{\alpha - \frac{n}{p_1} - 1} (1 + |\ln t|)^{\beta} dt$$

$$\geqslant c_{1\varepsilon}^{\beta} \int_0^1 t^{\alpha - \frac{n}{p_1} - \varepsilon\beta^1} dt = \infty,$$

если $\varepsilon < \frac{n}{p}(\alpha - \frac{n}{p_1})$, поскольку $\beta < 0$ и $\alpha < \frac{n}{p_1}$. Сходимость второго интеграла в условии 4) следует так как $\int_1^\infty t^{\alpha - \frac{n}{p_1} - 1} dt < \infty$.

Условие 5) следует из того, что при $\beta < 0$

$$\frac{|\rho'(t)| t}{\rho(t)} = \left| \alpha - n + \frac{\beta}{1 + |\ln t|} \right| = n - \alpha + \frac{|\beta|}{1 + |\ln t|} \geqslant n - \alpha.$$

Условие 6) следует из того, что функция

$$\gamma_1(r) = \frac{\int_0^r \rho(t) t^{n-1} dt}{\rho(r) r^n} = \frac{\int_0^r t^{\alpha-1}(1 + |\ln t|)^{\beta} dt}{r^{\alpha}(1 + |\ln t|)^{\beta}}$$

положительна и непрерывна на $(0,\infty)$ и согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{r\to 0^+} \gamma(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} \gamma(r) = \frac{1}{\alpha}$.

Условие 7) означает, что

$$A = \max_{0<t_1<t_2<\infty} \frac{\rho(t_1) t_1^{n\left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2}\right)}}{\rho(t_2) t_2^{n\left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2}\right)}} = \max_{0<t_1<t_2<\infty} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\alpha - n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)} \left(\frac{1 + |\ln t_2|}{1 + |\ln t_1|}\right)^{|\beta|} < \infty.$$

Заменяя $t_2$ на $\sigma t_1$ с $\sigma > 1$, получим, что

$$A = \max_{1<\sigma<\infty} \sigma^{n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) - \alpha} \max_{0<t_1<\infty} \left(\frac{1 + |\ln\sigma + \ln t_1|}{1 + |\ln t_1|}\right)^{|\beta|}.$$

Так как

$$\max_{1<t_1<\infty} \left(\frac{1 + |\ln\sigma + \ln t_1|}{1 + |\ln t_1|}\right)^{|\beta|} = (1 + \ln\sigma)^{|\beta|},$$

то

$$A = \max_{1<\sigma<\infty} \sigma^{n\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)-\alpha}(1+\ln\sigma)^{|\beta|}.$$

откуда следует, что $A < \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha > n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right)$.

Условие 8) справедливо, только если $\alpha > n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$, и доказывается аналогично условию 6), используя функцию

$$\gamma_2(r) = \frac{\int_0^r \rho^{p_2}(t)t^{n-1}dt}{\rho^{p_2}(t)r^n} = \frac{\int_0^r t^{(\alpha-n)p_2+n-1}(1+|\ln t|)^{\beta p_2}dt}{r^{(\alpha-n)p_2+n}(1+|\ln t|)^{\beta p_2}},$$

для которой

$$\lim_{r\to 0^+}\gamma_2(r) = \lim_{r\to+\infty}\gamma_2(r) = \frac{1}{(\alpha-n)p_2+n}.$$

Таким образом, если $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$ и $n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) < \alpha < \frac{n}{p_1}$, то выполнены условия 1) - 5), 7) и 8). Выполнение условия 6) не требуется.) Если же $0 < p_2 \leqslant p_1$, $1 \leqslant p_1 < \infty$, то выполнены условия 1) - 6). (Выполнение условий 7) и 8) не требуется.) $\square$

**Лемма 1.10.2.** *В преположениях леммы 1.10.1*

$$\mu_{n,\rho,p_1}(r) \approx r^{\alpha-\frac{n}{p_1}}(1+|\ln +|)^{\beta} = r^{\frac{n}{p_1'}}\rho(r)$$

*равномерно по* $r > 0$.

*Доказательство.* Функция $\frac{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}{r^{\frac{n}{p_1'}}\rho(r)}$ положительна и непрерывна на $(0,\infty)$, поэтому утверждение леммы следует из того, что согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}{r^{\frac{n}{p_1'}}\sigma(r)} = \lim_{r\to\infty}\frac{\int_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p_1}-1}(1+|\ln t|)^\beta dt}{r^{\alpha-\frac{n}{p}}(1+|\ln t|)^\beta} =$$

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{r^{\alpha-\frac{n}{p_1}-1}(1+|\ln r|)^\beta}{r^{\alpha-\frac{n}{p_1}-1}(1+|\ln r|)^\beta\left((\alpha-\frac{n}{p})+(\beta-1)(1+|\ln r|)^{-1}\right)} =$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\left(\alpha-\frac{n}{p}\right)+(\beta-1)(1+|\ln r|)^{-1}} = \frac{1}{\frac{n}{p_1-\alpha}}.$$

и также

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\mu_{n,\rho,p_1}(r)}{r^{\frac{n}{p_1'}}\sigma(r)} = \frac{1}{\frac{n}{p_1}-\alpha}.$$

$\square$

**Следствие 1.10.1.** *Пусть выполнены предложения теоремы 1.9.1 относительно числовых параметров* $\theta_1,\theta_2, p_1,p_2$ *и функций* $w_1,w_2$. *Пусть, кроме того* $\beta < 0$, $0 < \alpha < \frac{n}{p_1}$, *причём при* $p_2 > p_1$ $n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) < \alpha < \frac{n}{p_1}$ *и*

$$\rho(t) = t^{\alpha-n}(1 + |\ln|)^{\beta}.$$

*Тогда для обобщенного потенциала Рисса* $I_{\rho(.)}$ *справедливы все утверждения теоремы 1.9.1, в которых функция* $\mu_{n,\rho,p_1}(r)$ *заменена на функцию* $r^{\frac{n}{p_1'}}\rho(r)$.

*Доказательство.* Согласно лемме 1.10.1 $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$ при $1 < p_1 < \infty$, $0 < p_2 < \infty$ и $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$ при $0 < p_2 < \infty$. Кроме того, условия $B_{11} < \infty$, $B_{12} < \infty$, $B_2 < \infty$, $B_{31} < \infty$, $B_{32} < \infty$, $B_{41} < \infty$, $B_{42} < \infty$ эквивалентны условиям, получаемых из них при замене функции $\mu_{n,\rho,p_1}(r)$ на эквивалентную ей равномерно по $r > 0$ функцию $r^{\frac{n}{p_1'}}\rho(r)$. $\square$

# Глава 2. Точные оценки норм обобщенных операторов Римана-Лиувилля, действующих из одного пространства типа Морри в другое

## 2.1 Ограниченность одномерного оператора Римана-Лиувилля в пространствах Морри

Оператор Римана-Лиувилля порядка $\alpha$ определяется следующим образом:

Пусть $0 < \alpha < 1$

$$I_{0_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

В одномерном случае Z. Fu, J. Trujillo и Q. Wu в [23] доказали следующую теорему об ограниченности оператора Римана-Лиувилля из одного пространства Морри в другое.

**Теорема 2.1.1.** *Пусть* $1 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ *и* $0 \leqslant \lambda$, $\mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{p}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{q}$, $0 < T < \infty$. *Тогда оператор* $I_{0_+}^{\alpha}$ *ограничен из* $M_p^{\lambda}(0,T)$ *в* $M_q^{\mu}(0,T)$.

Целью второй главы является обобщение этого результата на многомерный случай, расширение диапазона допустимых числовых параметров, а также получение точных оценок норм оператора в изотропном случае (в зависимости от диаметра параллелепипеда), и в анизотропном случае (в зависимости от длин ребер параллелепипеда).

Излагаемые ниже полученные в этом направлении результаты частично опубликованы в [42], [43].

## 2.2 Ограниченность многомерного оператора Римана-Лиувилля в пространствах Морри

Многомерный оператор Римана-Лиувилля определяются следующим образом.

**Определение 2.2.1.** *Левосторонний многомерный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля* $I_{a_+}^{\alpha}$ *порядка* $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1,...,n, a = (a_1,\ a_2,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$, *определяется следующим образом:*

$$\left(I_{a_+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)} \int_{a_n}^{x_n} ... \int_{a_1}^{x_1} \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i - t_i)^{\alpha_i - 1}\right) f(t_1,...,t_n) dt_1...dt_n \tag{2.1}$$

*для всех* $x = (x_1,...,x_n)\ \mathbb{R}^n$ *таких, что* $x_i > a_i$, $i = 1,..,n$, *где* $\Gamma$ *- гамма-функция Эйлера.*

Аналогично определяется правосторонний многомерный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n),\alpha_i > 0,$:

$$\left(I_{b_-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)} \int_{x_n}^{b_n} ... \int_{x_1}^{b_1} \prod_{i=1}^{n} (t_i - x_i)^{\alpha_i - 1} f(t_1...t_n) dt_1...dt_n$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_i < b_i$, $i = 1,...,n$.

**Лемма 2.2.1.** *Пусть* $0 < p \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$. *Тогда*

$$\| f \|_{L_p(Q(a,y))} \leqslant |y - a|^{\lambda} \| f \|_{M_p^{\lambda}(Q(a,b))} \tag{2.2}$$

*для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и для всех* $y \in Q(a,b)$.

