На правах рукописи

Сенуси Марьям Абделькадеровна

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Москва 2024

Работа выполнена в Математическом институте им. С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственого автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы».

Научный руководитель: В.И. Буренков, д.ф.-м.н.,
профессор Математического института
им. С.М. Никольского РУДН

Официальные оппоненты: Е.И. Бережной, д.ф.-м.н.,
профессор Ярославского государственного
университета им. П. Г. Демидова

В.С. Гулиев, д.ф.-м.н.,
профессор Бакинского государственного
университета, член-корреспондент
Национальной академии наук Азербайджана

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образованя
Южный федеральный университет

Защита диссертации состоится 17 декабря 2024 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан________ ноября 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Данная диссертационная работа посвящена исследованиям по современному активно разрабатываемому в последние десятилетия направлению в гармоническом и функциональном анализе и теории функциональных пространств: теории операторов в общих пространствах типа Морри.

Она посвящена изучению условий на функциональные параметры, характеризующие общие локальные пространства типа Морри, обеспечивающие ограниченность обобщенных потенциалов Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое, а также изучению условий, обеспечивающих ограниченность обобщенных многомерных операторов Римана-Лиувилля из одного пространства типа Морри на параллелепипеде в другое и получению точных оценок норм этих операторов в зависимости от размеров параллелепипеда.

Теория пространств типа Морри и теория операторов в пространствах типа Морри активно развивается. Этой тематике посвящены многочисленные работы математиков из многих стран мира.

Цели и задачи работы. Цель диссертационной работы состоит в исследовании ограниченности перечисленных выше многомерных интегральных операторов в пространствах типа Морри. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1) свести задачу об ограниченности обобщенных потенциалов Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое к задаче об ограниченности оператора Харди из одного весового пространства Лебега в другое на конусе неотрицательных невозрастающих функций;

2) для любых допустимых значений числовых параметров получить достаточные условия на функциональные параметры, характеризующие общие локальные пространства типа Морри, при которых обобщенные потенциалы Рисса ограниченно действуют из одного локального пространства типа Морри в другое, которые для некоторого диапазона числовых параметров совпадают с необходимыми условиями;

3) для многомерного оператора Римана-Лиувилля и многомерного обобщенного оператора Римана-Лиувилля получить точные оценки условия их ограниченности из одного изотропного или анизотропного пространства типа Морри на конечном параллелепипеде в другое.

4) получить точные оценки норм этих операторов в зависимости от размеров параллелепипеда.

Научная новизна. В данной работе

1) получены новые результаты об ограниченности обобщенного потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое, обобщающие известные ранее результаты в ограниченности классического потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое, которые были получены В. И. Буренковым, А. Гогатишвили, В. Гулиевым и Р. Мустафаевым [1]

[1] *Burenkov V.I., Gogatishvili A., Guliyev V.S., Mustafayev R.Ch.* Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces // Potential Analysis, 35 (2011), no. 1, 67-87.

2) получены новые результаты об ограниченности обобщенного многомерного оператора Римана-Лиувилля из одного пространства Морри на конечном параллелепипеде в другое, а также получены новые точные оценки норм таких операторов в зависимости от размеров параллелепипеда.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты работы носят теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории классических операторов теории функций в пространвтах типа Морри, а также в задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Методология и методы исследования.

Исследования основываются на общих методах функционального анализа и на методах, используемых в теории операторов в пространствах типа Морри. Эти методы надлежащим образом модифицируются и развиваются так, чтобы их можно было применить к рассматриваемым в диссертационной работе интегральным операторам и различным вариантам рассматриваемых в работе пространств типа Морри.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о связи ограниченности обобщенного потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое с ограниченностью оператора Харди из одного весового лебегова пространства в другое на конусе неотрицательных функций.

2. Теорема о достаточных условиях, а для некоторого диапазона числовых параметров, необходимых и достаточных условиях ограниченности обобщенного потенциала Рисса из одного общего локального пространства типа Морри в другое.

3. Теоремы об ограниченности обобщенного многомерного оператора Римана-Лиувилля из одного изотропного или анизотропного пространства типа Морри на конечном параллелепипеде в другое.

4. Точные оценки зависимости норм этих операторов от диаметра или длин ребер параллелепипеда.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов исследования. Полученные результаты опубликованы в ведущих рецензируемых журналах.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», Москва. Ноябрь 2020. Материалы XXVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020» и «Ломоносов-2022» Москва. На Воронежской зимней математической школе Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа"2021. Международная научная конференция ICRAMCS 2021 International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science, 2021, Casablanca, Morocco. Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации"2021, УФА.

Результаты, полученные в рамках работы над диссертацией, неоднократно излагались на научном семинаре Математического института РУДН по функциональному анализу и его приложениям под руководством профессоров В.И. Буренкова и М.Л. Гольдмана, на научном семинаре Математического института РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского, на научном семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинар Никольского, руководитель член-корреспондент РАН профессор О.В. Бесов), на научном семинаре по функциональному анализу и его приложениям в Ярославском государственном университете имени П. Демидова и на научном семинаре по функциональному анализу в Евразийском национальном университете имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан).

