ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ»

*На правах рукописи*

Чинь Фыок Тоан

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БИРКГОФА

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Савчин Владимир Михайлович

Москва — 2025

## Оглавление

# Введение

## Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

В 1927 году Дж. Д. Биркгоф представил новую форму уравнений движения конечномерных систем [1], являющихся обобщением канонических уравнений Гамильтона. В 1983 году Р. М. Сантилли предложил назвать их уравнениями Биркгофа [2].

В работах [2, 3] были рассмотрены вопросы представления в их форме уравнений движения неконсервативных механических систем, получены необходимые и достаточные условия самосопряженности системы дифференциальных уравнений первого порядка, а также вопрос существования аналога уравнения Гамильтона-Якоби для уравнений Биркгофа. Были разработаны два метода приведения системы дифференциальных уравнений первого порядка к форме уравнений Биркгофа.

А. С. Галиуллин совместно с соавторами поставили возможные варианты прямых и обратных задач динамики таких систем [4].

Ф. С. Мей и другие ученые получили ряд результатов по теории интегрирования уравнений Биркгофа, симметриям, устойчивости, а также по построению интегрального инварианта по заданному первому интегралу [5–9].

Подчеркнем, что в указанных исследованиях рассматривались случаи с непрерывным временем. Решение некоторых конкретных задач приводит к необходимости дискретизации уравнений движения систем Биркгофа. Методы дискретизации дифференциальных задач приводят к разностным уравнениям, теории которых были предметом исследования А. А. Самарского [10, 11].

К авторам ранних работ по дискретной механике относятся, в частности, Дж. А. Кадзоу [12, 13], Дж. Д. Логан [14–16], С. Маеда [17, 18] и Т. Д. Ли [19, 20], благодаря которым были определены дискретная сумма действия, дискретные уравнения Эйлера-Лагранжа. Затем эта теория получила дальнейшее развитие в терминах интегрируемых систем в работах Ю. К. Мозера и А. П. Веселова [21–23].

Вариационный взгляд на дискретную механику стал основой работ Дж. М. Вендландта и Дж. Э. Марсдена [24, 25], а затем был расширен в работах С. Кейна, Дж. Э. Марсдена, М. Ортиса, Э. А. Репетто и М. Уэста [26–28], Дж. Е. Марсдена, С. Пекарского и С. Школлера [29, 30], А. И. Бобенко и Ю. Б. Суриса [31, 32]. В работе Дж. Е. Марсдена и М. Уэста [33] дается обзор алгоритмов интегрирования уравнений движения конечномерных механических систем, основанных на дискретных вариационных принципах.

Дискретизацией уравнений движения систем Биркгофа занимались многие ученые. В работах Х. Л. Су и М. З. Цини [34], Ю. Дж. Суни и З. Дж. Шана [35] дискретизация основана на методе производящих функций, а в работах С. С. Лю, С. Лю и Ю. С. Го [36], С. Л. Конга, Х. Б. Ву и Ф. С. Меи [37], С. С. Лю, В. Хуа и Ю. С. Го [38] — на прямой дискретизации вариационного принципа. В трудах этих ученых не рассматриваются вопросы о сохранении при дискретизации свойств исходных дифференциальных уравнений, в частности, потенциальность и интегральные инварианты.

В случае непрерывного времени изучение интегральных инвариантов в механике ведется уже долгое время. Основы теории интегральных инвариантов были заложены А. Пуанкаре [39] и продолжены Э. Картаном [40]. Взаимосвязь интегральных инвариантов с интегралами уравнений движения систем с бесконечным числом степеней свободы была установлена в работах В. М. Савчина [41].

Вопросы об относительных интегральных инвариантах первого порядка систем Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы и дискретном по времени аналоге в литературе, насколько нам известно, пока не исследовались.

Таким образом, диссертация по теме «Некоторые свойства дискретных динамических систем Биркгофа» имеет высокую актуальность в современной науке.

**Цели и задачи работы.**

Целью данной работы является исследование свойств динамических систем с дискретным временем, соответствующих непотенциальным конечномерным и бесконечномерным динамическим системам с «непрерывным» временем в рамках механики Биркгофа (косвенные вариационные принципы, интегральные инварианты, потенциальность), и их приложения с численными результатами.

Достижение указанных целей осуществляется путем решения следующих основных задач:

1. Исследование существования решения обратной задачи вариационного исчисления — аналога классического действия по Гамильтону — для одной краевой задачи для системы Соболева, описывающей движение жидкости во вращающемся сосуде.
2. Разработка вариационного подхода к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением.
3. Развитие теории потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантов для уравнений движения как конечномерных, так и бесконечномерных систем Биркгофа.

**Научная новизна.**

1. Доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени.

Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи.

2. Разработан вариационный подход к построению и исследованию дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением.
3. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего дискретного действия по Гамильтону.
4. Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построены разностный аналог с дискретным временем и линейный относительный интегральный инвариант первого порядка. Получена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

**Теоретическая и практическая значимость работы.**

Полученные результаты могут быть применены для исследования широких классов уравнений движения конечномерных и бесконечномерных систем с непотенциальными операторами. Их можно использовать в рамках курса «Аналитическая динамика». Кроме того, результаты диссертационной работы могут служить основой постановок задач для выпускных квалификационных работ студентов бакалавриата и магистерских диссертаций по направлениям “Математика” и “Прикладная математика и информатика”.

Алгоритмы построения обобщенного действия по Гамильтону — функционала, являющегося полуограниченным на решениях одной краевой задачи для системы Соболева, и построения дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением могут быть применены и для ряда других задач.

**Методология и методы исследования.**

Исследования основываются на методах аналитической динамики и современного вариационного исчисления, применении вариационных принципов, теории разностных схем решения систем дифференциальных уравнений. В диссертации используется также пакет программ Матлаб.

**Положения, выносимые на защиту.**

На защиту выносятся следующие новые и содержащие элементы новизны основные положения:

1. Алгоритм построения аналога классического действия по Гамильтону — функционала, являющегося полуограниченным на решениях обратной задачи вариационного исчисления для одной краевой задачи для системы Соболева.
2. Дискретная математическая модель движения маятника с вибрационным подвесом с трением. Разработка понятия потенциальности дискретной системы.
3. Общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Построение их разностного аналога с дискретным временем.
4. Разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.
5. Иллюстративные примеры.

**Содержание работы.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 102 страницы, включая список литературы из 66 наименований.

В главе 1 доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи.

В параграфе 1.1 приведены некоторые сведения о производной Гато, нелокальных билинейных формах, потенциальных операторах, которые будут использоваться в дальнейшем.

В параграфе 1.2 рассмотрена следующая система уравнений в частных производных Соболева:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{N}_i(u,p) \equiv \frac{\partial u^i}{\partial t} - [u \times \kappa]^i + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \mathcal{F}_i, \quad i = \overline{1,3},\\
&\widetilde{N}_4(u,p) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \mathcal{F}_4,\\
&(x,t) = (x^1, x^2, x^3, t) \in Q_T = \Omega \times (0,T),
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

где компоненты $u^1$, $u^2$, $u^3$ вектора $u$ и $p$ — неизвестные функции, область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью $\partial\Omega$, $\mathcal{F}_i$, $i = \overline{1,4}$ — заданные непрерывные функции на $Q_T$, $\kappa$ — единичный вектор $(0,0,1)$.

Обозначая $N = \left(\widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{N}_3, \widetilde{N}_4\right) - (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$, зададим область определения

$$
\begin{aligned}
D(N) = \Big\{(u,p)\colon u^i \in C^1\left(\overline{Q}_T\right), p \in C^1\left(\overline{\Omega}\right); u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x^1, x^2, x^3),&\\
u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x^1, x^2, x^3), i = \overline{1,3}, p|_{\partial\Omega} = 0\Big\},&
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

где $\varphi^i(x), \psi^i(x) \in C(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1,3}$ — заданные функции, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$.

**Теорема 0.1.** *Оператор* (0.1) *не является потенциальным на множестве* (0.2) *относительно нелокальной билинейной формы*

$$\langle v, g \rangle \equiv \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} v^i(x,t) g^i(x,t)\, dxdt.$$

**Теорема 0.2.** *Не существует матричного вариационного множителя* $M = \{m_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{4}$ *для оператора* $N$ (0.1).

**Теорема 0.3.** *Функционал вида*

$$F_N[u] = \frac{1}{2} \int\limits_{Q_T} \int\limits_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left( u^i(x,t) A_{1,i} + \left( [u(x,t) \times \kappa]^i + \mathcal{F}_i \right) A_{2,i} + p(x) A_{3,i} \right) \right.$$
$$\left. + \left( \sum_{i=1}^{3} u^i(x,t) B_{1,i} + \mathcal{F}_4 B_{2,i} \right) \right\} dy d\lambda dx dt,$$

*где*

$$\mathcal{K}(x,t,y,\lambda) \equiv \mathcal{K} = exp\left( \sum_{i=1}^{3} x^i y^i + t\lambda \right),$$

$$A_{1,i} = u^i(y,\lambda) D_t \left[ \phi^i(x,t) D_\lambda \left[ \mathcal{K} \phi^i(y,\lambda) \right] \right] + [u(y,\lambda) \times \kappa]^i \phi^i(y,\lambda) D_t \left[ \mathcal{K} \phi^i(x,t) \right]$$
$$+ p(y) D_t \left[ \phi^i(x,t) D_{y^i} \left[ \mathcal{K} \phi^i(y,\lambda) \right] \right] + \phi^i(y,\lambda) D_t \left[ \mathcal{K} \phi^i(x,t) \mathcal{F}_i \right],$$

$$A_{2,i} = u^i(y,\lambda) \phi^i(x,t) D_\lambda \left[ \mathcal{K} \phi^i(y,\lambda) \right] + [u(y,\lambda) \times \kappa]^i \mathcal{K} \phi^i(x,t) \phi^i(y,\lambda)$$
$$+ p(y) \phi^i(x,t) D_{y^i} \left[ \mathcal{K} \phi^i(y,\lambda) \right] + \mathcal{K} \phi^i(x,t) \phi^i(y,\lambda) \mathcal{F}_i,$$

$$A_{3,i} = u^i(y,\lambda) D_{x^i} \left[ \phi^i(x,t) D_\lambda \left[ \mathcal{K} \phi^i(y,\lambda) \right] \right] + p(y) D_{x^i} \left[ \phi^i(x,t) D_{y^i} \left[ \mathcal{K} \phi^i(y,\lambda) \right] \right]$$
$$+ [u(y,\lambda) \times \kappa]^i \phi^i(y,\lambda) D_{x^i} \left[ \mathcal{K} \phi^i(x,t) \right] + \phi^i(y,\lambda) D_{x^i} \left[ \mathcal{K} \phi^i(x,t) \mathcal{F}_i \right],$$

$$B_{1,i} = \sum_{j=1}^{3} u^j(y,\lambda) D_{x^i} \left[ \phi^4(x,t) D_{y^j} \left( \mathcal{K} \phi^4(y,\lambda) \right) \right] + \phi^4(y,\lambda) D_{x^i} \left[ \mathcal{K} \phi^4(x,t) \mathcal{F}_4 \right],$$

$$B_{2,i} = \sum_{j=1}^{3} u^j(y,\lambda)\phi^4(x,t)D_{y^j}\big(\mathcal{K}\phi^4(y,\lambda)\big) + \mathcal{K}\phi^4(x,t)\phi^4(y,\lambda)\mathcal{F}_4,$$

*полуограничен на решениях задачи* (0.1), (0.2).