*Доказательство.* Пусть $y \in Q(a,b)$ и $0 < \varepsilon < min\{y_1 - a_1,...,y_n - a_n\}$, тогда $a + \varepsilon = (a_1 + \varepsilon,..., a_n + \varepsilon) \in Q(a,y)$ и для любого $z \in Q(a,y)$

$$|(a + \varepsilon) - z| < \text{ diam } Q(a,y) = |y - a|.$$

Следовательно, $Q(a,y) \subset B(a+\varepsilon,|y-a|)$ и для любого $y \in Q(a,b)$

$$\| f \|_{M_p^\lambda(Q(a,b))} = \sup_{x\in Q(a,b), r>0} r^{-\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r)\bigcap Q(a,b))}$$

$$\geqslant r^{-\lambda} \| f \|_{L_p\left(B(x,r)\bigcap Q(a,b)\right)} \Big|_{x=a+\varepsilon, r=|y-a|}$$

$$= |y-a|^{-\lambda} \| f \|_{L_p(Q(a,y)\bigcap Q(a,b)}$$

$$= |y-a|^{-\lambda} \| f \|_{L_p(Q(a,y))} ,$$

откуда следует равенство (2.2). □

**Теорема 2.2.1.** *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q}$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$, $i = 1,...,n$. *Тогда существует* $C_1 > 0$ *такое, что*

$$\| I_{a_+}^\alpha f \|_{M_q^\mu(Q(a,b))} \leqslant C_1 \mid b-a \mid^\nu \| f \|_{M_p^\lambda(Q(a,b))}, \tag{2.3}$$

*где*

$$\nu = \lambda + \alpha_1 + ... + \alpha_n - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \mu, \tag{2.4}$$

*для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и для всех* $f \in M_p^\lambda(Q(a,b))$.

*Показатель степени* $\nu$ *не может быть заменен никаким другим.*

*Доказательство.*

Шаг 1. Предположим, что $f \in M_p^\lambda(Q(a,b))$ и $y \in B(x,r)\bigcap Q(a,b) \neq \varnothing, i = 1,...,n$.

Применяя неравенство Гёльдера, получаем, что

$$\left|I_{a_+}^\alpha f(y)\right| = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \left| \int_{a_n}^{y_n} ... \int_{a_1}^{y_1} (y_1-t_1)^{\alpha_1-1} ... (y_n-t_n)^{\alpha_n-1} f(t_1,...,t_n) dt_1...dt_n \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \| f \|_{L_p(Q(a,y))} \left( \int\limits_{a_n}^{y_n} ... \int\limits_{a_1}^{y_1} (y_1-t_1)^{(\alpha_1-1)\frac{p}{p-1}} ... (y_n-t_n)^{(\alpha_n-1)\frac{p}{p-1}} dt_1...dt_n \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \| f \|_{L_p(Q(a,y))} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i p - 1}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}-1} (y_i-a_i)^{\alpha_i - \frac{1}{p}} .$$

Таким образом,

$$\left|\left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(y)\right| \leqslant C_2 \parallel f \parallel_{L_p(Q(a,y))} \prod_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^{\alpha_i-\frac{1}{p}},$$

где

$$C_2 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i p-1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}-1}.$$

С помощью (2.2) мы получим, что

$$\left|\left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(y)\right| \leqslant C_2 \mid y-a\mid^{\tilde{\lambda}} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))} \leqslant C_2 \mid b-a\mid^{\tilde{\lambda}} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))},$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda + \alpha_1 + ... + \alpha_n - \frac{n}{p}$.

Таким образом,

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))} \leqslant C_2 \mid b-a\mid^{\tilde{\lambda}} \parallel 1 \parallel_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))}.$$

Воспользуемся следующими неравенствами

$$\parallel 1 \parallel_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))} \leqslant \begin{cases} v_n^{\frac{1}{q}} r^{\frac{n}{q}} & \text{если } 0<r<|b-a| \\ |b-a|^{\frac{n}{q}} & \text{если } r \geqslant |b-a|, \end{cases}$$

где $v_n$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Далее мы выделяем два случая:

1) Если $r<|b-a|$, то

$$\begin{aligned} r^{-\mu} \parallel I^{\alpha}_{a+}f \parallel_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b)} &\leqslant C_2C_3 \mid b-a\mid^{\tilde{\lambda}} r^{-\mu+\frac{n}{q}} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}Q(a,b)} \\ &\leqslant C_2C_3 \mid b-a\mid^{\tilde{\lambda}} |b-a|^{\frac{n}{q}-\mu} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}Q(a,b)} \\ &= C_2C_3|b-a|^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{q}-\mu} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}Q(a,b)}, \end{aligned}$$

где $C_3 = max(v_n,1)^{\frac{1}{q}}$.

Следовательно,

$$\sup_{x\in Q(a,b),\ 0<r<|b-a|} r^{-\mu}\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{L_q(B(x,r)\bigcap(Q(a,b))} \leqslant C_1|b-a|^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{q}-\mu} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))}, \tag{2.5}$$

где $C_1 = C_2C_3$.

2) Если $r \geqslant |b-a|$, то

$$r^{-\mu}\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))} \leqslant C_2|b-a|^{\tilde{\lambda}} r^{-\mu} \parallel f \parallel_{M^{\lambda}_p(Q(a,b))}$$
$$\leqslant C_2 \mid b-a\mid^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{q}-\mu}\parallel f\parallel_{M^{\lambda}_p(Q(a,b))} .$$

Таким образом,

$$\sup_{x\in Q(a,b),\ |b-a|\leqslant r} r^{-\mu}\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))}$$
$$\leqslant C_2|b-a|^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{q}-\mu}\parallel f\parallel_{M^{\lambda}_p Q(a,b)} . \tag{2.6}$$

Следовательно, с помощью (2.5) и (2.6) мы получаем неравенство (2.3), поскольку

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{M^{\mu}_q(Q(a,b))} =$$
$$= max\left\{\sup_{x\in Q(a,b),0<r<|b-a|} r^{-\mu}\parallel f\parallel_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))} , \sup_{x\in Q(a,b),r\geqslant|b-a|} r^{-\mu}\parallel f\parallel_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))}\right\}.$$

Шаг 2. Далее предположим, что оператор $I^{\alpha}_{a+}$ ограничен из $M^{\lambda}_p(Q(a,b))$ в $M^{\mu}_q(Q(a,b))$, то есть для некоторого $C_4(a,b)>0$

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{M^{\mu}_q(Q(a,b))} \leqslant C_4(a,b)\parallel f\parallel_{M^{\lambda}_p(Q(a,b))} \tag{2.7}$$

для всех $f\in M^{\lambda}_p(Q(a,b))$.

Пусть здесь $f\equiv 1$ и $b_1-a_1=b_2-a_2=...=b_n-a_n$. Тогда

$$\parallel 1\parallel_{M^{\lambda}_p Q(a,b)} = \sup_{x\in Q(a,b),\ r>0} r^{-\lambda}\parallel 1\parallel_{L_p(Q(a,b)\bigcap B(x,r))}$$

$$= \sup_{x\in Q(a,b),\ r>0} r^{-\lambda}\left|B(x,r)\bigcap Q(a,b)\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant max\left\{\sup_{x\in Q(a,b),0<r<|b-a|} r^{-\lambda}\left|B(x,r)\right|^{\frac{1}{p}}, \sup_{x\in Q(a,b),\ r\geqslant|b-a|} r^{-\lambda}\left|Q(a,b)\right|^{\frac{1}{p}}\right\}$$
$$= max\left\{v_n^{\frac{1}{p}}\sup_{0<r\leqslant|b-a|} r^{-\lambda+\frac{n}{p}}, |b-a|^{-\lambda+\frac{n}{p}}\right\} = C_5\,|b-a|^{-\lambda+\frac{n}{p}} ,$$

где $C_5 = max\left\{v_n^{\frac{1}{p}},1\right\}$. Кроме того,

$$\left\|I_{a_+}^{\alpha}(1)\right\|_{M_q^{\mu}Q(a,b)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)}\sup_{x\in Q(a,b),\ r>0} r^{-\mu}\left\|\prod_{i=1}^{n}\frac{(y_i-a_i)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right\|_{L_q(Q(a,b)\bigcap B(x,r))}$$

$$\geqslant \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Gamma(\alpha_i)}r^{-\mu}\left\|\prod_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^{\alpha_i}\right\|_{L_q(Q(a,b)\bigcap B(x,r))}\Bigg|_{x=a+\varepsilon,r=|b-a|}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Gamma(\alpha_i)}|b-a|^{-\mu}\left\|\prod_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^{\alpha_i}\right\|_{L_q(Q(a,b)\bigcap B(a+\varepsilon,|b-a|))},$$

где $0<\varepsilon<min\{b_1-a_1,\ldots,b_n-a_n\}$.

Согласно доказательству леммы 2.2.1, мы имеем $Q(a,b)\subset B(a+\varepsilon,|b-a|)$. Следовательно

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^{\alpha_i}\right\|_{L_q(Q(a,b)\bigcap B(a+\varepsilon,|b-a|))} = \left\|\prod_{i=1}^{n}(y_i-a_i)^{\alpha_i}\right\|_{L_q(Q(a,b))}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_i q+1)^{\frac{1}{q}}}(b_i-a_i)^{\alpha_i+\frac{1}{q}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_i q+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|b-a|}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}}$$

$$= C_6|b-a|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}},$$

где $C_6 = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_i q+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}}$. Таким образом

$$\left\|I_{a_+}^{\alpha}1\right\|_{M_q^{\mu}(Q(a,b))} \geqslant C_7|b-a|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}-\mu},$$

где

$$C_7 = C_6\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i\Gamma(\alpha_i)}.$$

Из (2.6) следует, что

$$C_7|b-a|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}-\mu} \leqslant C_4(a,b)C_5|b-a|^{-\lambda+\frac{n}{p}},$$

следовательно

$$C_4(a,b) \geqslant \frac{C_7}{C_5}|b-a|^{\nu}.$$

$\square$

**Замечание 2.2.1.** *По сравнению с теоремой 2.1.1, рассмотрен многомерный случай. Кроме того, в отличие от [23], установлена точная зависимость точной постоянной в неравенстве (2.3) от диаметра параллелепипеда.*

**Замечание 2.2.2.** *Аналогичным образом можно получить результаты для правостороннего многомерного дробно-интегрального оператора Римана-Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $i = 1, \dots, n$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$.*

**Лемма 2.2.2.** *Пусть $0 < p < \infty, 0 \leqslant \mu < \lambda \leqslant \frac{n}{p}$. Тогда*

$$\| f \|_{M_p^{\mu}(Q(a,b))} \leqslant |b-a|^{\lambda-\mu} \| f \|_{M_p^{\lambda}(Q(a,b))} \tag{2.8}$$

*для всех конечных параллелепипедов $Q(a,b)$ и для всех $f \in M_p^{\lambda}(Q(a,b))$.*