Публикации и личный вклад автора.

По теме диссертации опубликовано девять работ [1]-[9]:

4 научных статьи ([1], [2], [3], [4]) по теме диссертации опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Скопус и РИНЦ.

5 тезисов докладов международных научных конференций [5]-[9].

Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором самостоятельно. Статьи [1], [4] опубликованы единолично. Статьи [2] и [3] опубликованы в соавторстве с В. И. Буренковым.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 2-х глав, разбитых на разделы, заключения и списка цитированной литературы. Объем работы составляет 100 страниц, библиография - 46 источников.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, представлена история вопроса, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, связанных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Глава 1

Основные определения

Определение 1.1.1 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество, $0 < p \leq \infty$.

Говорят, что измеримая на Ω функция $f \in L_p(\Omega)$, если $\|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, где

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

если $p < \infty$, и, если $p = \infty$, то

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Слабое лебегово пространство $WL_p(\Omega)$ (или пространство Марцинкевича) - это пространтво всех измеримых по Лебегу функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$, для которых при $p < \infty$

$$\|f\|_{WL_p(\Omega)} = \sup_{t>0} t \, |\{y \in \Omega : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

При $p = \infty$ $WL_\infty(\Omega) = L_\infty(\Omega)$.
Определение 1.2.1 Обобщенный потенциал Рисса $I_{\rho(\cdot)}$ определяется равенством

$$\left(I_{\rho(\cdot)} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x-y|) f(y) dy, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

где ρ - неотрицательная измеримая по Лебегу функция на $(0, \infty)$, ядро обобщенного потенциала Рисса.

Если $0 < \alpha < n$, $t > 0$, $\rho(t) = t^{\alpha - n}$, то получим классический потенциал Рисса, который обозначается через I_α.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $F, G : A \times B \longrightarrow [0, \infty]$. Всюду в этой работе будем говорить, что G доминирует F на B равномерно по $x \in A$ и писать

$$F \lesssim G \text{ равномерно по } x \in A,$$

если для любого $y \in B$ существует $c(y) > 0$ такое, что

$$F(x, y) \leq c(y) G(x, y) \text{ для любых } x \in A.$$

Также, будем говорить, что F эквивалентно G на B равномерно по $x \in A$ и писать

$$F \approx G \text{ равномерно по } x \in A,$$

если F доминирует G на B равномерно по $x \in A$ и G доминирует F на B равномерно по $x \in A$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество. Обозначим через $\mathfrak{M}(\Omega)$ множество всех функций, измеримых по Лебегу на Ω, а через $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ его подмножество, состоящее из всех неотрицательных функций.
Определение 1.2.2. Пусть $0 < p, \theta \leq \infty$ и пусть функция $w \in \mathfrak{M}^+\big((0, \infty)\big)$ не эквивалентна 0. Через $LM_{p\theta, w(\cdot)}$ обозначим локальное пространство типа Морри, а именно, пространство всех функций $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квази-нормой

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} \equiv \|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))}\|_{L_\theta(0,\infty)}.$$

Если $w(r) = 0$ и $\|f\|_{L_p(B(0,r))} = \infty$, то будем считать, что $w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))} = 0$.
Определение 1.2.3. Пусть $0 < \theta \leq \infty$, Ω_θ обозначает множество всех функций $w \in \mathfrak{M}^+(0, \infty)$, таких, что

$$\|w\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty,$$

для некоторого $t > 0$.
Определение 1.3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Мы будем говорить, что $\rho \in S_n$, если $\rho \in \mathfrak{M}^+((0, \infty))$ и

1) $\int_0^r \rho(t) t^{n-1} dt < \infty$ для всех $r > 0$,

2) для некоторых $c_1, c_2 > 0$,

$$c_1 \rho(t) \leq \rho(s) \leq c_2 \rho(t)$$

для всех $s, t > 0$, удовлетворяющих неравенству $\frac{t}{2} \le s \le 2t$.
Пример 1. Пусть $\rho(t) = t^{\alpha - n}, t > 0, 0 < \alpha < n$. Тогда $\rho \in S_n$.
Определение 1.4.1. Для $\rho \in S_n$ и $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{I}_{\rho(\cdot),r} f(x) = \int_{^cB(x,r)} \rho(|x-y|) f(y) dy$$

и

$$\underline{I}_{\rho(\cdot),r} f(x) = \int_{B(x,r)} \rho(|x-y|) f(y) dy.$$

Определение 1.4.2. Пусть $1 \le p_1 < \infty, 0 < p_2 \le \infty$. Тогда $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$, если $\rho \in \mathfrak{M}^+((0,\infty))$ и существует положительно невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{\rho} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такая, что