Здесь $\phi^i$, $i = \overline{1,4}$ — произвольные функции класса $C^1\big(\overline{Q}_T\big)$ такие, что $\phi^i(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in Q_T$ и $\phi^i\big|_{t=0} = 0$, $\phi^i\big|_{t=T} = 0$, $i = \overline{1,3}$; $\phi^4|_{\partial\Omega} = 0$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_{y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Среди возможных обобщений гамильтоновых систем особое положение занимают системы Биркгофа, динамика которых описывается четным числом дифференциальных уравнений первого порядка. В параграфе 1.3 приведены уравнения движения этих систем и подход к представлению непотенциальных систем в форме Биркгофа.

В главе 2 разработан вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с вибрационным подвесом с трением и одной диссипативной задачи. Построены системы дискретных уравнений Биркгофа. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону.

В параграфе 2.1 рассмотрена следующая краевая задача, связанная с движением маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол наклона с вертикалью:

$$N(u) \equiv \ddot{u}(t) + K(t)\dot{u}(t) + \Theta(t)\sin u + \Psi(t)\cos u = 0, \quad t \in (0,T), \tag{0.3}$$

$$D(N) = \{u \in U = C^2[0,T]: u|_{t=0} = \varphi, u|_{t=T} = \psi\}. \tag{0.4}$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, $K \in C^1[0,T]$, $\Theta$, $\Psi \in C[0,T]$ — заданные функции, $\varphi$, $\psi$ — заданные числа, $\dot{u} = \frac{d}{dt}u(t)$, $\ddot{u} = \frac{d^2}{dt^2}u(t)$.

**Теорема 0.4.** *При* $K(t) \neq 0$ *задача* (0.3), (0.4) *не допускает прямой вариационной формулировки относительно билинейной формы*

$$\langle v, g \rangle \equiv \int_0^T v(t) g(t)\, dt.$$

**Теорема 0.5.** *Для задачи* (0.3), (0.4) *существует вариационный множитель вида* $M(t) = e^{\int K(t)\, dt}$.

**Теорема 0.6.** *Уравнение*

$$\widehat{N}(u) \equiv e^{\int K(t)\, dt} N(u) = 0, \quad u \in D(N), \tag{0.5}$$

*где* $N$ *имеет вид* (0.3)*, представимо в форме уравнений Гамильтона*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -e^{-\int K(t)\, dt} p, \\ \dot{p} &= e^{\int K(t)\, dt} (\Theta(t) \sin u + \Psi(t) \cos u). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Действия по Гамильтону для (0.5) и (0.6) имеют соответственно вид:

$$F[u] = \int_0^T M(t) \left( -\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \Theta(t) \cos u + \Psi(t) \sin u \right) dt, \tag{0.7}$$

$$J[p, u] = \int_0^T [p\dot{u} - H(t, p, u)]\, dt, \tag{0.8}$$

где

$$H(t, p, u) = -\frac{p^2}{2M(t)} + M(t)\Theta(t) \cos u - M(t)\Psi(t) \sin u.$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на $m$ равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(t) = \overline{u}_r = \big(u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{m-1})\big),$$

где $r = m - 1$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$. Для удобства напишем $\tilde{u}_k = u(t_k)$, $M_k \equiv M(t_k)$, $\Theta_\mathrm{k} \equiv \Theta(t_k)$, $\Psi_k \equiv \Psi(t_k)$, $k = \overline{0, m}$.

Получаем системы разностных уравнений на основе функционалов (0.7) и (0.8), соответственно, в виде

$$\overline{N}_k^F(\overline{u}_r) \equiv M_k \frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau^2} - M_{k-1} \frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tau^2} + M_k \Theta_{\mathrm{k}} \sin \tilde{u}_k + M_k \Psi_k \cos \tilde{u}_k = 0,$$

$k = \overline{1, m-1}$

и

$$\overline{N}_{1,k}^J \equiv \frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau} + \frac{\tilde{p}_k}{M_k} = 0,$$

$$\overline{N}_{2,k}^J \equiv -\frac{\tilde{p}_{k+1} - \tilde{p}_k}{\tau} + M_{k+1}\Theta_{k+1} \sin \tilde{u}_{k+1} + M_{k+1}\Psi_{k+1} \cos \tilde{u}_{k+1} = 0,$$

$k = \overline{0, m-1}$.

В этом параграфе также приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи о движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по синусоидальному закону вдоль прямой, наклоненной к вертикальной оси $OY$ под углом α, являющейся частным случаем задачи (0.3), (0.4).

Во параграфе 2.2 проведено сравнение аналитического и приближенных решений заданной диссипативной задачи, допускающей бивариационные формулировки. Изложенная идея применения альтернативных действий по Гамильтону для получения приближенных моделей с сохранением свойства потенциальности и отыскания их решений при некоторых условиях может быть распространена и на ряд других задач. В параграфе 2.3 построены дискретные динамические системы Бирктофа.

В параграфе 2.4 введено понятие потенциальности дискретной системы.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на $m$ равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(t) = \overline{u}_r = (u^1(t_1), u^2(t_1), \dots, u^{2n}(t_1), u^1(t_2), u^2(t_2), \dots, u^{2n}(t_2), \dots, \\ u^1(t_{m-1}), u^2(t_{m-1}), \dots, u^{2n}(t_{m-1})),$$

где $r = 2n(m-1)$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$.

**Определение 0.1.** *Дискретный оператор* $\overline{N}_r\colon D(\overline{N}_r) \to \mathbb{R}^r$ *называется потенциальным в области* $D(\overline{N}_r)$ *относительно билинейной формы* $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \overline{U}_r \times \overline{U}_r \to \mathbb{R}$, *если существует функционал* $F_{\overline{N}_r}\colon \overline{U}_r \to \mathbb{R}$ *такой, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r + \varepsilon\overline{h}_r] - F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r]}{\varepsilon} = \langle \overline{N}_r(\overline{u}_r), \overline{h}_r\rangle \quad \forall\, \overline{u}_r \in D(\overline{N}_r), \forall\, \overline{h}_r \in D\left(\overline{N}_r'\right).$$

*При этом* $F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r]$ *называется потенциалом оператора* $\overline{N}_r(\overline{u}_r)$.

**Теорема 0.7.** *Пусть дифференцируемый по Гато оператор* $\overline{N}_r\colon D(\overline{N}_r) \to \mathbb{R}^r$ *и билинейная форма*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \overline{U}_r \times \overline{U}_r \to \mathbb{R}$$

*такие, что для любых фиксированных элементов* $\overline{u}_r \in D(\overline{N}_r)$, $\overline{h}_r, \overline{g}_r \in D\left(\overline{N}_r'\right)$ *функция* $\varphi(\varepsilon) \equiv \langle \overline{N}_r(\overline{u}_r + \varepsilon\overline{h}_r), \overline{g}_r\rangle \in C^1[0,1]$. *Тогда для потенциальности оператора* $\overline{N}_r$ *в односвязной области* $D(\overline{N}_r)$ *относительно заданной билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\left\langle \overline{N}_r'\overline{h}_r, \overline{g}_r \right\rangle = \left\langle \overline{N}_r'\overline{g}_r, \overline{h}_r \right\rangle.$$

*При этом*

$$F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r] = \int_0^1 \left\langle \overline{N}_r\left(\overline{u}_r^0 + \lambda(\overline{u}_r - \overline{u}_r^0)\right), \overline{u}_r - \overline{u}_r^0 \right\rangle d\lambda,$$

*где* $\overline{u}_r^0 \in D(\overline{N}_r)$ *— фиксированный элемент.*

В главе 3 из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построен разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности системы уравнений вида $C(x,t,u)u_t + E(x,t,u_\alpha) = 0$ относительно заданной билинейной формы. Представлены алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону и преобразование этой системы к форме уравнений Биркгофа для бесконечномерной системы. На основе найденного действия получен дискретный аналог заданной системы уравнений. Рассмотрен иллюстративный пример.

В параграфе 3.1 предположено, что действие по Гамильтону имеет вид

$$F[u] = \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i(x,t,u_\alpha)u_t^i - B(u_\alpha)\right] dxdt, \tag{0.9}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l), |\alpha| = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i, |\alpha| = \overline{0,s},$$

где $R_i = R_i(x,t,u_\alpha)$, $B = B(u_\alpha)$ — заданные достаточно гладкие функции, $u(x,t) = \left(u^1(x,t), u^2(x,t), \dots, u^{2n}(x,t)\right)^{\mathbb{T}}$, $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega$ — ограниченная область из $\mathbb{R}^l$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $u_t^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $i = \overline{1,2n}$, $u_\alpha = D_\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{(\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial x_2)^{\alpha_2}\dots(\partial x_l)^{\alpha_l}}$.

Будем рассматривать функционал (0.9) на множестве

$$D(N) = \Big\{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^{\mathbb{T}} \colon u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big) \colon u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x),$$

$$u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x), \frac{\partial^\nu u^i}{\partial n_x^\nu}\bigg|_{\Gamma_T} = \omega_\nu^i(x,t), i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0,s-1}\Big\},$$

где $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $n_x$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\varphi^i(x)$, $\psi^i(x)$, $\omega_\nu^i(x,t)$, $i = \overline{1,2n}$, $|\nu| = \overline{0,s-1}$ — заданные достаточно гладкие функции.