*Доказательство.* Применяя неравенство (2.2), мы получим, что

$$r^{-\mu} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} \leqslant r^{-\mu} \| f \|_{L_p(Q(a,b))} \leqslant r^{-\mu} |b-a|^{\lambda} \| f \|_{M_p^{\lambda}(Q(a,b))} .$$

$$\sup_{r \geqslant |b-a|} r^{\lambda-\mu} r^{-\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} \leqslant |\, b-a \,|^{\lambda-\mu} \sup_{r \geqslant |b-a|} r^{-\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} =$$
$$= |\, b-a \,|^{\lambda-\mu} \| f \|_{M_p^{\lambda}(Q(a,b))},$$

значит,

$$\| f \|_{M_p^{\mu}(Q(a,b))} =$$
$$max \left\{ \sup_{r \geqslant |b-a|} r^{-\mu} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} , \sup_{r < |b-a|} r^{-\mu} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} \right\} =$$
$$\max \left\{ \sup_{r \geqslant |b-a|} r^{-\lambda-\mu} r^{\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))}, \sup_{r < |b-a|} r^{-\mu} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} \right\}$$
$$\leqslant max \left\{ |\, b-a \,|^{\lambda-\mu} \sup_{r \geqslant |b-a|} r^{-\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))}, |b-a|^{\lambda-\mu} \sup_{r < |b-a|} r^{-\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))} \right\}$$
$$= max \left\{ |b-a|^{\lambda-\mu} \| f \|_{M_p^{\lambda}(Q(a,b))} , |b-a|^{\lambda-\mu} \| f \|_{M_p^{\lambda}(Q(a,b))} \right\} .$$
$$= |b-a|^{\lambda-\mu} \| f \|_{M_p^{\mu}(Q(a,b))} .$$

$\square$

**Лемма 2.2.3.** *Пусть* $0 < p < q \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$. *Тогда*

$$\| f \|_{M_p^\lambda(Q(a,b))} \leqslant |b-a|^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \| f \|_{M_q^\lambda(Q(a,b))} \tag{2.9}$$

*для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и для всех* $f \in M_p^\lambda(Q(a,b))$.

*Доказательство.* Если $0 < p < q \leqslant \infty$, $E$ - измеримое по Лебегу множество, $|E| < \infty$, то по неравенству Гельдера

$$\| f \|_{L_p(E)} \leqslant |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \| f \|_{L_q(E)} \ . \tag{2.10}$$

Применяя (2.10), мы получаем

$$\sup_{x \in Q(a,b),\ r>0} r^{-\lambda} \| f \|_{L_p(B(x,r) \bigcap Q(a,b))}$$

$$\leqslant |b-a|^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sup_{x \in Q(a,b),\ r>0} r^{-\lambda} \| f \|_{L_q(B(x,r) \bigcap Q(a,b))}$$

откуда следует неравенство (2.9). □

Для усеченных сверток нам понадобится следующий вариант неравенства Юнга (подробнее см. [19]).

**Лемма 2.2.4.** *Пусть* $A,B \subset \mathbb{R}^n$ *- измеримые по Лебегу множества,*

$$1 \leqslant p, \rho \leqslant s \leqslant \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{s} + 1. \tag{2.11}$$

*Если* $f \in L_p(B)$,

$$\sup_{t \in B} \| \varphi \|_{L\rho(A-t)} < \infty, \ \sup_{y \in A} \| \varphi \|_{L\rho(y-B)} < \infty,$$

*то интеграл* $\int_B \varphi(y-t) f(t) dt$ *конечен для почти всех* $y \in A$ *и*

$$\left\| \int_B \varphi(y-t) f(t) dt \right\|_{L_s(A)} \leqslant \sup_{t \in B} \| \varphi \|_{L_\rho(A-t)}^{\frac{\rho}{s}} \sup_{y \in A} \| \varphi \|_{L_\rho(y-B)}^{1-\frac{\rho}{s}} \| f \|_{L_p(B)} \ . \tag{2.12}$$

**Теорема 2.2.2.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant s < \infty$, $0 < q \leqslant s$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{s} < \alpha_i < 1, i = 1,\ldots,n$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$,

$$0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q} - \frac{p(n - \alpha_1 \ldots - \alpha_n)}{p + s(p-1)}, \tag{2.13}$$

*тогда существует* $C_8 > 0$ *такое, что*

$$\left\| I^{\alpha}_{a+} f \right\|_{M^{\mu}_q(Q(a,b))} \leqslant C_8 \mid b - a \mid^{\nu} \| \, f \, \|_{M^{\lambda}_p(Q(a,b))}, \tag{2.14}$$

*где* $\nu > 0$ *определяется по формуле (2.4) для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и для всех* $f$ $M^{\lambda}_p(Q(a,b))$.

*Показатель* $\nu$ *не может быть заменен никаким другим.*

*Доказательство.* Обратим внимание, что правая часть неравенства (2.13) положительна и что из неравенства (2.13) следует, что $0 \leqslant \mu < \frac{n}{q}$. Пусть число $\rho$ определяется равенством (2.11), тогда неравенство (2.13) можно переписать в виде

$$0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q} - \frac{n}{s} + \frac{\rho}{s}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \frac{n}{s} - \frac{n}{p}\right). \tag{2.15}$$

Требуется доказать неравенство (2.14). Доказательство того, что $\nu$ не может быть заменено никаким другим, такое же, как и в теореме 2.2.1.

Пусть

$$\varphi_i(\tau_i) = \begin{cases} \tau_i^{\alpha_i - 1}, & 0 < \tau_i < b_i - a_i\,, \\ 0 & \tau_i \geqslant b_i - a_i\,, \end{cases}$$

$i = 1,\ldots,n, \varphi(\tau) = \varphi_1(\tau_1)\ldots\varphi_n(\tau_n), \tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда для всех $y \in Q(a,b)$

$$\begin{aligned} \left(I^{\alpha}_{a+} f\right)(y) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_{a_n}^{y_n} \ldots \int_{a_1}^{y_1} \varphi_1(y_1 - t_1)\ldots\varphi_n(y_n - t_n) f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_{Q(a,y)} \varphi(y-t)f(t)dt. \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_{Q(a,b)} \varphi(y-t)f(t)dt, \end{aligned}$$

так как $\varphi(y-t)=0$ for $t\in Q(a,b)\setminus Q(a,y)$.

Пусть

$$K=\left\|\int_{Q(a,b)}\varphi(y-t)f(t)dt\right\|_{L_s(B(x,r)\bigcap Q(a,b))}.$$

Согласно (2.11),

$$K\leqslant \sup_{t\in Q(a,b)}\|\ \varphi\ \|^{\frac{\rho}{s}}_{L_\rho(B(x,r)\bigcap Q(a,b)-t)}\sup_{y\in B(x,r)\bigcap Q(a,b)}\|\ \varphi\ \|^{1-\frac{\rho}{s}}_{L_\rho(y-Q(a,b))}\|\ f\ \|_{L_p(Q(a,b))}\ . \tag{2.16}$$

$$\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(y-Q(a,b))}\leqslant\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(\mathbb{R}^n)}=\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(Q(0,b-a))}\ ,$$

$$\sup_{y\in B(x,r)\bigcap Q(a,b)}\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(y-Q(a,b))}\leqslant\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(Q(0,b-a))}\ ,$$

$$\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(Q(0,b-a))}=\left(\int_0^{b_n-a_n}...\int_0^{b_1-a_1}\tau_1^{(\alpha_1-1)\rho}...\tau_n^{(\alpha_n-1)\rho}d\tau_1...d\tau_n\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$=\prod_{i=1}^n\Big((\alpha_i-1)\rho+1\Big)^{-\frac{1}{\rho}}(b_i-a_i)^{\alpha_i+\frac{1}{\rho}-1}\leqslant C_9|b-a|^{\alpha_1+...+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p}}, \tag{2.17}$$

где $\quad C_9=\prod_{i=1}^n\Big((\alpha_i-1)\rho+1\Big)^{-\frac{1}{\rho}}$.

1) Если $r\geqslant\mid b-a\mid$,

$$\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(B(x,r)\bigcap Q(a,b)-t)}\leqslant\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(\mathbb{R}^n)}=\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(Q(0,b-a))}\ .$$

Следовательно,

$$K\leqslant\|\ \varphi\ \|^{\frac{\rho}{s}}_{L_\rho(Q(0,b-a))}\|\ \varphi\ \|^{1-\frac{\rho}{s}}_{L_\rho(Q(0,b-a))}\|\ f\ \|_{L_p(Q(a,b))}$$

$$=\|\ \varphi\ \|_{L_\rho(Q(0,b-a))}\|\ f\ \|_{L_p(Q(a,b))}$$

$$\leqslant C_9|b-a|^{\alpha_1+...+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p}}\ \|\ f\ \|_{L_p(Q(a,b))}\ .$$

Исходя из неравенства (2.2), получим, что

$$\sup_{x\in Q(a,b), r\geqslant |b-a|} r^{-\mu} K \leqslant C_9 \mid b-a \mid^{\lambda+\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p}-\mu} \| f \|_{M_p^\lambda(Q(a,b))} . \qquad (2.18)$$

2) Если $0 < r <\mid b-a\mid$,

$$\| \varphi \|_{L_\rho(B(x,r)\bigcap Q(a,b)-t)} \leqslant \| \varphi \|_{L_\rho(B(x,r)-t)} = \| \varphi \|_{L_\rho(B(x-t,r))}$$

$$\leqslant \| \varphi \|_{L_\rho(B(0,2r))} \leqslant \| \varphi \|_{L_\rho(Q(0,2r))} .$$

Таким образом,

$$\|\varphi\|_{L_\rho(B(x,r)\bigcap Q(a,b)-t)} \leqslant \| \varphi \|_{L_\rho(Q(0,2r))},$$

$$\|\varphi\|^{\frac{\rho}{s}}_{L_\rho(Q(0,2r))} = \left[\int_0^{2r} \ldots \int_0^{2r} \varphi_n^\rho(\tau_n)\ldots\varphi_1^\rho(\tau_1) d\tau_n \ldots d\tau_1\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^{2r} \tau_n^{(\alpha_n-1)\rho} d\tau_n\right]^{\frac{1}{s}} \ldots \left[\int\limits_0^{2r} \tau_1^{(\alpha_1-1)\rho} d\tau_1\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$= C_9^{\frac{\rho}{s}} \prod_{i=1}^n 2^{\frac{1}{s}[(\alpha_i-1)\rho+1]} r^{\frac{1}{s}[(\alpha_i-1)\rho+1]} = C_{10} r^{\frac{1}{s}((\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\rho-n\rho+n)}, \qquad (2.19)$$