1) $\tilde{\rho}(t) \approx \rho(t)$ равномерно по $t > 0$,
2) $\lim\limits_{t \to \infty} \tilde{\rho}(t) = 0$,
3) $\tilde{\rho} \in S_n$,
4) $\int\limits_0^1 \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'} - 1} dt = \infty$, $\int\limits_1^\infty \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n}{p_1'} - 1} dt < \infty$,
5) $|\tilde{\rho}'(t)| t \gtrsim \tilde{\rho}(t)$ равномерно по $t > 0$,
6) если $0 < p_2 \le p_1$ и $1 \le p_1 < \infty$, то

$$\int_0^r \tilde{\rho}(t) t^{n-1} dt \lesssim \tilde{\rho}(r) r^n$$

равномерно по $r > 0$,

7) если $1 \le p_1 < p_2 < \infty$, то функция $\phi_{n,\tilde{\rho},p_1,p_2}(t) = \tilde{\rho}(t) t^{n\left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_2}\right)}$ почти не убывает на $(0,\infty)$.

Более того, если $p_1 = 1$ и $1 < p_2 < \infty$, то $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, если существует положительная невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{\rho} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такая, что выполняются условия 1) - 3) и 5), 4), условие 6) выполняется для $p_1 = 1$ и вместо условия 7) выполняется следующее условие:

8)

$$\left\| \tilde{\rho}(t) t^{\frac{n-1}{p_2}} \right\|_{L_{p_2}(0,r)} \lesssim \tilde{\rho}(r) r^{\frac{n}{p_2}}$$

равномерно по $r > 0$.

Пусть Ω измеримое по Лебегу множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, тогда $\mathfrak{M}(\Omega)$ обозначает пространство всех функций $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ измеримых по Лебегу на Ω и $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ обозначает подмножество всех неотрицательных функций из $\mathfrak{M}(\Omega)$.

Основными результатами первой главы являются следующие утверждения.
Лемма 1.4.2 *Пусть* $\rho \in S_n$, $0 < p \le \infty, x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{L_p(B(x,r))} \approx \|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)}\|_{L_p(B(x,r))} + r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x) \tag{1}$$

и

$$\|I_{\rho(\cdot)}|f|\|_{WL_p(B(x,r))} \approx \|I_{\rho(\cdot)}(|f|\chi_{B(x,2r)}\|_{WL_p(B(x,r))} + r^{\frac{n}{p}} \left(\overline{I}_{\rho(\cdot),2r}|f|\right)(x) \tag{2}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ *и* $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1.4.3 *Пусть* $\rho \in S_n$, $1 \le p_1 < p_2 < \infty$, *и*

$$\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(t) = \rho(t) t^{n\left(\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_2}\right)},\ t > 0, \tag{3}$$

где p_1' *сопряженное число к* p_1 $\left(p_1' = \frac{p_1}{p_1 - 1}\right)$.

1. *Предположим, что функция* ρ *такая, что функция* φ_{n,ρ,p_1,p_2} *почти не убывает на* $(0,\infty)$, *т.е. для некоторого* $c > 0$

$$\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(t_1) \le c\varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(t_2) \text{ для всех } \ 0 < t_1 < t_2 < \infty. \tag{4}$$

Если $1 < p_1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\|_{L_{p_2}(B(x,r))} \ \lesssim\ \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))} \tag{5}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in L_{p_1}(B(x,2r))$.

Также, если $p_1 = 1$, $1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)}\left(|f|\chi_{B(x,2r)}\right)\|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \ \lesssim\ \varphi_{n,\rho,p_1,p_2}(r)\|f\|_{L_{p_1}(B(x,2r))} \tag{6}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *и* $f \in L_1(B(x,2r))$.

2. *Неравенство* (**??**) *также выполняется для* $p_1 = 1$ *и* $1 \le p_2 \le \infty$, *если предположение* (**??**) *заменено на предположение*

$$\|\rho(t)t^{\frac{n-1}{p_2}}\|_{L_{p_2}(0,r)} \lesssim \rho(r)r^{\frac{n}{p_2}} \tag{7}$$

равномерно по $r > 0$.

3. *Неравенство* (**??**) *также выполняется для* $1 \le p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \le p_1$, *если предположение* (**??**) *заменено на предположение*

$$\|\rho(t)t^{n-1}\|_{L_1(0,r)} \lesssim \rho(r)r^n \tag{8}$$

равномерно по $r > 0$.

4. *Условие* (**??**) *необходимо для выполнения неравенств* (**??**) *и* (**??**) *для всех* $0 < p_1, p_2 \le \infty$.

5. *Условие* (**??**) *необходимо и достаточно для выполнения неравенств* (**??**) *и* (**??**) *для всех* $1 \le p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \le p_1$.

Теорема 1.4.1 *Пусть* $n \in \mathbb{N}, 1 \le p_1 < \infty, 0 < p_2 \le \infty$.