**Теорема 0.8.** *Экстремали функционала* (0.9) *являются решениями системы уравнений*

$$N_j \equiv \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \left[ \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial R_i}{\partial u_\alpha^j} \right) - \frac{\partial R_j}{\partial u_\beta^i} \right] D_\beta\, u_t^i$$
$$- \frac{\partial R_j}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^j} = 0, \quad j = \overline{1,2n}, \tag{0.10}$$

*где*

$$\binom{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\dots\binom{\alpha_l}{\beta_l}, \text{ *если* } \forall i \in \{1,2,\dots,l\}: \alpha_i \geq \beta_i, \\ 0, \text{ *если* } \exists i \in \{1,2,\dots,l\}: \alpha_i < \beta_i, \end{cases}$$
$$\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!\,(\alpha_i - \beta_i)!}.$$

Разобьем отрезок $[0,T]$ на $m$ равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0,m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(x,t) = \overline{u}_r = (u^1(x,t_1), u^2(x,t_1), \dots, u^{2n}(x,t_1), u^1(x,t_2), u^2(x,t_2), \dots, u^{2n}(x,t_2), \dots, u^1(x,t_{m-1}), u^2(x,t_{m-1}), \dots, u^{2n}(x,t_{m-1})\big),$$

где $r = 2n(m-1)$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$. Для удобства обозначим $\tilde{u}_k = u(x,t_k)$, $\tilde{u}_k^i = u^i(x,t_k)$, $R_{i,k} = R_i(x,t_k,D_\alpha\tilde{u}_k)$, $B_k = B(D_\alpha\tilde{u}_k)$, $k = \overline{0,m}$, $i = \overline{1,2n}$.

**Теорема 0.9**. *Уравнения*

$$\overline{N}_{i,k} \equiv \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left[ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial\left(D_\alpha \tilde{u}_k^i\right)} \right] D_\beta \left( \frac{\tilde{u}_{k+1}^j - \tilde{u}_k^j}{\tau} \right) - \frac{R_{i,k} - R_{i,k-1}}{\tau}$$
$$- \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[ \frac{\partial B_k}{\partial\left(D_\alpha \tilde{u}_k^i\right)} \right] = 0, i = \overline{1,2n}, k = \overline{1,m-1}$$

*являются разностным по времени аналогом* (0.10).

Здесь

$$D(\overline{N}) = \left\{ (\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m) : \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i(x), \tilde{u}_m^i = \psi^i(x), \tilde{u}_k^i \in C^{2s}\big(\overline{\Omega}\big), \right.$$

$$\left.\frac{\partial^\nu \tilde{u}_k^i}{\partial n_x^\nu}\right|_{\partial\Omega} = \omega_\nu^i(x, t_k), i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}, k = \overline{0, m}\Bigg\}.$$

Во параграфе 3.2 найдена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

Пусть $u = u(\lambda; x, t), \lambda \in \Lambda = [0,1]$ — произвольное однопараметрическое множество элементов из $U$, непрерывно дифференцируемых по $\lambda$. Его можно рассматривать как кривую $\mathcal{G}$ в $U$. Будем считать, что $u(0; x, t) = u(1; x, t)\ \ \forall (x, t) \in Q_T$, т. е. кривая замкнута.

**Теорема 0.10.** *Система уравнений* (0.10) *имеет относительный интегральный инвариант первого порядка вида*

$$\int_\Lambda \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i\, \delta u^i dx = \oint_{\mathcal{G}} \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_i\, \delta u^i dx, \tag{0.11}$$

*где*

$$\delta u^i = \frac{\partial u^i(\lambda; x, t)}{\partial \lambda} d\lambda, i = \overline{1,2n}.$$

**Теорема 0.11.** *Формула*

$$\oint_{\mathcal{G}} \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} R_{i,k-1}\, \delta \tilde{u}_k^i dx, k = \overline{1, m},$$

*где*

$$\delta \tilde{u}_k^i = \frac{\partial \tilde{u}^i(\lambda; x, t_k)}{\partial \lambda} d\lambda, i = \overline{1,2n},$$

*определяет дискретный по времени аналог относительно интегрального инварианта первого порядка* (0.11).

В параграфе 3.3 рассмотрена следующая система уравнений:

$$N(u) \equiv C(x, t, u) u_t + E(x, t, u_\alpha) = 0, \tag{0.12}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i$, $|\alpha| = \overline{0, s}$, $C(x,t,u)$ — заданная матрица $\left[C_{ij}(x,t,u)\right]_{2n\times 2n}$, $E(x,t,u_\alpha) = \left(E_1(x,t,u_\alpha), E_2(x,t,u_\alpha), \dots, E_{2n}(x,t,u_\alpha)\right)^{\mathbb{T}}$ — заданная вектор-функция, $u = (u^1, \dots, u^{2n})^{\mathbb{T}}$ — неизвестная вектор-функция.

$C_{ij}\colon \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ и $E_i\colon \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{q} \to \mathbb{R}$ — заданные достаточно гладкие функции, $q$ — размерность вектора $\{u_\alpha\}$, $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$.

Будем рассматривать систему уравнений (0.12) на множестве

$$D(N) = \Big\{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^{\mathbb{T}}\colon u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big):$$

$$u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x), u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x), \left.\frac{\partial^\nu u^i}{\partial n_x^\nu}\right|_{\Gamma_T} = \omega_\nu^i(x,t), \tag{0.13}$$

$$i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}\Big\},$$

где $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $n_x$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\varphi^i(x)$, $\psi^i(x)$, $\omega_\nu^i(x,t)$, $i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}$ — заданные достаточно гладкие функции.

**Теорема 0.12.** *Система* (0.12) *является потенциальной на* $D(N)$ (0.13) *относительно билинейной формы*

$$\langle v(x,t), g(x,t)\rangle \equiv \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} v^i(x,t) g^i(x,t)\, dx\, dt$$

*тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\begin{cases} C_{ij} + C_{ji} = 0, \\ \dfrac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} + \dfrac{\partial C_{iz}}{\partial u^j} + \dfrac{C_{zj}}{\partial u^i} = 0, \\ \dfrac{\partial C_{ji}}{\partial t} = \displaystyle\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha\left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i}\right) - \frac{\partial E_i}{\partial u^j}, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=1}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i}\right) - \frac{\partial E_i}{\partial u_\beta^j} = 0, \end{cases}$$

*где* $i, j, z = \overline{1,2n}$, $|\beta| = \overline{1, s}$.

При выполнении вышеуказанных условий соответствующее действие по Гамильтону можно представить в виде

$$F_N[u]=\int_0^T\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{2n}R_i(x,t,u)u_t^i-B(x,t,u_\alpha)\right)dxdt, \tag{0.14}$$

где $R_i(x,t,u)$, $i=\overline{1,2n}$, $B(x,t,u_\alpha)$ — достаточно гладкие функции.

**Теорема 0.13.** *Экстремали функционала* (0.14) *являются решениями системы уравнений*

$$N_i\equiv\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_j(x,t,u)}{\partial u^i}-\frac{\partial R_i(x,t,u)}{\partial u^j}\right)u_t^j-\frac{\partial R_i(x,t,u)}{\partial t}-\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta u^i}=0, \tag{0.15}$$

$$i=\overline{1,2n},$$

*где* $\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta u^i}$ *— функциональная производная* $\mathfrak{B}$ *по* $u^i$, $i=\overline{1,2n}$.

Функции $R_i(x,t,u)$ и функционал $\mathfrak{B}[t,u]$ можно находить по формулам

$$R_i(x,t,u)=-\int_0^1\sum_{j=1}^{2n}\lambda C_{ij}\big(x,t,\hat{u}+\lambda(u-\hat{u})\big)\big(u^j-\hat{u}^j\big)d\lambda,\ i=\overline{1,2n},$$

$$\mathfrak{B}[t,u]=-\int_\Omega\int_0^1\sum_{i=1}^{2n}\left[\frac{\partial R_i}{\partial t}\big(x,t,\hat{u}+\lambda(u-\hat{u})\big)+E_i\big(x,t,\hat{u}_\alpha+\lambda(u_\alpha-\hat{u}_\alpha)\big)\right]\big(u^i-\hat{u}^i\big)d\lambda dx+\text{const},$$

где $\hat{u}$ — произвольный фиксированный элемент из $D(N)$.

**Теорема 0.14.** *Уравнения*

$$\overline{N}_{i,k}\equiv\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial R_j(x,t_k,\tilde{u}_k)}{\partial\tilde{u}_k^i}\frac{\tilde{u}_{k+1}^j-\tilde{u}_k^j}{\tau}-\frac{R_i(x,t_k,\tilde{u}_k)-R_i(x,t_{k-1},\tilde{u}_{k-1})}{\tau}-\frac{\delta\mathfrak{B}[t_k,\tilde{u}_k]}{\delta\tilde{u}_k^j}=0,$$

$$k=\overline{1,m-1},i=\overline{1,2n},$$

*являются разностным по времени аналогом* (0.15).

Здесь

$$D(\overline{N})=\big\{(\tilde{u}_0,\overline{u}_r,\tilde{u}_m):\overline{u}_r\in\overline{U}_r,\tilde{u}_0^i=\varphi^i(x),\tilde{u}_m^i=\psi^i(x),\tilde{u}_k^i\in C^{2s}\big(\overline{\Omega}\big),$$

$$\left.\frac{\partial^{\nu}\tilde{u}_k^i}{\partial n_x^{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = \omega_{\nu}^i(x, t_k), i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}, k = \overline{0, m}\Bigg\}.$$

**Степень достоверности полученных результатов.**

Достоверность полученных теоретических результатов обоснована приведёнными доказательствами теорем, корректностью проведённых математических преобразований и дополнительно подтверждена результатами иллюстрирующих примеров, согласующимися с выводами теории. Достоверность полученных результатов обусловлена также их обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

**Апробация работы.**

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на VI международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии» (ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, 16–17 сентября 2020 г.); на LVII Всероссийской научно-практической конференции «Всероссийская научно-практическая конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники» (РУДН, Москва, 17–21 мая 2021 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (ВГУ, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», (ВГУ, Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.); на III Международной конференции «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ» (МФТИ, МИАН, МЦМУ МИАН, г. Долгопрудный, 5–13 июля 2023 г.); на научном семинаре «Непотенциальные динамические системы и нейросетевые технологии» под руководством профессора В. М. Савчина и доцента С. Г. Шорохова

(РУДН, Москва, 18 апреля 2023 г. и 4 декабря 2023г.); на объединённом научном семинаре Института компьютерных наук и телекоммуникаций под руководством профессора Л.А Севастьянова (РУДН, Москва, 14 февраля 2024 г.).

**Личный вклад автора.** Результаты совместных работ, включенные в диссертацию, получены автором лично.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 статьях, 1 из которых издана в периодическом научном журнале индексируемом в MathSciNet [42], 3 — в периодических научных журналах, индексируемых в Web of Science [43–45], а также в следующих материалах конференций.

1. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Динамические модели с дискретным временем, соответствующие операторам типа Биркгофа. Материалы VI Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова (Елец, 16–17 сентября 2020 г.). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. стр. 22–27.
2. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. О дискретных системах с потенциальными операторами. Материалы LVII Всероссийской научно-практической конференции «Всероссийская научно-практическая конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники» (Москва, 17–21 мая 2021 г.). Москва: РУДН, 2021. 5 с.
3. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Об использовании косвенного вариационного принципа для исследования дискретной модели движения маятника с вибрирующим подвесом. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики,

информатики и механики» (Воронеж, 13–15 декабря 2021 г.). Воронеж: ВГУ, 2022, стр. 124–129.

4. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. К бесконечномерным системам Биркгофа: вариационность, дискретизация и интегральные инварианты. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.). Воронеж: ВГУ, 2023, стр. 122–126.
5. Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Об интегральных инвариантах уравнений Биркгофа для бесконечномерных систем. Тезисы докладов III Международной конференции «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ» (Долгопрудный, 5–13 июля 2023 г.). Долгопрудный: МФТИ, МИАН, МЦМУ МИАН, 2023, стр. 259–261.

# Глава 1. Непотенциальные системы

В настоящей главе доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи. Приведены уравнения движения систем Биркгофа и представление непотенциальных систем в форме Биркгофа.

## 1. 1 Необходимые сведения об основах вариационного исчисления в операторной форме

В этом параграфе приведены некоторые сведения о производной Гато, нелокальных билинейных формах, потенциальных операторах из монографии [41], которые будут использоваться в дальнейшем.

### Дифференцируемые по Гато операторы

Пусть $U$, $V$ — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $U \subseteq V$; $0_U$ и $0_V$ — нулевые элементы в $U$ и $V$ соответственно.

Пусть задан оператор $N: D(N) \subseteq U \to R(N) \subseteq V$, где $D(N)$ — область определения и $R(N)$ — область значений. Через $\widetilde{U}$ обозначим множество, состоящее из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.

**Определение 1.1.** [41] *Оператор* $N: D(N) \subset U \to V$ *называется дифференцируемым по Гато в точке* $u \in D(N)$, *если существует линейный оператор* $N'_u: \widetilde{U} \subset U \to V$ *такой, что*

$$N_u'h = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(u + \varepsilon h) - N(u)}{\varepsilon} \quad \forall h \in \widetilde{U}. \tag{1.1}$$

*При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in D(N)$ оператор $N_u'$ называется производной Гато оператора $N$ в точке $u \in D(N)$.*

Предел в (1.1) понимается в смысле сходимости по норме пространства $V$.

В дальнейшем множество $\widetilde{U}$ будем обозначать через $D(N_u')$. Отметим, что в общем случае $D(N) \neq D(N_u')$.

Вычисление производной Гато оператора удобно выполнять по формуле [46]

$$N_u'h = \frac{d}{d\varepsilon} N(u + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon = 0}.$$

Отметим, что если $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)^{\mathbb{T}}$ и $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)^{\mathbb{T}}$, то

$$N_u' = \begin{pmatrix} (N_1)_{u^1}' & (N_1)_{u^2}' & \cdots & (N_1)_{u^n}' \\ (N_2)_{u^1}' & (N_2)_{u^2}' & \cdots & (N_2)_{u^n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (N_n)_{u^1}' & (N_n)_{u^2}' & \cdots & (N_n)_{u^n}' \end{pmatrix}.$$

**Билинейные формы**

**Определение 1.2.** [41] *Отображение $\Phi(u;\cdot,\cdot): V \times U \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу и зависящее от параметра $u \in U$, называется локальной билинейной формой.*

**Определение 1.3.** [41] *Отображение $\Phi$ называется нелокальной билинейной формой, если оно не зависит от параметра $u$.*

**Определение 1.4.** [41] *Билинейная форма $\Phi: V \times U \to \mathbb{R}$ является невырожденной нелокальной билинейной формой, если:*

1. *из условия*

$$\Phi(v, h) = 0 \quad \forall v \in V,$$

*следует, что $h = 0_U$;*

2. *из условия*

$$\Phi(v,h) = 0 \quad \forall h \in U,$$

*следует, что* $v = 0_V$.

Введем классическую нелокальную билинейную форму следующим образом:

$$\Phi_1(v,g) \equiv \langle v,g \rangle \equiv \int_0^T \int_\Omega \sum_i v^i(x,t) g^i(x,t)\, dx\, dt, \tag{1.2}$$

где $[0,T] \in \mathbb{R}$, $\Omega$ — область, открытое связное множество в $\mathbb{R}^l$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$; $\overline{\Omega}$ — замыкание $\Omega$ в $\mathbb{R}^l$.

**Потенциальные операторы**

**Определение 1.5.** [41] *Оператор* $N: D(N) \subseteq U \to V$ *называется потенциальным на множестве* $D(N)$ *относительно локальной билинейной формы* $\Phi(u;\cdot,\cdot): V \times U \to \mathbb{R}$, *если существует функционал* $F_N: D(N) \to \mathbb{R}$, *определенный на множестве* $D(F_N) = D(N)$, *такой, что для всех* $u \in D(N)$, $h \in D(N'_u)$

$$\delta F_N[u,h] \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_N(u + \varepsilon h) - F_N(u)}{\varepsilon} = \Phi(u; N(u), h).$$

*При этом* $F_N$ *называется потенциалом оператора* $N$.

Необходимое и достаточное условие потенциальности оператора $N$ на множестве $D(N)$ относительно $\Phi$ сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.1.** [41] *Пусть* $N: D(N) \subseteq U \to V$ *— дифференцируемый по Гато оператор на выпуклом множестве* $D(N)$ *и локальная билинейная форма* $\Phi(u;\cdot,\cdot): V \times U \to \mathbb{R}$ *такие, что для любых фиксированных элементов* $u \in D(N)$ *и* $h, g \in D(N'_u)$ *функция* $\varphi(\varepsilon) \equiv \Phi(u + \varepsilon h; N(u + \varepsilon h), g)$ *является непрерывно дифференцируемой на отрезке* $[0,1]$. *Тогда для потенциальности оператора* $N$ *на* $D(N)$ *относительно* $\Phi$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Phi(u; N'_u h, g) + \Phi'_u(h; N(u), g) = \Phi(u; N'_u g, h) + \Phi'_u(g; N(u), h) \tag{1.3}$$

*для любых* $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$.

*При этом потенциал* $F_N$ *определяется формулой*

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi\big(u(\lambda); N\big(u(\lambda)\big), u - u_0\big) d\lambda + F_N[u_0], \tag{1.4}$$

*где* $u(\lambda) \equiv u_0 + \lambda(u - u_0)$; $u_0$ *— произвольный фиксированный элемент из* $D(N)$.

Условие (1.3) называется критерием потенциальности оператора $N$ относительно локальной билинейной формы Φ. В литературе по механике, физике функционал (1.4) называется функционалом действия, или действием по Гамильтону.

**Замечание.** Если Φ является нелокальной билинейной формой, то (1.3) принимает вид

$$\langle N'_u h, g \rangle = \langle N'_u g, h \rangle \quad \forall u \in D(N), g, h \in D(N'_u). \tag{1.5}$$

## 1. 2 Непотенциальность оператора одной краевой задачи для системы Соболева

Работы С. Л. Соболева 1940-х годов в области малых колебаний вращающейся жидкости в дальнейшем вызвали большой интерес к этой тематике. После их публикации И. Г. Петровский подчеркнул важность изучения общих дифференциальных уравнений и систем, не разрешенных относительно производных по времени высшего порядка. В связи с этим, естественно, исследовать задачу существования их вариационных формулировок. Ее можно рассматривать как обратную задачу вариационного исчисления.

**Постановка задачи**

Рассмотрим следующую систему уравнений в частных производных Соболева [47]:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}_1(u,p) \equiv \frac{\partial u^1}{\partial t} - u^2 + \frac{\partial p}{\partial x^1} = \mathcal{F}_1,\\
&\widetilde{N}_2(u,p) \equiv \frac{\partial u^2}{\partial t} + u^1 + \frac{\partial p}{\partial x^2} = \mathcal{F}_2,\\
&\widetilde{N}_3(u,p) \equiv \frac{\partial u^3}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x^3} = \mathcal{F}_3,\\
&\widetilde{N}_4(u,p) \equiv \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = \mathcal{F}_4,\\
&(x,t) = (x^1,x^2,x^3,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где компоненты $u^1$, $u^2$, $u^3$ вектора $u$ и $p$ — неизвестные функции, область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничена гладкой поверхностью $\partial\Omega$, $\mathcal{F}_i$, $i = \overline{1,4}$ — заданные непрерывные функции на $Q_T$.

Обозначая $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$, $\widetilde{N} = \left(\widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{N}_3, \widetilde{N}_4\right)$, $N = \widetilde{N} - \mathcal{F}$, зададим область определения

$$\begin{aligned}
D(N) = \Big\{(u,p)\colon u^i \in C^1\big(\overline{Q}_T\big), p \in C^1\big(\overline{\Omega}\big); u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x^1,x^2,x^3),\\
u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x^1,x^2,x^3), i = \overline{1,3}, p|_{\partial\Omega} = 0\Big\},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\varphi^i(x), \psi^i(x) \in C\big(\overline{\Omega}\big)$, $i = \overline{1,3}$ — заданные функции, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$.

Обозначая через $\kappa$ единичный вектор $(0,0,1)$, представим систему (1.6) в виде [47]

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}_i(u,p) \equiv \frac{\partial u^i}{\partial t} - [u \times \kappa]^i + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \mathcal{F}_i, \quad i = \overline{1,3},\\
&\widetilde{N}_4(u,p) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \mathcal{F}_4.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

В [47] было доказано существование решения (1.6) в гильбертовом пространстве $H$ и его непрерывная зависимость от начальных данных. Задача Коши в неограниченном пространстве решалась в явном виде.

В [48] исследовались однородные дифференциальные уравнения, описывающие вращающуюся жидкость в двумерном случае. С помощью преобразования Фурье решение задачи Коши было получено в виде сверток, ядра которых обладают локально интегрируемыми свойствами. Исследовано асимптотическое поведение этого решения для больших значений времени.

Проблема существования вариационной формулировки — принципа Гамильтона для (1.6), (1.7) — ранее не исследовалась. В современной интерпретации [49] ее можно рассматривать как обратную задачу вариационного исчисления.