где

$$C_{10} = C_9^{\frac{\rho}{s}} \prod_{i=1}^n 2^{\frac{1}{s}[(\alpha_i-1)\rho+1]}.$$

Применяя неравенства (2.16) и (2.17), мы получим, что

$$r^{-\mu} K \leqslant$$

$$\leqslant C_9^{1-\frac{\rho}{s}} C_{10} |b-a|^{(1-\frac{\rho}{s})(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p})} r^{\frac{\rho}{s}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p})-\mu} \parallel f \parallel_{L_p(Q(a,b))}, \qquad (2.20)$$

поскольку $\frac{\rho}{s}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p}) \geqslant \mu$, тогда

$$r^{-\mu} K \leqslant C_{10} C_9^{1-\frac{\rho}{s}} |b-a|^{(1-\frac{\rho}{s})(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p})+\frac{\rho}{s}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p})-\mu}.$$

С, помощью (2.2), получим

$$r^{-\mu}K \leqslant$$

$$\leqslant C_9^{1-\frac{\rho}{s}} C_{10} |b-a|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p}+\lambda-\mu} \parallel f \parallel_{M_p^\lambda(Q(a,b))} .$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in Q(a,b),\ 0<r<|b-a|} r^{-\mu}K \leqslant C_8 \mid b-a \mid^{\lambda+\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p}-\mu} \parallel f \parallel_{M_p^\lambda(Q(a,b))}, \tag{2.21}$$

где $C_8 = C_9^{1-\frac{\rho}{s}} C_{10}$.

Неравенство (2.14) с $q=s$ следует из (2.16) и (2.18):

$$\left\| I_{a_+}^{\alpha} f \right\|_{M_s^\mu(Q(a,b))} \leqslant C_8 \mid b-a \mid^{\gamma} \parallel f \parallel_{M_p^\lambda(Q(a,b))} \tag{2.22}$$

где $\gamma = \lambda + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \frac{n}{s} - \frac{n}{p} - \mu$.

Далее, пусть $0 < q < s \leqslant \infty$ и

$$L = \left\| \int_{Q(a,b)} \varphi(y-t) f(t) dt \right\|_{L_q(B(x,r)\bigcap Q(a,b))} .$$

С помощью (2.10) мы получим, что

$$L \leqslant \mid B(x,r) \cap Q(a,b) \mid^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} K. \tag{2.23}$$

1) если $r \geqslant |b-a|$, тогда из (2.22) следует

$$r^{-\mu}L \leqslant |Q(a,b)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} r^{-\mu}K \leqslant |b-a|^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{s})} r^{-\mu}K. \tag{2.24}$$

Согласно (2.16), мы имеем

$$\sup_{x\in Q(a,b), r\geqslant |b-a|} r^{-\mu}L \leqslant C_9 |b-a|^{\lambda+\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}-\mu} \parallel f \parallel_{M_p^\lambda(Q(a,b))} . \tag{2.25}$$

2) Если $r < |b-a|$, то по (2.20) получим

$$r^{-\mu}L \leqslant v_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} C_9^{1-\frac{\rho}{s}} C_{10} |b-a|^{(1-\frac{\rho}{s})(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p})} r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{s})} r^{\frac{\rho}{s}(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{s}-\frac{n}{p})-\mu} \parallel f \parallel_{L_p(Q(a,b))} .$$

Согласно (2.15)

$$\frac{n}{q} - \frac{n}{s} + \frac{\rho}{s}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \frac{n}{s} - \frac{n}{p}) - \mu \geqslant 0,$$

следовательно,

$$r^{-\mu} L \leqslant v_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} C_9^{1-\frac{\rho}{s}} C_{10} |b-a|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}-\mu} \parallel f \parallel_{L_p(Q(a,b))} .$$

Применяя неравенство (2.2), получим, что

$$\sup_{x \in Q(a,b), 0<r<|b-a|} r^{-\mu} L \leqslant v_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} C_9^{1-\frac{\rho}{s}} C_{10} |b-a|^{\lambda+\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}-\mu} \parallel f \parallel_{M_p^\lambda(Q(a,b))} . \tag{2.26}$$

Тогда неравенство (2.14) следует для любого $0 < q < s$.

$\square$

**Замечание 2.2.3.** *Кроме того, что в теореме 2.2.2 рассмотрен многомерный случай, рассмотрен более широкий диапазон числовых параметров. Как и в теореме 2.2.1, получена точная оценка нормы многомерного оператора Римана-Лиувилля в зависимости от диаметра параллелепипеда.*

Теорема 2.2.2 была опубликована в статье [42].

## 2.3 Ограниченность обобщенного оператора Римана-Лиувилля в локальных пространствах Морри

**Определение 2.3.1.** *Пусть* $f \in L_p(\Omega)$, *где* $0 < p \leqslant \infty$, $\overline{k} = (k_1,\ldots,k_n)$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$. *Обобщенный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля* $I^{\overline{\alpha},\overline{k}} f$ *порядка* $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$, *определяется следующим образом*

$$\left(I_{a_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f\right)(x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{(k_i+1)^{1-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_{a_n}^{x_n} \dots \int_{a_1}^{x_1} \prod_{i=1}^{n} \left[(x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1})^{\alpha_i-1} t_i^{k_i}\right] f(t_1,\dots,t_n) dt_1 \dots dt_n \tag{2.27}$$

**Замечание 2.3.1.** *Если $k_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\overline{k} = 0$ в определении 2.3.1; мы получаем обычный интегральный оператор Римана-Лиувилля, определяемый формулой (2.1).*

**Определение 2.3.2.** *Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $\lambda > 0$, если $p < \infty$, если $p = \infty$, $\lambda \geqslant 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество, $x_0 \in \bar{\Omega}$. Говорят, что функция $f$ принадлежит локальному пространству Морри $LM^{\lambda}_{p,x_0}(\Omega)$, если $f$ измерима по Лебегу на $\Omega$ и*

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,x_0}(\Omega)} = \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(\Omega \bigcap B(x_0,r))} < \infty.$$

*Мы будем часто пользоваться определением, когда $x_0 = 0$. Будем для краткости обозначать $LM^{\lambda}_{p,0}(\Omega)$ через $LM^{\lambda}_{p}(\Omega)$.*

**Лемма 2.3.1.** *Пусть $0 < p \leqslant \infty$, $\lambda \geqslant 0$. Тогда*

$$\| f \|_{L_p(Q(a,y))} \leqslant |y-a|^{\lambda} \| f \|_{LM^{\lambda}_{p}(Q(a,b))} \tag{2.28}$$

*для всех конечных параллелепипедов $Q(a,b)$ и для всех $y \in Q(a,b)$.*

*Доказательство.* Досстаточно рассмотреть случай $a = 0$. Пусть $y \in Q(0,b)$. Для любого $z \in Q(0,y)$

$$|z| < \text{ diam } Q(0,y) = |y|.$$

Следовательно, $Q(0,y) \subset B(0,|y|)$.

Пусть $r = |y]$, тогда

$$\| f \|_{LM^{\lambda}_{p}(Q(0,b))} \geqslant |y|^{-\lambda} \| f \|_{L_p(Q(0,b) \bigcap B(0,|y|)}$$

$$\geqslant |y|^{-\lambda} \| f \|_{L_p(Q(0,y) \bigcap Q(0,b))}$$

$$= |y|^{-\lambda} \| f \|_{L_p(Q(0,y))} .$$

$\square$

**Теорема 2.3.1.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{n}{q}$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$, $\overline{k} = (k_1,\ldots,k_n)$, $k_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$.

*Тогда существует* $C_2 > 0$ *такое, что*

$$\| I_{a+}^{\overline{\alpha}\overline{k}} f \|_{LM_{q,a}^{\mu}(Q(a,b))} \leqslant C_2 \mid b-a \mid^{\nu} \| f \|_{LM_{p,a}^{\lambda}(Q(a,b))}, \tag{2.29}$$

*где*

$$\nu = \lambda + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} + \sum_{i=1}^{n} (k_i+1)\alpha_i - \mu, \tag{2.30}$$

*для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и для всех* $f \in LM_{p,a}^{\lambda}(Q(a,b))$.

*Показатель* $\nu$ *не может быть заменен никаким другим.*

*Доказательство.* Достаточно провести для случая $a = 0$.

Часть 1. Из (2.28) с $a = 0$ и неравенством Гёльдера следует, что

$$\left| \left( I_{0+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right)(x) \right|$$

$$\leqslant C_3 \left\| \prod_{i=1}^{n} (x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1})^{(\alpha_i-1)} t_i^{k_i} \right\|_{L_{p'}(Q(0,x))} \|f\|_{L_p(Q(0,x))} (t_i = x_i\tau_i)$$

$$\leqslant C_3 \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i(k_i+1)-\frac{1}{p}} \prod_{i=1}^{n} \left( \int_0^1 (1-\tau_i^{k_i+1})^{(\alpha_i-1)p'} \tau_i^{k_i p'} d\tau_i \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(Q(0,x))},$$

где

$$C_3 = \prod_{j=1}^{n} \frac{(k_j+1)^{1-\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)}.$$

Выполнив замену переменной $\tau_i^{k_i+1} = z_i$ и, приняв во внимание, что

$$(\alpha_i - 1)p' = \frac{\alpha_i p - 1}{p-1} - 1 \text{ и } \frac{(p'-1)k_i}{k_i+1} = \frac{p'k_i+1}{k_i+1} - 1,$$

получим, что

$$\int_0^1 (1-\tau_i^{k_i+1})^{(\alpha_1-1)p'} \tau_i^{k_i p'} d\tau_i = \frac{1}{k_i+1} B\left( \frac{\alpha_i p - 1}{p-1}, \frac{p'k_i+1}{k_i+1} \right),$$

где $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ - бета-функция.