1. $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *и* $1 \le p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \le p_1$, *и* $\rho \in S_{n,p_1.p_2}$, *то*

$$\| \ I_{\rho(.)}(|f|) \ \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} \ \| \ f \ \|_{L_{p_1}(B(x,t))} \, dt \tag{9}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ *и* $f \in L_{p_1}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Если* $p_1 = 1$ *и* $0 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, *то*

$$\| \ I_{\rho(.)}|f| \ \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \approx \| \ I_{\rho(.)}|f| \ \|_{L_{p_2}(B(x,r))} \approx r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \ \| \ f \ \|_{L_1(B(x,t))} \, dt \tag{10}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ *и* $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

3. *Если* $p_1 = 1$ *и* $1 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in S_{n,1,p_2}$, *то*

$$\| I_{\rho(.)}|f| \|_{WL_{p_2}(B(x,r))} \approx r^{\frac{n}{p_2}} \int_r^\infty \rho(t) t^{-1} \| f \|_{L_1(B(x,t))} \, dt \tag{11}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть H - оператор Харди

$$(Hg)(t) := \int_0^t g(r)dr, \; 0 < t < \infty$$

и пусть для $0 < p \leq \infty$ и измеримой по Лебегу функции $v : (0,\infty) \to [0,\infty)$, $L_{p_1 v(\cdot)}(0,\infty)$ обозначает пространство всех измеримых по Лебегу функций $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$, для которых

$$\|f\|_{L_{p,v(\cdot)}(0,\infty)} = \|fv\|_{L_p(0,\infty)} < \infty.$$

Теорема 1.6.1 *Пусть* $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < p_2 \leq \infty$, $0 < \theta_2 \leq \infty$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, ρ *- положительная непрерывная функция на* $(0,\infty)$ *и*

$$\mu_{n,\rho,p_1}(r) = \frac{\int_r^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt}{\int_1^\infty \rho(t) t^{\frac{n}{p_1'}-1} dt}, \; r > 0, \tag{12}$$

$$v_2(r) = w_2\left(\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(r)\right) \left(\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(r)\right)^{\frac{n}{p_2}} |(\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(r))'|^{\frac{1}{\theta_2}}, \; r > 0, \tag{13}$$

$$g_{n,\rho,p_1}(t) = \|f\|_{L_{p_1}\left(B(0,\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(t))\right)}, \; t > 0. \tag{14}$$

1. *Если* $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *или* $1 \leq p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \leq p_1$, *и* $\rho \in S_{n,p_1.p_2}$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)} f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \lesssim \|H g_{n,\rho,p_1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \tag{15}$$

равномерно по $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Если* $p_1 = 1$ *и* $0 < p_2 < \infty$, *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$, *то*

$$\|I_{\rho(\cdot)} f\|_{LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \approx \|H g_{n,\rho,1}\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \tag{16}$$

равномерно по всем функциям $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow)$ конус всех функций из $\mathfrak{M}^+((0,\infty))$ которые не возрастают на $(0,\infty)$, и положим

$$\mathbb{A} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) : \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0 \right\}.$$

Теорема 1.6.2 *Предположим, что* $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < p_2 \leq \infty$, $0 < \theta_1$, $\theta_2 \leq \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$, μ_{n,ρ,p_1} *определяется формулой* (12),

$$v_1(r) = w_1\left(\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(r)\right) \left| \left(\mu_{n,\rho,p_1}^{(-1)}(r)\right)' \right|^{\frac{1}{\theta_1}}, \; r > 0, \tag{17}$$

и v_2 *определяется формулой* (13).

1. *Пусть* $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *или* $1 \le p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \le p_1$, *и* $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. *Если оператор* H *ограничен из* $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ *в* $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ *на конусе* $\mathbb{A}$, *то есть*

$$\|Hg\|_{L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)} \lesssim \|g\|_{L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)} \tag{18}$$

равномерно по $g \in \mathbb{A}$, *то оператор* $I_{\rho(\cdot)}$ *ограничен из* $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ *в* $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$.

2. *Пусть* $p_1 = 1$, $0 < p_2 < \infty$ *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. *Тогда оператор* $I_{\rho(\cdot)}$ *ограничен из* $LM_{1\theta_1,w_1(\cdot)}$ *в* $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ *тогда и только тогда, когда оператор* H *ограничен из* $L_{\theta_1,v_1(\cdot)}(0,\infty)$ *в* $L_{\theta_2,v_2(\cdot)}(0,\infty)$ *на конусе* $\mathbb{A}$.

Теорема 1.7.1 *Предположим, что* $0 < \theta_1, \theta_2 \le \infty, w_1 \in \Omega_{\theta_1}, w_2 \in \Omega_{\theta_2}$.