В настоящем параграфе исследовано существование решений обратной задачи вариационного исчисления для задачи (1.6), (1.7). Ключевую роль при этом играет критерий потенциальности. На его основе доказана непотенциальность оператора краевой задачи для системы уравнений Соболева с частными производными относительно классической билинейной формы. Показано, что эта система не допускает матричный вариационный множитель заданной формы. Таким образом, уравнения системы Соболева не могут быть выведены из классического принципа Гамильтона. Также поставлен вопрос: существует ли функционал, полуограниченный на решениях данной краевой задачи? В этом параграфе дан алгоритм конструктивного построения такого функционала.

**Теорема 1.2.** [43] *Оператор* (1.6) *не является потенциальным на множестве* (1.7) *относительно нелокальной билинейной формы* (1.2).

*Доказательство.* Из (1.6) находим производную Гато

$$N_u' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} \\ 1 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (1.7)

$$D(N_u') = \Big\{(h^1, h^2, h^3, h^4): h^i \in C^1\big(\overline{Q}_T\big), h^4 \in C^1\big(\overline{\Omega}\big):$$

$$h^i\big|_{t=0} = 0, h^i\big|_{t=T} = 0, i = \overline{1,3}, h^4|_{\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

Докажем, что оператор (1.6) не удовлетворяет критерию (1.5).

Обозначая $h' = (h^1, h^2, h^3)$ и $g' = (g^1, g^2, g^3)$, получаем

$$\langle N_u' h, g\rangle = \int\limits_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial h^i}{\partial t} - [h' \times \kappa]^i + \frac{\partial h^4}{\partial x^i}\right) g^i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h^i}{\partial x^i} g^4\right] dxdt.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\langle N_u' h, g\rangle = \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{3} \left[D_t\big(h^i g^i\big) - h^i \frac{\partial g^i}{\partial t} - [h' \times \kappa]^i g^i + D_{x^i}\big(h^4 g^i\big) - h^4 \frac{\partial g^i}{\partial x^i} + D_{x^i}\big(h^i g^4\big)\right.$$

$$\left. - h^i \frac{\partial g^4}{\partial x^i}\right] dxdt \quad \forall h, g \in D(N_u'),$$

где $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = \overline{1,3}$.

В силу теоремы Гаусса-Остроградского и условия $h \in D(N_u')$ имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \big[D_{x_1}(h^4 g^1) + D_{x_2}(h^4 g^2) + D_{x_3}(h^4 g^3)\big] dx^1 dx^2 dx^3\, dt$$

$$= \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\partial\Omega} h^4 g^1 dx^2 dx^3 + \int\limits_{\partial\Omega} h^4 g^2 dx^1 dx^3 + \int\limits_{\partial\Omega} h^4 g^3 dx^1 dx^2\right) dt = 0.$$

Аналогично получаем

$$\int_0^T \int_\Omega \left[D_{x_1}(g^4h^1) + D_{x_2}(g^4h^2) + D_{x_3}(g^4h^3)\right]dx^1dx^2dx^3dt$$

$$= \int_0^T \left( \int_{\partial\Omega} g^4h^1dx^2dx^3 + \int_{\partial\Omega} g^4h^2dx^1dx^3 + \int_{\partial\Omega} g^4h^3dx^1dx^2 \right) = 0,$$

и

$$\int_{Q_T} [D_t(h^1g^1) + D_t(h^2g^2) + D_t(h^3g^3)]dxdt = \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left(h^ig^i\right)\Big|_{t=0}^{t=T} dx = 0.$$

Применяя вышеизложенные результаты, получаем

$$\langle N_u'h, g\rangle = \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^3 \left(-h^i\frac{\partial g^i}{\partial t} - [h' \times \kappa]^i g^i - h^i\frac{\partial g^4}{\partial x^i}\right) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial x^i} h^4\right] dxdt. \tag{1.9}$$

С другой стороны, имеем

$$\langle N_u'g, h\rangle = \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial g^i}{\partial t} - [g' \times \kappa]^i + \frac{\partial g^4}{\partial x^i}\right) h^i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial x^i} h^4\right] dxdt. \tag{1.10}$$

В (1.9) коэффициент при $h^4$ равен

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial x^i}$$

и в (1.10) равен

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g^i}{\partial x^i}.$$

Следовательно, $\langle N_u'h, g\rangle$ не является тождественно равным $\langle N_u'g, h\rangle$. Таким образом, критерий (1.5) не выполняется. ■

Исследуем существование матричного вариационного множителя для оператора (1.6).

**Определение 1.6.** [41] *Обратимый линейный оператор* $M: D(M) \subset R(N) \to V$ *называется вариационным множителем для оператора* $N: D(N) \subset U \to V,$ *если оператор* $\widehat{N} = MN$ *является потенциальным на множестве* $D(N)$ *относительно заданной билинейной формы.*

**Теорема 1.3.** [43] *Не существует матричного вариационного множителя* $M = \left\{m_{ij}(x,t)\right\}_{i,j=1}^{4}$ *для оператора* $N$ (1.6).

*Доказательство.* Предположим, что существует матричный вариационный множитель для (1.6)

$$M = \left\{m_{ij}(x,t)\right\}_{i,j=1}^{4}.$$

Тогда оператор $\widehat{N}(u) = MN(u)$ является потенциальным относительно классической билинейной формы (1.2).

Обозначая $m_{ij} \equiv m_{ij}(x,t)$, имеем

$$\left\langle \widehat{N}_u' h, g \right\rangle = \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} m_{ij} (N_u' h)_j g^i \, dxdt$$

$$= \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left[ m_{ij} \left( \frac{\partial h^j}{\partial t} - [h' \times \kappa]^j + \frac{\partial h^4}{\partial x^j} \right) g^i + m_{i4} \frac{\partial h^j}{\partial x^j} g^i \right] dxdt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\left\langle \widehat{N}_u' h, g \right\rangle = \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left[ D_t\left(m_{ij} h^j g^i\right) - \frac{\partial m_{ij}}{\partial t} h^j g^i - m_{ij} h^j \frac{\partial g^i}{\partial t} - m_{ij} [h' \times \kappa]^j g^i \right.$$

$$+ D_{x^j}\left(m_{ij} h^4 g^i\right) - \frac{\partial m_{ij}}{\partial x^j} h^4 g^i - m_{ij} h^4 \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + D_{x^j}\left(m_{i4} h^j g^i\right) - \frac{\partial m_{i4}}{\partial x^j} h^j g^i$$

$$\left. - m_{i4} h^j \frac{\partial g^i}{\partial x^j} \right] dxdt \, .$$

Так как $h, g \in D(N_u')$, то

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} D_t\left(m_{ij} h^j g^i\right) dx dt = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left(m_{ij} h^j g^i\right) \Bigg|_{t=0}^{t=T} dx = 0,$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \left[D_{x^1}\left(m_{i1} h^4 g^i\right) + D_{x^2}\left(m_{i2} h^4 g^i\right) + D_{x^3}\left(m_{i3} h^4 g^i\right)\right] dx dt$$

$$= \int\limits_{0}^{T} \sum_{i=1}^{4} \Bigg[ \int\limits_{\partial\Omega} m_{i1} h^4 g^i \, dx^2 dx^3 + \int\limits_{\partial\Omega} m_{i2} h^4 g^i \, dx^1 dx^3$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} m_{i3} h^4 \, g^i dx^1 dx^2 \Bigg] dt = 0,$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \left[D_{x^1}\left(m_{i4} h^1 g^i\right) + D_{x^2}\left(m_{i4} h^2 g^i\right) + D_{x^3}\left(m_{i4} h^3 g^i\right)\right] dx dt$$

$$= \int\limits_{0}^{T} \sum_{i=1}^{4} \Bigg[ \int\limits_{\partial\Omega} m_{i4} h^1 g^i \, dx^2 dx^3 + \int\limits_{\partial\Omega} m_{i4} h^2 \, g^i dx^1 dx^3$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} m_{i4} h^3 \, g^i dx^1 dx^2 \Bigg] dt = 0.$$

Применяя вышеизложенные результаты, находим

$$\left\langle \widehat{N}_u' h, g \right\rangle = \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left[ -\frac{\partial m_{ij}}{\partial t} h^j g^i - m_{ij} h^j \frac{\partial g^i}{\partial t} - m_{ij} [h' \times \kappa]^j g^i - \frac{\partial m_{ij}}{\partial x^j} h^4 g^i \right.$$

$$\left. - m_{ij} h^4 \frac{\partial g^i}{\partial x^j} - \frac{\partial m_{i4}}{\partial x^j} h^j g^i - m_{i4} h^j \frac{\partial g^i}{\partial x^j} \right] dxdt$$

$$= - \int\limits_{Q_T} \left\{ \sum_{j=1}^{3} h^j \left[ \sum_{i=1}^{3} \left( m_{ij} \frac{\partial g^i}{\partial t} + m_{i4} \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + P_{ij} g^i \right) \right. \right.$$

$$\left. + \left( m_{4j} \frac{\partial g^4}{\partial t} + m_{44} \frac{\partial g^4}{\partial x^j} + P_{4j} g^4 \right) \right]$$

$$\left. + h^4 \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} \left( m_{ij} \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial x^j} g^i \right) \right\} dxdt,$$

где

$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial m_{i1}}{\partial t} + \dfrac{\partial m_{i4}}{\partial x^1} - m_{i2}, & j = 1, \\ \dfrac{\partial m_{i2}}{\partial t} + \dfrac{\partial m_{i4}}{\partial x^2} + m_{i1}, & j = 2, \\ \dfrac{\partial m_{i3}}{\partial t} + \dfrac{\partial m_{i4}}{\partial x^3}, & j = 3, \end{cases} \qquad i = \overline{1,4}.$$

С другой стороны, имеем

$$\left\langle \widehat{N}'_u g, h \right\rangle = \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} m_{ij} (N'_u g)_j \, h^i dxdt$$

$$= \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left[ m_{ij} \left( \frac{\partial g^j}{\partial t} - [g' \times \kappa]^j + \frac{\partial g^4}{\partial x^j} \right) h^i + m_{i4} \frac{\partial g^j}{\partial x^j} h^i \right] dxdt$$

$$= \int_{Q_T} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left( m_{ji} \frac{\partial g^i}{\partial t} - m_{ji} [g' \times \kappa]^i + m_{ji} \frac{\partial g^4}{\partial x^i} + m_{j4} \frac{\partial g^i}{\partial x^i} \right) h^j \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \left( m_{4j} \frac{\partial g^j}{\partial t} - m_{4j} [g' \times \kappa]^j + m_{4j} \frac{\partial g^4}{\partial x^j} + m_{44} \frac{\partial g^j}{\partial x^j} \right) h^4 \right\} dxdt.$$