Значит,

$$\left|\left(I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}f\right)(x)\right| \leqslant C_4\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{(k_i+1)\alpha_i-\frac{1}{p}}\right)\|f\|_{L_p(Q(0,x))},$$

где

$$C_4 = C_3\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(k_i+1)^{1-\frac{1}{p}}}\left(B\left(\frac{\alpha_i p-1}{p-1},\frac{p'k_i+1}{k_i+1}\right)\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Согласно лемме , поскольку $(k_i+1)\alpha_i-\frac{1}{p}>0$, получим, что

$$\left|\left(I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}f\right)(x)\right| \leqslant C_4 \mid x\mid^{\lambda-\frac{n}{p}+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i}\| f \|_{LM_p^{\lambda}(Q(0,b))}$$

и

$$\left\||I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}f\right\|_{L_q(Q(0,b)\bigcap B(0,r))}$$
$$\leqslant C_4 \mid b\mid^{\lambda-\frac{n}{p}+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i}\| 1 \|_{L_q(Q(0,b))\bigcap B(0,r))}\| f \|_{LM_p^{\lambda}(Q(0,b))}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $r<|b|$, то учитывая, что $0<\mu\leqslant\frac{n}{q}$, получим, что

$$r^{-\mu}\left\|I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}f\right\|_{L_q(Q(0,b)\bigcap B(0,r))}$$
$$\leqslant C_5 \mid b\mid^{\lambda-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\mu+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i}\| f \|_{LM_p^{\lambda}(Q(0,b))},$$

где

$$C_5 = C_4\nu_n^{\frac{n}{q}}.$$

2) Если $r\geqslant|b|$, то

$$r^{-\mu}\left\|I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}f\right\|_{L_q(Q(0,b)\bigcap B(0,r))}$$
$$\leqslant C_4 \mid b\mid^{\lambda-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\mu+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i}\| f \|_{LM_p^{\lambda}(Q(0,b))},$$

Откуда следует (2.29).

Часть 2. Предположим, что $I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}f$ ограничен из $LM_p^{\lambda}(Q(0,b))$ в $LM_q^{\mu}(Q(0,b))$, то есть: для некоторого $C_5(b)>0$ зависящего от $b$, $p$, $q$, $\lambda$, $\mu$, $\tilde{\alpha}$, и $\tilde{k}$,

$$\left\| I^{\overline{\alpha},\overline{k}}_{0_+} f \right\|_{LM^{\mu}_q(Q(0,b))} \leqslant C_6(b) \parallel f \parallel_{LM^{\lambda}_p(Q(0,b))} . \qquad (2.31)$$

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q(\frac{b}{2},b) \\ 0 & x \in Q(0,b)\backslash Q(\frac{b}{2},b). \end{cases}$$

$$\|f\|_{L_p(Q(0,b)\bigcap B(0,r))} = \parallel f \parallel_{L_p(Q(0,b)\backslash Q(0,\frac{b}{2})\bigcap B(0,r))}$$

$$= \parallel 1 \parallel_{L_p(Q(\frac{b}{2},b)\bigcap B(0,r))} = \left| Q\left(\frac{b}{2},b\right) \bigcap B(0,r) \right|^{\frac{1}{p}} \leqslant \left| Q\left(\frac{b}{2},b\right) \right|^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{|b|}{2}\right)^{\frac{n}{p}} \qquad (2.32)$$

и

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_p(Q(\frac{b}{2},b)\bigcap B(0,r))} \leqslant \sup_{r \geqslant \frac{|b|}{2}} r^{-\lambda} \left| Q\left(\frac{b}{2},b\right) \right|^{\frac{1}{p}} = C_7 |b|^{\frac{n}{p}-\lambda},$$

где

$$C_7 = 2^{\lambda - \frac{n}{p}}.$$

Оценивая снизу $\left\| I^{\overline{\alpha},\overline{k}}_{a_+} f \right\|_{LM^{\mu}_q(Q(\frac{b}{2},))}$, получим, что

$$\left\| I^{\overline{\alpha},\overline{k}}_{a_+} f \right\|_{LM^{\mu}_q(Q(\frac{b}{2},b))}$$

$$\geqslant C_3 \left\| \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_1} \prod_{i=1}^{n} (x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1})^{\alpha_i - 1} t_i^{k_i} dt_1 \dots dt_n \right\|_{LM^{\mu}_q(Q(\frac{b}{2},b))} \quad (t_i = x_i \tau_i)$$

$$\geqslant C_8 r^{-\mu} \left\| \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i(k_i+1)} \right\|_{L_q(Q(\frac{b}{2},b)\bigcap B(0,r))} \Bigg|_{r=|b|} = C_8 |b|^{-\mu} \left\| \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i(k_i+1)} \right\|_{L_q(Q(\frac{b}{2},b))},$$

где

$$C_8 = C_3 \beta^{\frac{1}{q}}(k_i+1, \alpha_i).$$

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i(k_i+1)} \right\|_{L_q(Q(\frac{b}{2},b))}$$

$$\geqslant \left(\frac{|b|}{2}\right)^{\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i} \left| Q\left(\frac{b}{2},b\right) \right|^{\frac{1}{q}} = 2^{-(\frac{n}{q}+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i)} |b|^{\frac{n}{q}+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i}$$

$$\geqslant C_9 |b|^{\frac{n}{q}+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i},$$

где

$$C_9 = 2^{-(\frac{n}{q}+\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i)}.$$

Следовательно,

$$\left\| I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right\|_{LM_q^{\mu}(Q(0,b))} \geqslant C_{10} |b|^{\frac{n}{q} - \mu + \sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i}, \qquad (2.33)$$

где $C_{10} = C_8 C_9$.

Наконец, с помощью неравенств (2.31), (2.32) и (2.33), получим, что

$$C_{10} |b|^{\frac{n}{q} - \mu + \sum_{i=1}^{n}(k_i+1)\alpha_i} \leqslant \left\| I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right\|_{LM_q^{\mu}(Q(0,b))} \leqslant C_6 C_7 |b|^{\frac{n}{p} - \lambda},$$

где $C_{10} = C_8 C_9$.

Следовательно,

$$C_6(b) \geqslant \frac{C_{10}}{C_7} |b|^{\nu},$$

где $\nu$ определяется формулой (2.30) с $a = 0$. □

**Замечание 2.3.2.** *Теорема 2.3.1 является аналогом теоремы 2.2.1 для обобщенных операторов Римана- Лиувилля. Этот результат опубликован в статье [43].*

## 2.4 Ограниченность обобщенного оператора Римана-Лиувилля в анизотропных локальных пространствах типа Морри

**Определение 2.4.1.** *Пусть* $\overline{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_n)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\overline{a} = (a_1,\dots,a_n)$, $b = (b_1,\dots,b_n)$, $0 < p_i \leqslant \infty$, $0 < \theta_i \leqslant \infty$, $0 < \lambda_i < \infty$, $i = 1,\dots,n$, $Q(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i, i = 1,\dots,n\}$.

*Пусть* $\overrightarrow{LM}_{\bar{p}\bar{\theta},a}(Q(a,b))$, $\overleftarrow{LM}_{\bar{p}\bar{\theta},a}(Q(a,b))$ *– это пространства всех измеримых по Лебегу функций на* $Q(a,b)$*, для которых конечны следующие выражения*

$$\|f\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta},a}\left(Q(a,b)\right)} = \Big\|...\|f(x_1,...,x_n)\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,a_1,x_1}((a_1,b_1))}...\Big\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n,\theta_n,a_n,x_n}((a_n,b_n))}$$

$$= \left\| {r_n}^{-\lambda_n-\frac{1}{\theta_n}} \right\|...\left\|{r_1}^{-\lambda_1-\frac{1}{\theta_1}}\right\| f(x_1,...,x_n)\Big\|_{L_{p_1,x_1}((a_1,b_1)\bigcap(a_1-r_1,a_1+r_1))}\Big\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)}$$

$$...\Big\|_{L_{p_n,x_n}((a_n,b_n)\bigcap(a_n-r_n,a_n+r_n))}\Big\|_{L_{\theta_n}(0,\infty)},$$

*и*

$$\|f\|_{\overleftarrow{LM}_{\overline{p}\overline{\theta},a}\left(Q(a,b)\right)} = \Big\|...\,\|f(x_1,...,x_n)\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n,\theta_n,a_n,x_n}((a_n,b_n))}\,...\Big\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,a_1,x_1}((a_1,b_1))}$$

$$= \left\|{r_1}^{-\lambda_1-\frac{1}{\theta_1}}\right\|...\left\|{r_n}^{-\lambda_n-\frac{1}{\theta_n}}\|f(x_1,...,x_n)\|_{L_{p_n,x_n}((a_n,b_n)\bigcap(a_n,-r_n,a_n+r_n))}\right\|_{L_{\theta_n}(0,\infty)}$$

$$...\Big\|_{L_{p_1,x_1}((a_1,b_1)\bigcap(a_1,-r_1,a_1+r_1))}\Big\|_{L_{\theta_1}(0,\infty)},$$

*соответственно.*

Мы будем часто пользоваться определением, когда $a = 0$. Будем для краткости обозначать $\|f\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta},0}(Q(0,b))}$ через $\|f\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta}}}$.

**Лемма 2.4.1.** *Пусть* $n = 1, 0 < y < \infty$, $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $0 < \theta \leqslant \infty$.