1. *Пусть* $1 < p_1 < p_2 < \infty$ *или* $1 \le p_1 < \infty$ *и* $0 < p_2 \le \infty$, *и* $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$. *Тогда оператор* $I_{\rho(.)}$ *ограничен из* $LM_{p_1,\theta_1,w_1(\cdot)}$ *в* $LM_{p_2,\theta_2,w_2(\cdot)}$, *если выполняются следующие условия:*

(a) *если* $1 < \theta_1 \le \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_{11} := \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} < \infty,$$

где $w_{2,n,p_2}(x) = w_2(x)x^{\frac{n}{p_2}}$. *и*

$$B_{12} := \sup_{t>0} \left(\int_0^t w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \frac{w_1^{\theta_1}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(x)}{(\int_x^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds)^{\theta_1'}}dx\right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

(b) *если* $0 < \theta_1 \le 1$, $\theta_1 \le \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_2 :=$$

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \left(\int_0^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\min\{\mu_{n,\rho,p_1}(t), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\}^{\theta_2}dx\right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty,$$

(c) *если* $1 < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$, *то*

$$B_{31}:=\left(\int_0^\infty\left(\frac{\int_t^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(x)dx}{\int_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx}\right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(t)\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_2}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

и

$$B_{32} :=$$

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_z^\infty w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}}\left(\int_z^\infty \frac{\mu_{n,\rho,p_1}^{\theta_1'}(\tau)w_1^{\theta_1}(\tau)}{\left(\int_\tau^\infty w_1^{\theta_1}(u)du\right)^{\theta_1'}}d\tau\right)^{\frac{r}{\theta_1'}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(z)dz\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}$,

(d) *если* $0 < \theta_2 < \theta_1 \le 1$, *то* $B_{41} := B_{31} < \infty$ *и*

$$B_{42} :=$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \sup_{y<z<\infty} \mu_{n,\rho,p_1}(z)^r \left(\int\limits_z^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{-\frac{r}{\theta_1}} \left(\int\limits_0^y w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(x)dx\right)^{\frac{r}{\theta_1}} w_{2,n,p_2}^{\theta_2}(y)dy\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

(e) *если* $0 < \theta_1 \leq 1, \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_5 := \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{-\frac{1}{\theta_1}} \operatorname*{ess\,sup}_{x>0} w_{2,n,p_2}(x) \min\{\mu_{n,\rho,p_1}(t), \mu_{n,\rho,p_1}(x)\} < \infty,$$

(f) *если* $1 < \theta_1 < \infty, \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_6 :=$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z>0} w_{2,n,p_2}(z) \left(\int\limits_z^\infty \left(\int\limits_x^z \left(\int\limits_u^\infty w_1^{\theta_1}(s)ds\right)^{-1} \rho(u) u^{\frac{n}{p_1'}-1} du\right)^{\theta_1'} w_1^{\theta_1}(x)dx\right)^{\frac{1}{\theta_1'}} < \infty,$$

(g) *если* $\theta_1 = \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$, *то*

$$B_7 := \left(\int_0^\infty \left(w_{2,n,p_2}(\tau) \int_\tau^\infty \frac{\rho(z) z^{\frac{n}{p_1'}-1} dz}{\operatorname*{ess\,sup}_{z<s<\infty} w_1(s)}\right)^{\theta_2} d\tau\right)^{\frac{1}{\theta_2}} < \infty.$$

(h) *если* $\theta_1 = \theta_2 = \infty$, *то*

$$B_8 := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau>0} \left(\int_\tau^\infty \frac{\rho(z) z^{\frac{n}{p_1'}-1} dz}{\operatorname*{ess\,sup}_{z<s<\infty} w_1(s)}\right) w_{2,n,p_2}(\tau) < \infty.$$

2. *Пусть* $p_1 = 1, 0 < p_2 < \infty$ *и* $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$. *Тогда оператор* $I_{\rho(.)}$ *ограничен из* $LM_{1,\theta_1,w_1(.)}$ *в* $LM_{p_2,\theta_2,w_2(.)}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (a) - (h) *с* $p_1 = 1$.

Лемма 1.8.1 *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\beta < 0$, $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p_1}$, $0 < p_2 \leq \infty$, *причём при* $p_2 > p_1$ $n\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2}\right) < \alpha < \frac{n}{p_1}$, *и*

$$\rho(t) = t^{\alpha-n}(1 + |\ln t|)^\beta.$$

Тогда $\rho \in S_{n,p_1,p_2}$ *и при* $p_1 = 1$ $\rho \in \tilde{S}_{n,1,p_2}$.

Лемма 1.8.2 *В предположениях леммы 1.8.1*

$$\mu_{n,\rho,p_1}(r) \approx r^{\alpha-\frac{n}{p_1}}(1 + |\ln t|)^\beta = r^{\frac{n}{p_1'}}\rho(r)$$

равномерно по $r > 0$.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [2] и [3] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Глава 2

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению условий, обеспечивающих ограниченность обобщенных многомерных операторов Римана-Лиувилля из одного пространства типа Морри на параллелепипеде в другое и получению точных оценок норм этих операторов в зависимости от размеров параллелепипеда. Результаты второй главы опубликованы в работах [1] и [4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Определение 2.1.1 Пусть $0 < p, \theta \leq \infty$, $\lambda > 0$, если $\theta < \infty$, если $\theta = \infty$, то $\lambda \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримое по Лебегу множество. Говорят, что функция f принадлежит локальному пространству Морри $LM^{\lambda}_{p\theta,x_0}(\Omega)$, если f измерима по Лебегу на Ω и

$$\|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,x_0}(\Omega)} = \|r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(\Omega\bigcap B(x_0,r))}\|_{L_\theta(0,\infty)} < \infty.$$