Следовательно,

$$\left\langle \widehat{N}'_u h, g \right\rangle - \langle \widehat{N}'_u g, h \rangle$$

$$= - \int_{Q_T} \left\{ \sum_{j=1}^{3} h^j \left[ \sum_{i=1}^{3} \left( \left( m_{ij} + m_{ji} \right) \frac{\partial g^i}{\partial t} + m_{i4} \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + m_{ji} \frac{\partial g^4}{\partial x^i} \right. \right. \right.$$

$$\left. + m_{j4} \frac{\partial g^i}{\partial x^i} + P_{ij} g^i - m_{ji} [g' \times \kappa]^i \right)$$

$$\left. + \left( m_{4j} \frac{\partial g^4}{\partial t} + m_{44} \frac{\partial g^4}{\partial x^j} + P_{4j} g^4 \right) \right] \tag{1.11}$$

$$+ h^4 \sum_{j=1}^{3} \left[ \sum_{i=1}^{4} \left( m_{ij} \frac{\partial g^i}{\partial x^j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial x^j} g^i \right) + m_{4j} \frac{\partial g^j}{\partial t} - m_{4j} [g' \times \kappa]^j \right.$$

$$\left. \left. + m_{4j} \frac{\partial g^4}{\partial x^j} + m_{44} \frac{\partial g^j}{\partial x^j} \right] \right\} dxdt.$$

В силу критерия (1.5) должно быть

$$\left\langle \widehat{N}'_u h, g \right\rangle - \left\langle \widehat{N}'_u g, h \right\rangle = 0 \quad \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u).$$

В силу произвольности функций $h^i$, $i = \overline{1,4}$ из (1.11) получаем

$$\sum_{i=1}^{3}\left((m_{ij}+m_{ji})\frac{\partial g^i}{\partial t}+m_{i4}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}+m_{ji}\frac{\partial g^4}{\partial x^i}+m_{j4}\frac{\partial g^i}{\partial x^i}+P_{ij}g^i-m_{ji}[g'\times\kappa]^i\right)$$
$$+\left(m_{4j}\frac{\partial g^4}{\partial t}+m_{44}\frac{\partial g^4}{\partial x^j}+P_{4j}g^4\right)=0,\ j=\overline{1,3},$$
$$\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{i=1}^{4}\left(m_{ij}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}+\frac{\partial m_{ij}}{\partial x^j}g^i\right)+m_{4j}\frac{\partial g^j}{\partial t}-m_{4j}[g'\times\kappa]^j+m_{4j}\frac{\partial g^4}{\partial x^j}+m_{44}\frac{\partial g^j}{\partial x^j}\right]=0.$$

Отсюда в силу произвольности функций $g^i$, $i=\overline{1,4}$ находим

$$\begin{cases} m_{ij}+m_{ji}=0 \\ m_{i4}=0, \\ m_{ji}=0, \\ m_{4j}=0, \\ m_{44}=0, \end{cases}$$

где $i,j=\overline{1,3}$.

Все $m_{ij}(x,t)=0$, $i,j=\overline{1,4}$. Следовательно, $M=0$ (нулевая матрица). Это противоречит тому, что предполагалось выше. Таким образом, не существует матричного вариационного множителя $M=\{m_{ij}(x,t)\}_{i,j=1}^{4}$ для оператора $N$ (1.6). ■

**Построение полуограниченного функционала**

Выше доказано, что оператор (1.6) не является потенциальным относительно нелокальной билинейной формы (1.2) и не существует матричного вариационного множителя данного типа. Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема.

Рассмотрим произвольное уравнение

$$N(u)=0_V,\qquad u\in D(N)\subseteq U\subseteq V, \tag{1.12}$$

где оператор $N$ в общем случае является непотенциальным относительно фиксированной нелокальной билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$.

**Теорема 1.4.** [50] *Пусть:*

1. *$N: D(N) \subseteq U \to V$ — дважды дифференцируемый по Гато оператор на выпуклом множестве $D(N)$;*
2. *$\langle \cdot,\cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ — заданная нелокальная билинейная форма;*
3. *$\mathcal{C}: D(\mathcal{C}) \supseteq R(N) \to V$ — произвольный обратимый линейный симметричный оператор такой, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$ и $g, h \in D(N'_u)$ функция $\varphi(\varepsilon) \equiv \langle N(u + \varepsilon h), \mathcal{C} N'_{u+\varepsilon h} g \rangle \in C^1[0,1]$.*

*Тогда оператор $N$ является потенциальным на $D(N)$ относительно следующей локальной билинейной формы:*

$$\Phi(u; v, g) = \langle v, \mathcal{C} N'_u g \rangle.$$

*При этом*

$$F_N[u] = \frac{1}{2} \langle N(u), \mathcal{C} N(u) \rangle \tag{1.13}$$

Доказательство дано в [50].

Отметим, что

$$\delta F_N[u, h] = \Phi(u; N(u), h) = \langle N(u), \mathcal{C} N'_u h \rangle.$$

Обозначая через $N'^*_u$ сопряженный оператор к $N'_u$ и предполагая, что $R(\mathcal{C}) \subseteq D(N'^*_u)$, из последнего равенства получаем, что

$$\delta F_N[u, h] = \langle N'^*_u \mathcal{C} N(u), h \rangle \quad \forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u).$$

Предполагая, что $\overline{D(N'_u)} = U$ и $\langle \cdot,\cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ является невырожденной непрерывной нелокальной билинейной формой, получаем $\delta F_N[u, h] = 0$, $u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$ тогда и только тогда, когда

$$\breve{N}(u) \equiv N'^*_u \mathcal{C} N(u) = 0_V, u \in D(N). \tag{1.14}$$

Таким образом, оператор $\breve{N}$ является потенциальным на $D(N)$ относительно нелокальной билинейной формы (1.2).

Если $N'^*_u$ — обратимый оператор, то задачи (1.12) и (1.14) эквивалентны в следующем смысле: решение $\tilde{u}$ одной из них является решением и другой задачи, т.е., $N(\tilde{u}) = 0_V$ тогда и только тогда, когда $\breve{N}(\tilde{u}) = 0_V$. В этом случае функционал (1.13) определяет косвенную вариационную формулировку задачи (1.12).

Если оператор $\mathcal{C}$ является положительно определенным относительно нелокальной билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$, т.е.

$$\langle v, \mathcal{C}v\rangle \geq a\|v\| \quad \forall v \in D(\mathcal{C}),$$

где $a > 0$, то

$$F_N[u] \geq 0 \quad \forall u \in D(N)$$

и $F_N[\bar{\bar{u}}] = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{\bar{u}}$ является решением (1.12). Таким образом, в этом случае формула (1.13) задает полуограниченный функционал, минимум которого достигается на решениях (1.12).

Отметим, что функционал (1.13) был получен другим способом в [46] при решении одной из постановок обратной задачи вариационного исчисления.

Вернемся к задаче (1.6), (1.7). Получаем

$$N_u'^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} & 1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x^1} \\ -1 & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial}{\partial x^1} & -\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(N'^*) = \left\{(v^1, v^2, v^3, v^4): v^i \in C^1\left(\overline{Q}_T\right), v^4 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right): \right.$$
$$\left. v^i\big|_{t=0} = 0, v^i\big|_{t=T} = 0, i = \overline{1,3}, v^4|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Определим оператор $\mathcal{C}$ на $R(N)$ по формуле

$$(\mathcal{C}v)_j(x,t) = \int\limits_{Q_T} \mathcal{K}(x,t,y,\lambda)\phi^j(x,t)\phi^j(y,\lambda)v^j(y,\lambda)dyd\lambda, \; j = \overline{1,4}, \qquad (1.15)$$

где

$$\mathcal{K}(x,t,y,\lambda)=\exp\left(\sum_{i=1}^{3}x^i y^i+t\lambda\right). \tag{1.16}$$

где $\phi^i$, $i=\overline{1,4}$ — произвольные функции класса $C^1(\overline{Q_T})$ такие, что

$$\phi^i(x,t)\neq 0,(x,t)\in Q_T \text{ и } \phi^i\big|_{t=0}=0,\phi^i\big|_{t=T}=0,i=\overline{1,3};\phi^4|_{\partial\Omega}=0.$$

При таком выборе функций $\phi^1$, $\phi^2$, $\phi^3$, $\phi^4$ имеем $Cv\in D(N_u'^*)$. Также легко видеть, что оператор (1.15) симметричен на $R(N)$.

Покажем, что он является положительно определенным. Для этого находим разложение функции (1.16) в ряд Маклорена

$$\mathcal{K}(x,t,y,\lambda)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha!)^2}(x^1)^{\alpha_1}\dots(x^3)^{\alpha_3}t^{\alpha_4}(y^1)^{\alpha_1}\dots(y^3)^{\alpha_3}\lambda^{\alpha_4}.$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_4)$; $\alpha_i$, $i=\overline{1,4}$ — неотрицательные целые числа; $|\alpha|=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i$, $\alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_4!$.

Используя полученный ряд, находим

$$\begin{aligned}\Phi_1(v,Cv)&=\int\limits_{Q_T}\sum_{j=1}^{4}v^j(x,t)\int\limits_{Q_T}\mathcal{K}(x,t,y,\lambda)\phi^j(x,t)\phi^j(y,\lambda)v^j(y,\lambda)dyd\lambda dxdt\\&=\sum_{j=1}^{4}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha!)^2}\int\limits_{Q_T}(x^1)^{\alpha_1}\dots(x^3)^{\alpha_3}t^{\alpha_4}\phi^j(x,t)v^j(x,t)\,dxdt\\&\times\int\limits_{Q_T}(y^1)^{\alpha_1}\dots(y^3)^{\alpha_3}\lambda^{\alpha_4}\phi^j(y,\lambda)v^j(y,\lambda)dyd\lambda\\&\equiv\sum_{j=1}^{4}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha!)^2}\left(M^{\alpha_1\dots\alpha_4 j}\right)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Отметим, что все моменты $M^{\alpha_1\dots\alpha_4 j}$ равны нулю одновременно, если и только если $v^j=0$, $j=\overline{1,4}$ в $Q_T$ [51]. Следовательно, если $v\neq 0_V$, то $\Phi_1(v,Cv)>0$. Таким образом, оператор $C$ вида (1.15) является положительно определенным и обратимым.