*Тогда*

$$\|f\|_{L_p(0,y)} \leqslant (\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}} y^{\lambda} \|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,y)} \tag{2.34}$$

*(если* $\theta = \infty$*, то предполагается, что* $(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}} = 1$*).*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,y)} = \left(\int\limits_0^\infty r^{-\lambda\theta-1}\|f\|^{\theta}_{L_p((0,y)\nu(-r,r))}dr\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\geqslant \left( \int\limits_{y}^{\infty} r^{-\lambda\theta-1} \|f\|^{\theta}_{L_p((0,y)\bigcap(0,r))} dr \right)^{\frac{1}{\theta}} = \|f\|_{L_p(0,y)} \left( \int\limits_{y}^{\infty} r^{-\lambda\theta-1} dr \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= \frac{1}{(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}}} y^{-\lambda} \|f\|_{L_p(0,y)}.$$

□

**Лемма 2.4.2.** *Пусть* $n = 1$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, $k \geqslant 0$, $0 < \theta \leqslant \infty$, $0 < \sigma \leqslant \infty$, $0 < \lambda,\mu < \infty$. *Тогда существует* $C_1 > 0$ *такое, что*

$$\|I^{\alpha k}_{0+} f\|_{LM^{\mu}_{q,\sigma}(a,b)} \leqslant C_1 (b-a)^{\nu} \|f\|_{LM^{\lambda}_{p,\theta}(a,b)} \tag{2.35}$$

*для всех конечных интервалов* $(a,b)$, *и для всех* $f \in LM^{\lambda}_{p,\theta}(a,b)$, *где*

$$\nu = \lambda + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + (k+1)\alpha - \mu. \tag{2.36}$$

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда $a = 0$, $0 < b < \infty$. В неравенстве (*) было доказано, что существует $C_2 > 0$ такое, что

$$\left| \left( I^{\alpha,k}_{0+} f \right)(x) \right| \leqslant C_2 x^{(k+1)\alpha - \frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(0,x)}$$

для любых $0 < x < b$ и, используя (2.34), получим, что

$$\left| \left( I^{\alpha,k}_{0+} f \right)(x) \right| \leqslant C_2 x^{(k+1)\alpha - \frac{1}{p} + \lambda} (\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}} \|f\|_{LM^{\lambda_i}_{p\theta}(0,x)}$$

и

$$\left\| I^{\alpha,k}_{0+} f \right\|_{L_q((-r,r)\cap(0,b))} \leqslant C_2 (\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}} \left\| x^{(k+1)\alpha - \frac{1}{p} + \lambda} \right\|_{L_q((-r,r)\cap(0,b))} \|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,x)}$$

причем, поскольку $(k+1)\alpha - \frac{1}{p} + \lambda > 0$,

$$r^{-\mu}\left\|x^{(k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda}\right\|_{L_q((-r,r)\cap(0,b))} = \begin{cases} \frac{1}{\left(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1\right)^{\frac{1}{q}}}\, r^{\nu},\ r \leqslant b, \\ \frac{1}{\left(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1\right)^{\frac{1}{q}}}\, b^{\nu},\ r > b. \end{cases}$$

1. Если $r \leqslant b$, то

$$\left\|r^{-\mu-\frac{1}{\theta}}\left\|I_{0+}^{\alpha,k}f\right\|_{L_q((-r,r)\cap(0,b))}\right\|_{L_\sigma(0,b)}$$

$$\leqslant \frac{C_2(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1)^{\frac{1}{q}}}\left\|r^{\nu-\frac{1}{\sigma}}\right\|_{L_\sigma(0,b)}\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,b)}$$

$$= \frac{C_2(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1)^{\frac{1}{q}}(\nu\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}} b^{\nu}\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,b)}.$$

2. Если $r > b$, то

$$\left\|r^{-\mu-\frac{1}{\sigma_i}}\left\|I_{0+}^{\alpha,k}f\right\|_{L_q((-r,r)\cap(0,b))}\right\|_{L_{\sigma_i}(0,\infty)}$$

$$\leqslant \frac{C_2(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1)^{\frac{1}{q}}} b^{(k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda+\frac{1}{q}}\left\|r^{-\mu_i-\frac{1}{\sigma}}\right\|_{L_\sigma(b,\infty)}\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,b)}$$

$$= \frac{C_2(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1)^{\frac{1}{q}}(\mu\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}} b^{\nu}\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta}(0,b)}.$$

Следовательно,

$$\|I_{0^+}^{\alpha,k}f\|_{LM^{\mu}_{q\sigma}(0,b)} \leqslant C_1 b^{\nu}\|f\|_{LM^{\lambda}_{p,\theta}(0,b)},$$

где

$$C_1 = \frac{C_2(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}}}{(((k+1)\alpha-\frac{1}{p}+\lambda)q+1)^{\frac{1}{q}}(\mu\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

$\square$

В доказательстве следующего утверждения применим обобщенное неравенство Минковского для лебеговых просттранств: пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $F \subset \mathbb{R}^n$ - измеримое по Лебегу множество, $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$, и $f : E \times F \to \mathbb{C}$ измеримая по Лебегу функция, тогда

$$\left\| \|f(x,y)\|_{L_{p,x}(E)} \right\|_{L_{q,y}(F)} \leqslant \left\| \|f(x,y)\|_{L_{q,y}(F)} \right\|_{L_{p,x}(E)}. \tag{2.37}$$

**Лемма 2.4.3.** *(Обобщенное неравенство Минковского для локальных пространств типа Морри) Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant c \leqslant d \leqslant \infty$, $0 < \max\{p,\theta\} \leqslant \min\{q,\sigma\} \leqslant \infty$, $0 < \lambda,\ \mu < \infty$.

*Тогда*

$$\left\| \|f(x,y)\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a,x}(a,b)} \right\|_{LM^{\mu}_{q\sigma,c,y}(c,d)} \leqslant \left\| \|f(x,y)\|_{LM^{\mu}_{q\sigma,c,y}(c,d)} \right\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a,x}(a,b)}. \tag{2.38}$$

*Доказательство.* Применяя неравенство (2.35), получим, что

$$\left\| \|f(x,y)\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a,x}(a,b)} \right\|_{LM^{\mu}_{q\sigma,c,y}(c,d)}$$

$$\leqslant (\theta \leqslant q) \leqslant \left\| \rho^{-\mu-\frac{1}{\sigma}} \left\| \left\| r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}} \|f(x,y)\|_{L_{p,x}(a,b)\bigcap(a-r,a+r)} \right\|_{L_{q,y}((c,d)\bigcap(c-\rho,c+\rho))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)} \right\|_{L_\sigma(0,\infty)}$$

$$\leqslant (p \leqslant q) \leqslant \left\| \rho^{-\mu-\frac{1}{\sigma}} \left\| \left\| r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}} \|f(x,y)\|_{L_{q,y}((c,d)\bigcap(c-\rho,c+\rho))} \right\|_{L_{p,x}(a,b)\bigcap(a-r,a+r)} \right\|_{L_\theta(0,\infty)} \right\|_{L_\sigma(0,\infty)}$$

$$\leqslant (\theta \leqslant \sigma) \leqslant \left\| \rho^{-\mu-\frac{1}{\sigma}} \left\| \left\| r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}} \|f(x,y)\|_{L_{q,y}((c,d)\bigcap(c-\rho,c+\rho))} \right\|_{L_{p,x}(a,b)\bigcap(a-r,a+r)} \right\|_{L_\sigma(0,\infty)} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$\leqslant (p \leqslant \sigma) \leqslant \left\| r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}} \left\| \left\| \rho^{-\mu-\frac{1}{\sigma}} \|f(x,y)\|_{L_{q,y}((c,d)\bigcap(c-\rho,c+\rho))} \right\|_{L_\sigma(0,\infty)} \right\|_{L_{p,x}(a,b)\bigcap(a-r,a+r)} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$= \left\| \|f(x,y)\|_{LM^{\mu}_{q\sigma,c,y}(c,d)} \right\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a,x}(a,b)}.$$

$\square$

**Теорема 2.4.1.** *Пусть* $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\tilde{k} = (k_1,\ldots,k_n)$, $\overline{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, $\overline{q} = (q_1,\ldots,q_n)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\overline{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$,

$$1 < p_i \leqslant \infty, 0 < q_i, \theta_i \leqslant \infty, k_i \geqslant 0, \frac{1}{p_i} < \alpha_i < 1, \lambda_i, \mu_i > 0, i = 1,\ldots,n;$$

$$\max\{p_i,\theta_i\} \leqslant \min\{q_j, \sigma_j\}, i = 1,\ldots,n-1 \ \text{ и } j = i+1,\ldots,n.$$

*Тогда существует* $C_3 > 0$, *такое, что*

$$\left\| I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\mu}}_{\overline{q}\,\overline{\sigma},a}(Q(a,b))} \leqslant C_3 \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^{\nu_i} \|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\,\overline{\theta},a}(Q(a,b))} \tag{2.39}$$

*где*

$$\nu_i = \lambda_i + \frac{1}{q_i} + \alpha_i(k_i+1) - \frac{1}{p_i} - \mu_i, i = 1,\ldots,n$$

*для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и всех* $f \in \overleftarrow{LM}^{\lambda}_{\overline{p}\overline{\theta},a}((Q(a,b))$.

*Каждое* $\nu_i$, $i = 1,\ldots;n$, *не может быть заменено на никакое другое.*

*Доказательство.* Шаг 1. Пусть $a = 0$ и $n = 2$.

$$\begin{aligned} \left\| I_{0_+}^{\tilde{\alpha},\tilde{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\mu}}_{\overline{q}\overline{\sigma},a}(Q(a,b))} &= \left\| I_{0_+}^{\alpha_1,k_1}(I_{0_+}^{\alpha_2,k_2} f) \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\mu}}_{\overline{q}\overline{\sigma}}(Q(0,b))} \\ &= \left\| \left\| I_{0_+}^{\alpha_1,k_1}(I_{0_+}^{\alpha_2,k_2} f) \right\|_{LM^{\mu_1}_{q_1,\sigma_1,x_1}(0,b_1)} \right\|_{LM^{\mu_2}_{q_2,\sigma_2,x_2}(0,b_2)}, \end{aligned}$$

где $\overline{\mu} = (\mu_1,\mu_2)$, $\overline{q} = (q_1,q_2)$ и $\overline{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2)$.