Определение 2.1.2 Левосторонний многомерный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля I^{α}_{a+} порядка $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, ..., n, a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, определяется следующим образом:

$$\left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)}\int_{a_n}^{x_n}...\int_{a_1}^{x_1}\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i - t_i)^{\alpha_i - 1}\right)f(t_1, ..., t_n)dt_1...dt_n \tag{19}$$

для всех $x = (x_1, ..., x_n)$ $\mathbb{R}^n$ таких, что $x_i > a_i$, $i = 1, .., n$, где Γ - гамма-функция Эйлера.

Аналогично определяется правосторонний многомерный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_i > 0,$:

$$\left(I^{\alpha}_{b-}f\right)(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)}\int_{x_n}^{b_n}...\int_{x_1}^{b_1}\prod_{i=1}^{n}(t_i - x_i)^{\alpha_i - 1}f(t_1...t_n)dt_1...dt_n$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_i < b_i$, $i = 1, ..., n$.

Определение 2.1.3 Пусть $f \in L_p(\Omega)$, где $0 < p \leq \infty$, $\overline{k} = (k_1, ..., k_n)$, $k_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. Обобщенный дробный интегральный оператор Римана-Лиувилля $I^{\overline{\alpha},\overline{k}}f$ порядка $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, определяется следующим образом

$$\left(I^{\overline{\alpha},\overline{k}}_{a+}f\right)(x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\frac{(k_i+1)^{1-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_{a_n}^{x_n}...\int_{a_1}^{x_1}\prod_{i=1}^{n}\left[(x_i^{k_i+1} - t_i^{k_i+1})^{\alpha_i - 1}t_i^{k_i}\right]f(t_1, ..., t_n)dt_1...dt_n \tag{20}$$

Замечание 2.2.1. Если $k_i = 0$, $i = 1, ..., n$, $\overline{k} = 0$ в определении 2.1.1; мы получаем обычный интегральный оператор Римана-Лиувилля, определяемый формулой (**??**).

Определение 2.1.4 Пусть $\overline{p} = (p_1, ..., p_n)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_n)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$, $0 < p_i \leq \infty$, $0 < \theta_i \leq \infty$, $0 < \lambda_i < \infty$, $i = 1, ..., n$, $Q(\overline{a}, \overline{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i, i = 1, ..., n\}$.

$\overrightarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta},a}(Q(a,b))$, $\overleftarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\overline{\theta},a}(Q(a,b))$ - это пространства всех измеримых по Лебегу функций на $Q(a,b)$, для которых

$$\|f\|_{\overrightarrow{LM}^{\overline{\lambda}}_{\overline{p}\,\overline{\theta},a}Q(a,b)} = \left\|...\|f(x_1, ..., x_n)\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1\theta_1,a_1,x_1}((a_1,b_1))}...\right\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n\theta_n,a_n,x_n}((a_n,b_n))} < \infty,$$

и

$$\|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\bar\lambda}_{\bar p\bar\theta,a}Q(a,b)} = \left\| ... \|f(x_1,...,x_n)\|_{LM^{\lambda_n}_{p_n\theta_n,a_n,x_n}((a_n,b_n))} ... \right\|_{LM^{\lambda_1}_{p_1\theta_1,a_1,x_1}((a_1,b_1))} < \infty$$

соответственно.

Теорема 2.1.2 *Пусть* $1 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$, $0 \le \mu \le \frac{n}{q}$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$, $i = 1,...,n$. *Тогда существует* $C_1 > 0$ *такое, что*

$$\| I^{\alpha}_{a_+} f \|_{M^{\mu}_{q}(Q(a,b))} \le C_1 \mid b-a \mid^{\nu} \| f \|_{M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))}, \tag{21}$$

где

$$\nu = \lambda + \alpha_1 + ... + \alpha_n - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \mu, \tag{22}$$

для всех конечных параллелепипедов $Q(a,b)$ *и для всех* $f \in M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))$.

Показатель степени ν *не может быть заменен никаким другим.*

Замечание 2.1.1 Аналогичным образом можно получить результаты для правостороннего многомерного дробно-интегрального оператора Римана-Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $i = 1,...,n, \frac{1}{p} < \alpha_i < 1$.

Теорема 2.1.3 *Пусть* $1 \le p \le s \le \infty$, $0 < q \le s$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{s} < \alpha_i < 1, i = 1,...,n$, $0 \le \lambda \le \frac{n}{p}$,

$$0 \le \mu \le \frac{n}{q} - \frac{p(n-\alpha_1... - \alpha_n)}{p + s(p-1)}, \tag{23}$$

тогда существует $C_2 > 0$ *такое, что*

$$\left\|I^{\alpha}_{a_+} f\right\|_{M^{\mu}_{q}(Q(a,b))} \le C_2 \mid b-a \mid^{\nu} \| f \|_{M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))}, \tag{24}$$

где $\nu > 0$ *определяется по формуле (22), для всех конечных параллелепипедов* $Q(a,b)$ *и для всех* f $M^{\lambda}_{p}(Q(a,b))$.