Обозначив через $\mathcal{K}\equiv\mathcal{K}(x,t,y,\lambda)$, из (1.8) и (1.15) получим

$$\big(\mathcal{C}N(u)\big)_i(x,t) =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)\left[\frac{\partial u^i(y,\lambda)}{\partial\lambda} - [u(y,\lambda)\times\kappa]^i + \frac{\partial p(y)}{\partial y^i} - \mathcal{F}_i\right]dyd\lambda\,,$$

$$i = \overline{1,3},$$

$$\big(\mathcal{C}N(u)\big)_4(x,t) = \int\limits_{Q_T} \mathcal{K}\phi^4(x,t)\phi^4(y,\lambda)\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u^j(y,\lambda)}{\partial y^j} - \mathcal{F}_4\right]dyd\lambda.$$

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{gathered}\big(\mathcal{C}N(u)\big)_i(x,t) = \\ = \int\limits_{Q_T}\big[-\phi^i(x,t)u^i(y,\lambda)D_\lambda\big[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\big] \\ - \mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)[u(y,\lambda)\times\kappa]^i \\ - p(y)\phi^i(x,t)D_{y^i}\big[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\big] - \mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)\mathcal{F}_i\big]\,dyd\lambda, \\ i = \overline{1,3}, \\ \big(\mathcal{C}N(u)\big)_4(x,t) = \\ = \int\limits_{Q_T}\left[-\sum_{j=1}^{3}\phi^4(x,t)u^j(y,\lambda)D_{y^j}[\mathcal{K}\phi^4(y,\lambda)]\right. \\ \left. - \mathcal{K}\phi^4(x,t)\phi^4(y,\lambda)\mathcal{F}_4\right]dyd\lambda.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Используя формулы (1.7), (1.13), (1.17), находим искомый функционал в виде

$$F_N[u] = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Q_T}\left\{\sum_{i=1}^{3}\left[\left(-\phi^i(x,t)u^i(y,\lambda)D_\lambda\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right]\right.\right.\right.$$

$$- \mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)[u(y,\lambda)\times\kappa]^i - p(y)\phi^i(x,t)D_{y^i}\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right]$$

$$\left.\left. - \mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)\mathcal{F}_i\right)\left(\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t} - [u(x,t)\times\kappa]^i + \frac{\partial p(x)}{\partial x^i} - \mathcal{F}_i\right)\right]$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{3}\phi^4(x,t)u^j(y,\lambda)D_{y^j}[\mathcal{K}\phi^4(y,\lambda)]\right.$$

$$\left.\left. + \mathcal{K}\phi^4(x,t)\phi^4(y,\lambda)\mathcal{F}_4\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x^i} - \mathcal{F}_4\right)\right\} dyd\lambda dxdt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} F_N[u] = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}\int\limits_{Q_T}\Bigg\{&\sum_{i=1}^{3}\left(u^i(x,t)A_{1,i} + \left([u(x,t)\times\kappa]^i + \mathcal{F}_i\right)A_{2,i} + p(x)A_{3,i}\right) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{3}u^i(x,t)B_{1,i} + \mathcal{F}_4 B_{2,i}\right)\Bigg\} dyd\lambda dxdt, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где

$$A_{1,i} = u^i(y,\lambda)D_t\left[\phi^i(x,t)D_\lambda\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right]\right] + [u(y,\lambda)\times\kappa]^i\phi^i(y,\lambda)D_t\left[\mathcal{K}\phi^i(x,t)\right]$$
$$+ p(y)D_t\left[\phi^i(x,t)D_{y^i}\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right]\right] + \phi^i(y,\lambda)D_t\left[\mathcal{K}\phi^i(x,t)\mathcal{F}_i\right],$$

$$A_{2,i} = u^i(y,\lambda)\phi^i(x,t)D_\lambda\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right] + [u(y,\lambda)\times\kappa]^i\mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)$$
$$+ p(y)\phi^i(x,t)D_{y^i}\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right] + \mathcal{K}\phi^i(x,t)\phi^i(y,\lambda)\mathcal{F}_i,$$

$$A_{3,i} = u^i(y,\lambda)D_{x^i}\left[\phi^i(x,t)D_\lambda\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right]\right] + p(y)D_{x^i}\left[\phi^i(x,t)D_{y^i}\left[\mathcal{K}\phi^i(y,\lambda)\right]\right]$$
$$+ [u(y,\lambda)\times\kappa]^i\phi^i(y,\lambda)D_{x^i}\left[\mathcal{K}\phi^i(x,t)\right] + \phi^i(y,\lambda)D_{x^i}\left[\mathcal{K}\phi^i(x,t)\mathcal{F}_i\right],$$

и

$$B_{1,i} = \sum_{j=1}^{3} u^j(y,\lambda) D_{x^i}\left[\phi^4(x,t) D_{y^j}\left(\mathcal{K}\phi^4(y,\lambda)\right)\right] + \phi^4(y,\lambda) D_{x^i}[\mathcal{K}\phi^4(x,t)\mathcal{F}_4],$$

$$B_{2,i} = \sum_{j=1}^{3} u^j(y,\lambda)\phi^4(x,t) D_{y^j}\left(\mathcal{K}\phi^4(y,\lambda)\right) + \mathcal{K}\phi^4(x,t)\phi^4(y,\lambda)\mathcal{F}_4.$$

**Теорема 1.5.** [43] *Функционал вида* (1.18) *полуограничен на решениях задачи* (1.6), (1.7).

Теорема доказана выше.

**Замечание.** Функционал (1.18):

1. ограничен снизу на множестве (1.7);
2. принимает минимальное значение только на решениях задачи (1.6), (1.7);
3. не содержит производных неизвестных функций;
4. множество его стационарных точек содержит множество решений задачи (1.6), (1.7).

Основное значение построенного функционала действия (1.18) может быть связано с приложениями прямых вариационных методов.

## 1. 3 Уравнения движения систем Биркгофа

Среди возможных обобщений гамильтоновых систем особое положение занимают системы Биркгофа, динамика которых описывается четным числом дифференциальных уравнений первого порядка. В этом параграфе приведены уравнения движения этих систем и подход к представлению непотенциальных систем в форме Биркгофа.

### Системы Биркгофа

Пусть состояние потенциальной системы определяется вектор-функцией $u \equiv u(t) = \left(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^{2n}(t)\right)^{\mathbb{T}}, t \in (0, T)$.

Предположим, что при этом действие по Гамильтону имеет вид

$$F_N[u] = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i(t,u)\,\dot{u}^i - B(t,u)\right] dt, \tag{1.19}$$

где $u^i \equiv u^i(t)$ — независимые переменные, $\dot{u}^i = \frac{d}{dt}u^i$, $i = \overline{1,2n}$, $R_i(t,u)$, $B(t,u)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Будем рассматривать функционал (1.19) на множестве

$$D(N) = \Big\{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^{\mathbb{T}} \colon u^i \in U^i = C^1[0,T] \colon u^i\big|_{t=0} = \varphi^i, \\ u^i\big|_{t=T} = \psi^i, i = \overline{1,2n}\Big\},$$

где $\varphi^i$, $\psi^i$, $i = \overline{1,2n}$ — заданные числа.

На основе функционала (1.19) находим систему уравнений движения в виде [2]

$$N_i(u) \equiv \sum_{j=1}^{2n} \left[\frac{\partial R_j(t,u)}{\partial u^i} - \frac{\partial R_i(t,u)}{\partial u^j}\right] \dot{u}^j - \frac{\partial R_i(t,u)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,u)}{\partial u^i} = 0, \\ i = \overline{1,2n}. \tag{1.20}$$

Система, описываемая уравнениями (1.20), называется системой Биркгофа, $B \equiv B(t,u)$ — биркгофианом, $R_i \equiv R_i(t,u)$ — функциями Биркгофа.

## Представление непотенциальных систем в форме уравнений Биркгофа

Рассмотрим механическую систему, движение которой описывается уравнением

$$N(u) \equiv C(t,u)\dot{u}(t) + E(t,u) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{1.21}$$

где $C(t,u)$ — заданная матрица $\left[C_{ij}(t,u)\right]_{2n\times 2n}$, $E(t,u) = \big(E_1(t,u), E_2(t,u), \dots, E_{2n}(t,u)\big)^{\mathbb{T}}$ — заданная вектор-функция, $u = (u^1, \dots, u^{2n})^{\mathbb{T}}$ — неизвестная вектор-функция.

Предположим, что $C_{ij}(t,u) \colon [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ и $E_i(t,u) \colon [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ — заданные гладкие функции.

Будем рассматривать (1.21) на множестве

$$D(N) = \{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^{\mathbb{T}} : u^i \in U^i = C^1([0,T]): \\ u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x), u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x), i = \overline{1,2n}\}, \tag{1.22}$$

где $\varphi^i$, $\psi^i$, $i = \overline{1,2n}$ — заданные числа.

Необходимыми и достаточными условиями того, что оператор $N$ (1.21) является потенциальным на множестве $D(N)$ (1.22) относительно билинейной формы

$$\langle v, g \rangle \equiv \int_0^T \sum_{i=1}^{2n} v^i(t) g^i(t)\, dt,$$

являются следующие соотношения [2]:

$$C_{ij} + C_{ji} = 0 \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial C_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial C_{ki}}{\partial u^j} = 0, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial E_i}{\partial u^j} - \frac{\partial E_j}{\partial u^i}, \tag{1.25}$$

$$i, j, k = \overline{1,2n},$$

где $C_{ij} \equiv C_{ij}(t,u)$, $E_i \equiv E_i(t,u)$.

Предположим, что оператор $N$ (1.21) непотенциальный, т.е. условия (1.23) – (1.25) не выполняются.

Пусть $M$ — искомый матричный вариационный множитель (см. определение 1.6). Оператор $\widehat{N} = MN$ записывается в виде:

$$\widehat{N} = \hat{C}(t,u)\dot{u}(t) + \hat{E}(t,u),$$

где $\hat{C} = MC$, $\hat{E} = ME$.

Согласно условиям (1.23) – (1.25) имеем

$$\begin{cases} \hat{C}_{ij} + \hat{C}_{ji} = 0, \\ \dfrac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial u^k} + \dfrac{\partial \hat{C}_{jk}}{\partial u^i} + \dfrac{\partial \hat{C}_{ki}}{\partial u^j} = 0, \\ \dfrac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial t} = \dfrac{\partial \hat{E}_i}{\partial u^j} - \dfrac{\partial \hat{E}_j}{\partial u^i}, \end{cases}$$

где $i, j, k = \overline{1{,}2n}$.

Количество уравнений приведенной выше системы, вообще говоря, превышает количество искомых функций. Поэтому в общем случае она не всегда разрешима. В тех случаях, когда число уравнений и число искомых функций совпадает, существование решения устанавливается с помощью теоремы Коши-Ковалевской [52]. Методы нахождения функций $R_i$, $i = \overline{1{,}2n}$, $B$ можно найти в работе [2].