Применяя неравенство (2.35), получим, что существует $C_4 > 0$ такое, что

$$\left\| I_{0_+}^{\tilde{\alpha},\tilde{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\mu}}_{\overline{q}\overline{\sigma}}(Q(0,b))} \leqslant C_4 b_1^{\nu_1} \left\| \left\| I_{0_+}^{\alpha_2,k_2} f \right\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,x_1}(0,b_1)} \right\|_{LM^{\mu_2}_{q_2,\sigma_2,x_2}(0,b_2)}.$$

Применяя (2.38), получим, что

$$\left\| I_{0_+}^{\tilde{\alpha},\tilde{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\mu}}_{\overline{q}\overline{\sigma}}(Q(0,b))} \leqslant C_4 b_1^{\nu_1} \left\| \left\| I_{0_+}^{\alpha_2,k_2} f \right\|_{LM^{\mu_2}_{q_2,\sigma_2,x_2}(0,b_2)} \right\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,x_1}(0,b_1)}.$$

Из неравенства (2.35) следует, что существует $C_5 > 0$ такое, что

$$\left\| I_{0_+}^{\tilde{\alpha},\tilde{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\mu}_{\overline{q}\overline{\sigma}}(Q(0,b))} \leqslant C_4 C_5 b_1^{\gamma_1} b_2^{\gamma_2} \left\| \|f\|_{LM^{\lambda_2}_{p_2,\theta_2,x_2}(0,b_2)} \right\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,x_1}(0,b_1)}$$

$$= C_4 C_5 b_1^{\gamma_1} b_2^{\gamma_2} \|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{\theta}}(0,b)}.$$

Шаг 2. Предположим, что оператор $I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}}$ ограничен из $LM^{\overline{\lambda}}_{\overline{p},\overline{\theta}}(Q(0,\overline{b}))$ в $LM^{\overline{\mu}}_{\overline{q}\overline{\theta}}(Q(0,b))$, т. е. существует $C_6(b) > 0$ такое, что.

$$\left\| I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\mu}_{\overline{q},\overline{\theta}}(Q(0,b))} \leqslant C_6(b) \, \|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta}}(Q(0,\overline{b}))} \tag{2.40}$$

Пусть $f(x_1,x_2) = \chi_1(x_1).\ \chi_2(x_2)$, $\chi_i(x_i) = \chi_{(\frac{b_i}{2},b_i)}(x_i)$, $i = 1{,}2$. Тогда

$$\|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta}}(Q(0,b))} = \|\chi_1\|_{LM^{\overline{\lambda}_1}_{\overline{p}_1\overline{\theta}_1,x_1}(0,b_1)} \, \|\chi_2\|_{LM^{\overline{\lambda}_2}_{\overline{p}_2\overline{\theta}_2,x_2}(0,b_2)},$$

где, например,

$$\left\| \chi_{(\frac{b_1}{2},b_1)} \right\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1\theta_1,\frac{b}{2},x_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} = \left\| r_1^{-\lambda_1} \, \|\chi_1\|_{l_{p_1}(\frac{b_1}{2},b_1)\bigcap(-r_1,r_1)} \right\|_{l_{\theta_1}(\frac{b_1}{2},\infty)}$$

$$\leqslant \left\| r_1^{-\lambda_1} \, \|\chi_1\|_{l_{p_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \right\|_{l_{\theta_1}(\frac{b_1}{2},\infty)} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{1}{p_1}-\lambda_1} (\lambda_1\theta_1)^{\frac{1}{\theta_1}}} b_1^{\frac{1}{p_1}-\lambda_1},$$

поэтому имеем следующую оценку сверху

$$\|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta}}(Q(0,\overline{b}))} \leqslant C_7 \prod_{i=1}^{2} b_i^{\frac{1}{p_{1=i}}-\lambda_i} \tag{2.41}$$

где

$$C_7 = \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{2^{\frac{1}{p_i}-\lambda_i} (\lambda_i\theta_i)^{\frac{i}{\theta_i}}}.$$

Заметим, что

$$\left\| I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\mu}_{\overline{q}\overline{\sigma},\frac{\overline{b}}{2}}(Q(\frac{\overline{b}}{2},\overline{b}))} = \left\| \left\| I_{0_+}^{\overline{\alpha},\overline{k}} f \right\|_{LM^{\mu_1}_{q_1\sigma_1,\frac{b_1}{2},x_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \right\|_{LM^{\mu_2}_{q_2\sigma_2,\frac{b_2}{2},x_2}(\frac{b_2}{2},b_2)}$$

$$= \prod_{i=1}^{2} \frac{(k_i+1)^{1-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \left\| I_{0_+}^{\alpha_1,k_1} f \right\|_{LM^{\mu_1}_{q_1\sigma_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \left\| I_{0_+}^{\alpha_2,k_2} f \right\|_{LM^{\mu_2}_{q_2\sigma_2}(\frac{b_2}{2},b_2)} =$$

$$\left( x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1} = z_i, i = 1{,}2, \int_0^{x_i} (x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1})^{d_i-1} t_i^{k_i} dt_i = \frac{1}{d_i(k_i+1)} x_i^{\alpha_i(k_i+1)} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{2} \frac{(k_i+1)^{-\alpha_i}}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)} \left\| x_1^{\alpha_1(k_1+1)} \right\|_{LM^{\mu_1}_{q_1\sigma_1,\frac{b_1}{2},x_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \left\| x_2^{\alpha_2(k_2+1)} \right\|_{LM^{\mu_2}_{q_2\sigma_2,\frac{b_2}{2},x_2}(\frac{b_2}{2},b_2)},$$

где

$$\left\| x_1^{\alpha_1(k_1+1)} \right\|_{LM^{\mu_1}_{q_1\sigma_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \geqslant \left\| r_1^{-\frac{1}{\sigma_1}-\mu_1} \left\| x_1^{\alpha_1(k_1+1)} \right\|_{L_{q_1}((\frac{b_1}{2},b_1)\bigcap(-r_1,r_1))} \right\|_{L_{\theta_1}(b_1,\infty)}$$

$$\left\| r_1^{-\frac{1}{\sigma_1}-\mu_1} \left\| x_1^{\alpha_1(k_1+1)} \right\|_{L_{q_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \right\|_{L_{\sigma_1}(b_1,\infty)} = \left\| x_1^{\alpha_1(k_1+1)} \right\|_{L_{q_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} \left\| r_1^{-\frac{1}{\sigma_1}-\mu_1} \right\|_{L_{\sigma_1}(b_1,\infty)}.$$

Так как

$$\left\| x_1^{\alpha_1(k_1+1)} \right\|_{L_{q_1}(\frac{b_1}{2},b_1)} = (\alpha_1(k_1+1)q_1+1)^{-\frac{1}{q_1}} (1 - 2^{-[\alpha_1(k_1+1)q_1+1]})^{\frac{1}{q_1}} b_1^{\alpha_1+(k_1+1)+\frac{1}{q_1}}$$

$$\left\| r_1^{-\frac{1}{\sigma_1}-\mu_1} \right\|_{L_{\sigma_1}(b_1,\infty)} = \frac{1}{(\mu_1\sigma_1)^{\frac{1}{\sigma_1}}} b_1^{-\mu},$$

то

$$\left\| I_{0_+}^{\bar{\alpha},\bar{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\bar{\mu}}_{\bar{q}\,\bar{\sigma}}(Q(0,\bar{b}))} \geqslant C_8 \prod_{i=1}^{2} b_i^{\alpha_i(k_i+1)+\frac{1}{q_i}-\mu_i} \tag{2.42}$$

где

$$C_8 = \prod_{i=1}^{2} (\alpha_i(k_i+1)q_i+1)^{-\frac{1}{q_i}} (1 - 2^{-[\alpha_i(k_i+1)q_i+1]})^{\frac{1}{q_i}}$$

Используя неравенства (2.38), (2.40) и (2.41), получим, что

$$C_8 \prod_{i=1}^{2} b_1^{\alpha_i(k_i+1)+\frac{1}{q_i}-\mu_i} \leqslant C_6(b) C_7 \prod_{i=1}^{2} b_i^{\frac{1}{p_i}-\lambda_i}.$$

Поэтому,

$$C_6(b) \geqslant \frac{C_8}{C_7} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2}$$

Таким образом, получены искомые утверждения для $n = 2$. $\square$

Доказательство для случая $n > 2$ проводится аналогично.

**Замечание 2.4.1.** *Теорема 2.4.1 – это анизотропный вариант теоремы 2.3.1 В этом случае установлена точная зависимость точной постоянной в неравенстве (2.39) от длин ребер параллелепипеда. В доказательстве существенно использовалось неравенство (2.38).*

## Список обозначений

$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел.

$\mathbb{R}$ – пространство всех действительных чисел.

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство всех векторов с действительными координатами.

$\mathbb{C}^n$ – n-мерное пространство всех векторов с комплексными координатами.

$\mathbb{C}$ – пространство всех комплексных чисел.

$\Omega$ – измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^n$.

$L_p(\Omega)$ – пространство Лебега.

$L_{p,v}(\Omega)$ – весовое пространство Лебега.

$WL_p(\Omega)$ – пространство Марцинкевича.

$\chi_\Omega(x)$ - характеристическая функция множества $\Omega$.

$\mathfrak{M}(\Omega)$ – пространство всех функций $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ измеримых по Лебегу на $\Omega$.

$\mathfrak{M}^+(\Omega)$ – подмножество всех неотрицательных функций из $\mathfrak{M}(\Omega)$.

$\Omega_\theta$ – множество всех функций $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$, таких, что $\|w\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty$ для некоторого $t > 0$.

$\mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow)$ – конус всех функций из $\mathfrak{M}^+((0,\infty))$ монотонно убывающих на $(0,\infty)$.

$LM_{p\theta,w(\cdot)}$ – локальное пространство типа Морри.

$M_p^\lambda(\Omega)$ – пространство Морри.

$Q(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i,\ i = 1,...,n\}$.

$\overrightarrow{LM}_{\overline{p}\overline{\theta},a}(Q(a,b))$ – пространства всех измеримых по Лебегу функций на $Q(a,b)$, для которых

$$\|f\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta},a}\left(Q(a,b)\right)}$$
$$= \left\|...\|f(x_1,...,x_n)\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1,\theta_1,a_1,x_1}((a_1-r_1,a_1+r_1))}...\right\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n,\theta_n,a_n,x_n}((a_n-r_n,a_n+r_n))} < \infty .$$

$I_\alpha$ – потенциал Рисса.

$I_{\rho(.)}$ – обобщенный потенциал Рисса.

$I_{a_+}^{\alpha}$ – левосторонний оператор Римана-Лиувилля.