Показатель ν *не может быть заменен никаким другим.*

Лемма 2.3.1 *Пусть* $0 < y < \infty$, $0 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $0 < \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\|f\|_{L_p(0,y)} \le (\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}} y^{\lambda} \|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,0}(0,y)} \tag{25}$$

(если $\theta = \infty$, *то предполагается, что* $(\lambda\theta)^{\frac{1}{\theta}} = 1$*).*

Лемма 2.3.2 *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$, $k \ge 0$, $0 < \theta \le \infty$, $0 < \sigma \le \infty$, $0 < \lambda, \mu < \infty$. *Тогда существует* $C_3 > 0$ *такое, что*

$$\|I^{\alpha k}_{0+} f\|_{LM^{\mu}_{q\sigma,a}(a,b)} \le C_3 (b-a)^{\nu} \|f\|_{LM^{\lambda}_{p\theta,a}(a,b)} \tag{26}$$

для всех конечных интервалов (a,b), *и для всех* $f \in LM^{\lambda}_{p\theta,a}(a,b)$, *где*

$$\nu = \lambda + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + (k+1)\alpha - \mu. \tag{27}$$

Теорема 2.3.1 *Пусть* $\tilde\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\tilde k = (k_1,...,k_n)$, $\overline{p} = (p_1,...,p_n)$, $\overline{q} = (q_1,...,q_n)$, $\overline{\lambda} = (\lambda_1,...,\lambda_n)$, $\overline{\mu} = (\mu_1,...,\mu_n)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,...,\theta_n)$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1,...,\sigma_n)$, $1 < p_i < \infty$, $0 < q_i \le \infty$, $\lambda_i > 0$, *если* $\theta_i < \infty$ *и* $\lambda_i \ge 0$, $\max\{p_i, \theta_i\} \le \min\{\sigma_j q_j\}$, *если* $\theta_i = \infty$, $\mu_i > 0$, *если* $\sigma_i > \infty$

и $\mu_i \geq 0$, *если* $\sigma_i = \infty$, $k_i \geq 0$, $\frac{1}{p} < \alpha_i < 1$. $i = 1, ..., n-1$ *и* $j = i+1, ..., n$. *Тогда существует* $C_4 > 0$, *такое, что*

$$\left\| I_{0_+}^{\bar{\alpha},\bar{k}} f \right\|_{\overrightarrow{LM}^{\bar{\mu}}_{\bar{q}\,\bar{\sigma},a}(Q(a,b))} \leq C_4 \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i)^{\nu_i} \|f\|_{\overleftarrow{LM}^{\bar{\lambda}}_{\bar{q}\,\bar{\sigma},a}(Q(a,b))}$$

где

$$\nu_i = \lambda_i + \frac{1}{q_i} + \alpha_i(k_i+1) - \frac{1}{p_i} - \mu_i, \; i = 1, ..., n$$

для всех конечных параллелепиппедов $Q(a,b)$ *и всех* $f \in \overleftarrow{LM}^{\lambda}_{\bar{p}\bar{\theta},a}((Q(a,b))$.

Каждое ν_i, $i = 1, ...; n$, *не может быть заменено на никакое другое.*

Заключение

В заключении диссертации приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем.

1. Задача об ограниченности обобщенного потенциала Рисса как оператора, действующего из одного общего локального пространства типа Морри на $\mathbb{R}^n$ в другое, сведена к задаче об ограниченности оператора Харди, как оператора, действующего из одного общего весового лебегова пространства в другое на конусе неотрицательных невозрастающих функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

2. Для всех допустимых значениях числовых параметров получены, близкие к необходимым, достаточные условия на функциональные параметры, характеризующие общие локальные пространства типа Морри, обеспечивающие ограниченность обобщенного потенциала Рисса как оператора, действующего из одного общего локального пространства типа Морри в другое.

3. Для некоторой области допустимых значений числовых параметров получены достаточные условия на функциональные параметры, которые совпадают с необходимыми.

Результаты, перечисленные в пунктах 1-3 являются обобщением результатов статьи[1], полученных для классических потенциалов Рисса, на случай широкого класса обобщенных потенциалов Рисса.

4. При надлежащих предположениях относительно числовых параметров доказана ограниченность многомерного интегрального оператора Римана-Лиувилля как оператора, действующего из одного пространства Морри на конечном параллелепипеде в другое, причем получены точные оценки зависимости нормы такого оператора от диаметра параллелепипеда.

5. Аналогичные результаты получены для обобщенного многомерного интегрального оператора Римана-Лиувилля, действующего из одного локального пространства Морри на конечном параллелепипеде в другое.

6. Доказана ограниченность обобщенного многомерного интегрального оператора Римана-Лиувилля, действующего из одного анизотропного локального пространства типа Морри на конечном параллелепипеде в надлежащем образом видоизмененное анизотропное локальное пространства типа Морри, причем получены точные оценки зави-

симости нормы такого оператора от длин ребер параллелепипеда. Для доказательства ограниченности использовался полученный в работе аналог обобщенного неравенства Минковского для локальных пространств типа Морри.

Результаты, перечисленные в пунктах 4-6, являются обобщением результатов статьи[2] , относящихся к одномерному случаю. Расширен диапазон параметров, для которых установлена ограниченность. Кроме того, в отличие от вышеуказанной статьи, получены точные оценки норм оператора Римана-Лиувилля, как в изотропном так и анизотропном случае, в изотропном случае в зависимости от диаметра параллелепипеда, и в анизотропном случае в зависимости от длин ребер параллелепипеда.

Автор выражает признательность научному руководителю д. ф.-м .н., проф. В. И. Буренкову за постановку задач, руководство в подготовке и постоянное внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Senouci M. A., Boundedness of Riemann-Liouville fractional integral operator in Morrey spaces //Eurasian Mathematical Journal, 2021, том 12, номер 1, стр. 82 – 91.

2. Burenkov V. I., Senouci M. A., Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces //Eurasian Mathematical Journal, 2021, том 12, номер 4 , стр. 92-98.

3. Burenkov V. I., Senouci M. A., On boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey-type spaces //Journal of Mathematical Sciences volume 266, (2023) pp. 765-793.

4. Senouci M. A., Boundedness of the generalized Riemann-Liouville operator in local Morrey-type spaces //Eurasian Mathematical Journal, 2023, том 14, номер 4, 63–68.

5. Senouci M. A., Boundedness of the multi-dimentional Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces. //Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», Москва. Ноябрь 2020. Материалы XXVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Второе издание. М.: МАКС Пресс, 2020.

6. Senouci M. A., Boundedness of the generalized RiemannLiouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces. // Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, Материалы Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа"(28 января – 2 февраля 2021 г.) Издательский дом ВГУ 2021, стр. 327-328.

7. Senouci M. A., Bornétude de l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville dans les espaces de Morrey. // ICRAMCS 2021 International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science, March 26-27, 2021, Casablanca, Morocco. Book of proceeding, p. 212. Proceedings ISSN : 2605-7700

[2] *Fu Z., Trujillo J., Wu Q.* Riemann-Liouville fractional calculus in Morrey spaces and applications // Comput Math Appl, 2016, http://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.013

8. Senouci M. A., Boundedness of generalized Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces. // Международная конференция "Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации". Сборник тезисов Международной конференции (г. Уфа, 4 – 7 октября 2021 г.), УФА АЭТЕРНА 2021, стр. 41.

9. Senouci M. A., On boundedness of the generalized riesz potential in local morrey type spaces. // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2022», Москва. Апрель 2022 Материалы XXIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». М.: МАКС Пресс, 2022.

Сенуси Марьям Абделькадеровна

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЩИХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ

Аннотация.

Известные результаты об ограниченности классического потенциала Рисса в общих локальных пространствах типа Морри обобщаются на случай интегральных операторов типа Рисса, в которых степенная функция заменяется общей функцией, удовлетворяющей определенным условиям. Для всех допустимых значений числовых параметров, характеризующих общие локальные пространства типа Морри, получены достаточные условия на функциональные параметры, характеризующие эти пространства, обеспечивающие ограниченность таких операторов из одного общего локального пространства типа Морри в другое, причем для некоторой области значений числовых параметров, эти условия являются также необходимыми.

Для оператора Римана-Лиувилля и обобщенного оператора Римана-Лиувилля получены точные оценки норм этих операторов, как операторов, действующих из одного локального пространства Морри на параллелепипеде в другое, в зависимости от размеров параллелепипеда. Подобные точные оценки получены также для анизотропных локальных пространств Морри.

Senouci Mariam Abdelkaderovna

ON THE BOUNDEDNESS OF INTEGRAL OPERATORS IN GENERAL MORREY-TYPE SPACES

Abstract.

The known results on the boundedness of the classical Riesz potential in general local Morrey-type spaces are generalized to the case of integral operators of the Riesz type, in which the power function is replaced by a general function satisfying certain conditions. For all admissible values of the numerical parameters characterizing general local Morrey-type spaces, sufficient conditions have been obtained on the functional parameters characterizing these spaces, ensuring the boundedness of such operators from one general

local Morrey-type space to another one. Moreover, for a certain range of the numerical parameters, these conditions are also necessary.

For the Riemann-Liouville operator and the generalized Riemann-Liouville operator, sharp estimates are obtained for the norms of these operators, as operators acting from one local Morrey-type space on a parallelepiped to another one, depending on the parallelepiped dimensions. Similar sharp estimates are also obtained for anisotropic local Morrey spaces.