$I_{a_+}^{\alpha,k}$ – левосторонний многомерный обобщенный оператор Римана-Лиувилля.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Задача об ограниченности обобщенного потенциала Рисса как оператора, действующего из одного общего локального пространства типа Морри на $\mathbb{R}^n$ в другое, сведена к задаче об ограниченности оператора Харди, как оператора, действующего из одного общего весового лебегова пространства в другое на конусе неотрицательных невозрастающих функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

2. Для всех допустимых значений числовых параметров получены, близкие к необходимым, достаточные условия на функциональные параметры, характеризующие общие локальные пространства типа Морри, обеспечивающие ограниченность обобщенного потенциала Рисса как оператора, действующего из одного общего локального пространства типа Морри в другое.

3. Для некоторой области допустимых значений числовых параметров полученные достаточные условия на функциональные параметры совпадают с необходимыми.

Результаты, перечисленные в пунктах 1-3 являются обобщением результатов статьи [8], полученных для классических потенциалов Рисса, на случай широкого класса обобщенных потенциалов Рисса.

4. При надлежащих предположениях относительно числовых параметров доказана ограниченность многомерного интегрального оператора Римана-Лиувилля как оператора, действующего из одного пространства Морри на конечном параллелепипеде в другое, причем получены точные оценки зависимости квази-нормы такого оператора от диаметра параллелепипеда.

5. Аналогичные результаты получены для обобщенного многомерного интегрального оператора Римана-Лиувилля, действующего из одного локального пространства Морри на конечном параллелепипеде в другое.

6. Доказана ограниченность обобщенного многомерного интегрального оператора Римана-Лиувилля, действующего из одного анизотропного локального пространства типа Морри на конечном параллелепипеде в надлежащем образом видоизмененное анизотропное локальное пространства типа Морри, причем получены точные оценки зависимости квази-нормы такого оператора от длин ребер параллелепипеда. Для доказательства ограниченности использовался полученный в работе аналог обобщенного неравенства Минковского для локальных пространств типа Морри.

Результаты, перечисленные в пунктах 4-6 являются обобщением результатов статьи [23], относящихся к одномерному случаю. Расширен диапазон параметров, для которых установлена ограниченность. Кроме того, в отличие от статьи [23], получены точные оценки норм оператора Римана-Лиувилля, как в изотропном случае (в зависимости от диаметра параллелепипеда), так и в анизотропном случае (в за висимости от длин ребер параллелепипеда).

## Список литературы


[1] *Akbulut A., Guliyev V. S, Muradova Sh. A.* Boundedness of the anisotropic Riesz potential in anisotropic local Morrey-type spaces // Complex Variables and Elliptic Equations, 58 (2013), no. 2, 259–280. https://doi.org/10.1080/17476933.2011.575465

[2] *Anastassiou G., Argyros I.* The right multidimensional Riemann–Liouville fractional integral // Intelligent Numerical Methods II: Applications to Multivariate Fractional Calculus, 2016, 105-116.

[3] *Anastassiou G., Argyros I.* The left multidimensional Riemann–Liouville fractional integral // Intelligent Numerical Methods II: Applications to Multivariate Fractional Calculus, 2016, 93-103.

[4] *Бахтигареева Э. Г., Гольдман М. Л., Забрейко П. П.* Оптимальное восстановление обобщенного банахова функционального пространства по конусу неотрицательных функций // Вестник ТГУ. 2014. Т. 19, №2. С. 316-330.

[5] *Bokayev N., Matin D., Akhazhanov T., Adilkhanov A.* Compactness of commutators for Riesz potential on generalized Morrey spaces // Mathematics 12(2024), 304. https://doi.org/10.3390/ math12020304

[6] *Burenkov V. I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I // Eurasian Math. J., 3 (2012), no. 3, 11–32.

[7] *Burenkov V. I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II // Eurasian Math. J., 4 (2013), no. 1, 21–45.

[8] *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliyev V. S., Mustafayev R.Ch.* Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces // Potential Analysis, 35 (2011), no. 1, 67-87.

[9] *Burenkov V. I., Guliyev H. V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces // Studia Math, 163 (2004), no. 2, 157-176.

[10] *Burenkov V. I., Guliev V. S.* Necessary and sufficient conditions for the poundedness of the Riesz Potential in local Morrey-type spaces // April 2009. Potential Analysis 30(2009), no. 3, 211-249.

[11] *Burenkov V. I., Guliyev H. V., Guliev V. S.* Necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators in local Morrey-type spaces // J. Comput. Appl. Math., 208 (2007), 280-301.

[12] *Burenkov V. I., Guliyev H. V., Guliev V. S.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces // Doklady Ross. Akad. Nauk. Matematika, 412, no. 5 (2007), 585 589 (in Russian). English transl. in A ad. S i. Dokl. Math., 76 (2007).

[13] *Burenkov V. I., Guliev V. S., Tararykova T. V.* Comparison of Morrey spaces and Nikol'skii spaces // Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 1, 9–20.

[14] *Burenkov V. I., Jain P., Tararykova T. V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Math. J., 2 (2011), no. 1, 52-80.

[15] *Burenkov V. I., Nursultanov E. D.* Interpolation theorems for Urysohn integral operators // Eurasian Math. J. 11 (2020), no. 4, 88-94.

[16] *Burenkov V. I., Senouci M. A.* Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces // Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 4, 92–98.

[17] *Burenkov V. I., Senouci M. A.* On boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey-type spaces // Journal of Mathematical Sciences, 266 (2023), 765-793.

[18] *Burenkov V. I., Tararykova T. V.* Young's inequality for convolutions in Morrey-type spaces // Eurasian Math. J. 7 (2016), no. 2, 92-99.

[19] *Burenkov V. I., Tararykova T. V.* An analogue of Young's inequality for convolutions in general Morrey type spaces // Trudy MIRAN 293 (2016), 113-132 (in Russian). English transl. in Proceedings Steklov Inst. Math. 293 (2016), 107-126.

[20] *Carro M., Pick L., Soria J., Stepanov V. D.* On embeddings between classical Lorentz spaces // Math. Ineq. Appl., 4 (2001), no. 3, 397-428.

[21] *Carro M., Gogatishvili A., Martin J., Pick L.* Weighted inequalities involving two Hardy operators with applications to embeddings of function spaces // J. Oper. Theory, 59 (2008), no. 2, 309-332.

[22] *Farsani S. M.* On boundedness and compactness of Riemann-Liouville fractional operators // Siberian Mathematical Journal, 54 (2013), no. 2, 368-378.

[23] *Fu Z., Trujillo J., Wu Q.* Riemann-Liouville fractional calculus in Morrey spaces and applications // Comput Math Appl, 2016, http://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.013

[24] *Galeano Delgado Juan, Nápoles Valdes Juan, Reyes Edgardo.* New integral inequalities involving generalized Riemann-Liouville fractional operators. Studia Universitatis Babes-Bolyai Matematica, 68 (2023), 481-487. 10.24193/subbmath.2023.3.02.

[25] *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions // Uspekhi Mat. Nauk

68 (2013), no. 4 (412), 3–68 (in Russian); English transl., Russian Math. Surveys 68 (2013), no. 4, 597–664. MR3154814

[26] *Goldman M. L.* Hardy type inequalities on the cone of quasimonotone functions // Research Report No: 98/31. Khabarovsk: Computer Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 1998, 1-69.

[27] *Guliyev V. S.* Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators // Eurasian Math. J., 3 (2012), no. 3, 33–61.

[28] *Guliyev V. S., Shukurov P. S.* On the boundedness of the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators in generalized Morrey spaces // Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory, Series: Operator Theory: Advances and Applications, 229 (2013), 175-194.

[29] *Houas M., Bezziou M.* On some fractional integral inequalities involving generalized Riemann-Liouville fractional integral operator. Med. J. Model. Simul., 06 (2016), 059-066.

[30] *Katugampola U.-N.* Approach to a generalized fractional integral // Applied Mathematics and Computation. 218 (2011), no. 3, 860–865.

[31] *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.* Theory and applications of fractional differential equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[32] *Kucukaslan A.* Two-type estimates for the boundedness of generalized Riesz potential operator in the generalized weighted local Morrey spaces // Article in Advanced Studies Euro-Tbilisi Mathematical Journal, december 2021.

[33] *Lan K.* Generalizations of Riemann-Liouville fractional integrals and applications // Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2024), 1-38. https://doi.org/10.1002/mma.10183

[34] *Lemarié-Rieusset P.-G.* The role of Morrey spaces in the study of Navier–Stokes and Euler equations // Eurasian Math. J., 3 (2012), no. 3, 62–93.

[35] *Liu, Liguang, Yang Dachun, Zhou Yuan.* Boundedness of generalized Riesz potentials on spaces of homogeneous type // Mathematical Inequalities Applications. 13 (2010). 10.7153/mia-13-63.

[36] *Metwali M. A.* On some properties of Riemann-Liouville fractional operator in Orlicz spaces and applications to quadratic integral equations // Filomat 36 (2022), no. 17, 6009–6020 https://doi.org/10.2298/FIL2217009M

[37] *Mohammed P. O.* New generalized Riemann—Liouville fractional integral inequalities for convex functions // Journal of Mathematical Inequalities 15 (2021), no. 2, 511-519.

[38] *Morrey C. B.* On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.

[39] *Ragusa M. A.* Operators in Morrey type spaces and applications // Eurasian Math. J., 3 (2012), no. 3, 94–109.

[40] *Ramadana Y.* On The boundedness properties of the generalized fractional integrals on the generalized weighted Morrey spaces // Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, 5 (2022), no. 2, 81–90.

[41] *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives // Theory and Applications. Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[42] *Senouci M. A.* Boundedness of Riemann–Liouville fractional integral operator in Morrey spaces // Eurasian Math. J., 12 (2021), no. 1, 82–91.

[43] *Senouci M. A.* Boundedness of the generalized Riemann–Liouville operator in local Morrey-type spaces // Eurasian Math. J., 2023, том 14, номер 4, 63–68.

[44] *Sickel W.* Smoothness spaces related to Morrey spaces — a survey. I // Eurasian Math. J., 3 (2012), no. 3, 110–149.

[45] *Sickel W.* Smoothness spaces related to Morrey spaces — a survey. II // Eurasian Math. J., 4 (2013), no. 1, 82–124.

[46] *Syaifudin R. A, Karim C., Marjono M., Rahman H.* The boundedness of generalized fractional integral operators on small Morrey spaces // CAUCHY Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi, 9 (2024), no. 1, 73-81.