# Глава 2. Дискретные динамические системы Биркгофа

В настоящей главе разработан вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с вибрационным подвесом с трением и для одной диссипативной задачи. Построены системы дискретных уравнений Биркгофа на основе функционала (1.19). Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону.

## 2. 1 Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением

В данном параграфе представлен вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи. Численные решения показывают, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает периодическое движение**.**

**Построение косвенного вариационного принципа для одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка**

Рассмотрим следующую краевую задачу, связанную с движением маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол наклона с вертикалью [44]:

$$N(u) \equiv \ddot{u}(t) + K(t)\dot{u}(t) + \Theta(t)\sin u + \Psi(t)\cos u = 0, \quad t \in (0,T), \tag{2.1}$$

$$D(N) = \{u \in U = C^2[0,T]: u|_{t=0} = \varphi, u|_{t=T} = \psi\}. \tag{2.2}$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, $K \in C^1[0,T]$, $\Theta$, $\Psi \in C[0,T]$ — заданные функции, $\varphi, \psi$ — заданные числа.

Уравнения, изученные в работах [53–55], являются частными случаями (2.1).

Математическая модель с непрерывным временем движения такого маятника после работ П. Л. Капицы, Н. Н. Боголюбова стала базовой в нелинейной механике. Выявлена её взаимосвязь с некоторыми задачами физики (см. обзор литературы в [56, 57]).

При этом исследованы далеко не все свойства базовой нелинейной модели. Дополнительные возможности открываются с применением конечно-разностных методов [10]. При переходе от динамической системы с непрерывным временем к разностной схеме важно, чтобы обе модели сохраняли качественные характеристики одного и того же явления.

Как отмечено в работе [58], для математического описания ряда физических явлений и процессов целесообразно использовать вариационные принципы.

**Теорема 2.1.** [44] *При* $K(t) \neq 0$ *задача* (2.1), (2.2) *не допускает прямой вариационной формулировки относительно билинейной формы*

$$\langle v, g\rangle = \int_0^T v(t)g(t)\,dt. \tag{2.3}$$

*Доказательство.* Убедимся, что заданный оператор вида (2.1) не удовлетворяет условию (1.5). Имеем

$$N_u'h = \ddot{h} + K(t)\dot{h} + \Theta(t)h\cos u - \Psi(t)h\sin u,$$

$$\langle N_u'h, g\rangle = \int_0^T \left[\ddot{h} + K(t)\dot{h} + \Theta(t)h\cos u - \Psi(t)h\sin u\right]g\,dt, \tag{2.4}$$

$$\forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N_u').$$

Интегрируя по частям и учитывая, что

$$h|_{t=0} = g|_{t=0} = h|_{t=T} = g|_{t=T} = 0 \quad \forall h, g \in (N_u'), \tag{2.5}$$

из (2.4) получаем

$$\langle N_u' h, g\rangle = \int_0^T [\ddot{g} - K(t)\dot{g} + \Theta(t) g \cos u - \Psi(t) g \sin u] h\, dt \not\equiv$$

$$\not\equiv \langle N_u' g, h\rangle = \int_0^T [\ddot{g} + K(t)\dot{g} + \Theta(t) g \cos u - \Psi(t) g \sin u] h\, dt$$

при $K(t) \neq 0$.

Теорема доказана. ■

Обозначим $\widehat{N}(u) = M(t)N(u)$, $u \in D(N)$, где $M(t) \neq 0$ на $[0, T]$ — искомый вариационный множитель, определяемый из условия, чтобы оператор $\widehat{N}$ был потенциальным на $D(\widehat{N}) = D(N)$ относительно билинейной формы (2.3).

**Теорема 2.2.** [44] *Для задачи* (2.1), (2.2) *существует вариационный множитель вида*

$$M(t) = e^{\int K(t)\, dt}.$$

*Доказательство*. Обозначим

$$Q(u, h, g) = \langle \widehat{N}_u' h, g\rangle - \langle \widehat{N}_u' g, h\rangle \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N_u').$$

Имеем

$$\widehat{N}_u' h = M(t) N_u' h,$$

$$\langle \widehat{N}_u' h, g\rangle = \int_0^T M(t) N_u'\, h \cdot g\, dt$$

$$= \int_0^T M(t)\left[\ddot{h} g + K(t)\dot{h} g + \Theta(t) h g \cos u - \Psi(t) h g \sin u\right] dt\,,$$

$$\langle \widehat{N}_u' g, h\rangle = \int_0^T M(t) [h\ddot{g} + K(t) h\dot{g} + \Theta(t) h g \cos u - \Psi(t) h g \sin u]\, dt\,.$$

С учётом этого получаем

$$Q(u,h,g) = \int_0^T \left[Mg\ddot{h} + MKg\dot{h} - Mh\ddot{g} - MKh\dot{g}\right] dt.$$

Здесь $M \equiv M(t)$, $K \equiv K(t)$.

Интегрируя по частям и учитывая условия (2.5), отсюда находим

$$Q(u,h,g) = \int_0^T \left\{2\left[\frac{d}{dt}M - MK\right]\dot{g} + \left[\frac{d^2}{dt^2}M - \frac{d}{dt}(MK)\right]g\right\} h\, dt$$

$$\forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N_u').$$

Для выполнения условия

$$Q(u,h,g) = 0 \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N_u')$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d}{dt}M - MK = 0 \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M - \frac{d}{dt}(MK) = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

Условие (2.7) является следствием (2.6). Таким образом, вариационный множитель $M(t)$ является решением уравнения (2.6) и имеет вид

$$M(t) = e^{\int K(t)\, dt}.$$

Теорема доказана. ■

**Теорема 2.3.** [44] *Уравнение*

$$\widehat{N}(u) \equiv e^{\int K(t)\, dt} N(u) = 0, \quad u \in D(N), \tag{2.8}$$

*где $N$ имеет вид* (2.1)*, представимо в форме уравнений Гамильтона*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -e^{-\int K(t)\, dt} p, \\ \dot{p} &= e^{\int K(t)\, dt}(\Theta \sin u + \Psi \cos u). \end{aligned} \tag{2.9}$$

*Доказательство.* Используя формулу (1.4), находим действие по Гамильтону для (2.8) в виде

$$F_{\widehat{N}}[u] = \int_0^T M\left(-\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \Theta \cos u + \Psi \sin u\right) dt. \tag{2.10}$$

Таким образом, лагранжиан уравнения (2.8) равен

$$\mathcal{L} = e^{\int K(t)\,dt}\left(-\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \Theta\cos u + \Psi\sin u\right). \tag{2.11}$$

Введя обобщённый импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = -M\dot{u},$$

получаем, что лагранжиану (2.11) соответствует гамильтониан

$$H(t,p,u) = -\frac{p^2}{2M} + M\Theta\cos u - M\Psi\sin u.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{p}{M},$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = -M\Theta\sin u - M\Psi\cos u$$

и, следовательно, получаем уравнения Гамильтона (2.9).

Теорема доказана. ■

Уравнения (2.9) могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона с действием

$$J[p,u] = \int_0^T [p\dot{u} - H(t,p,u)]\,dt. \tag{2.12}$$

**Построение и исследование дискретного аналога задачи (2.1), (2.2) на основе функционала (2.10)**

Разобьем отрезок $[0,T]$ на $m$ равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0,m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения [59]

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(t) = \overline{u}_r = \big(u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{m-1})\big),$$

где $r = m - 1$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$. Для удобства напишем $\tilde{u}_k = u(t_k)$, $k = \overline{0,m}$.

Обозначим $\overline{N}^F$ — оператор дискретного аналога задачи (2.1), (2.2) на основе функционала (2.10).

Положим

$$D\left(\overline{N}^F\right) = \{(\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m): \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0 = \varphi, \tilde{u}_m = \psi\},$$

$$D\left(\left(\overline{N}^F\right)'\right) = \{(\tilde{h}_0, \overline{h}_r, \tilde{h}_m): \overline{h}_r \in \overline{U}_r, \tilde{h}_0 = \tilde{h}_m = 0\}.$$

Запишем (2.10) в виде

$$F_{\widehat{N}}[u] = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} M\left(-\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \Theta\cos u + \Psi\sin u\right) dt.$$

Далее аппроксимируем интегралы

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} M\left(-\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \Theta\cos u + \Psi\sin u\right) dt$$
$$\approx \frac{T}{m} M_k \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau}\right)^2 - \Theta_{\mathrm{k}}\cos\tilde{u}_k + \Psi_{\mathrm{k}}\sin\tilde{u}_k\right],$$

где $M_k = M(t_k)$, $\Theta_k = \Theta(t_k)$ и $\Psi_k = \Psi(t_k)$.

Функционал (2.10) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\overline{F}[\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1} M_k \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau}\right)^2 - \Theta_k\cos\tilde{u}_k + \Psi_k\sin\tilde{u}_k\right].$$

Приравнивая к нулю частные производные

$$\frac{\partial\overline{F}[\overline{u}_r]}{\partial\tilde{u}_k} = \frac{T}{m}\left(M_k\frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau^2} - M_{k-1}\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tau^2} + M_k\Theta_{\mathrm{k}}\sin\tilde{u}_k + M_k\Psi_k\cos\tilde{u}_k\right),$$
$$k = \overline{1, m-1},$$

получаем систему разностных уравнений

$$\overline{N}_k^F(\overline{u}_r) \equiv M_k\frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau^2} - M_{k-1}\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tau^2} + M_k\Theta_{\mathrm{k}}\sin\tilde{u}_k$$
$$+ M_k\Psi_k\cos\tilde{u}_k = 0, \qquad (2.13)$$

$$k = \overline{1, m-1}.$$

Отсюда находим решение этой системы

$$\tilde{u}_{k+1} = \tilde{u}_k + \frac{M_{k-1}}{M_k}(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}) - \tau^2 \Theta_{\mathrm{k}} \sin \tilde{u}_k - \tau^2 \Psi_k \cos \tilde{u}_k\,, \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$\tilde{u}_0 = \varphi, \tilde{u}_m = \psi.$$

Перейдем к следующему частному случаю уравнения (2.1). Рассмотрим уравнение движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по синусоидальному закону вдоль прямой, наклоненной к вертикальной оси $OY$ под углом α [60]

$$N_{\text{ч}}(u) \equiv \ddot{u} + \sigma \dot{u} + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \sin u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \cos u = 0, \qquad t \in [0, T], \tag{2.14}$$

$$u|_{t=0} = \varphi, u|_{t=T} = \psi, \tag{2.15}$$

где $u$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия, σ — коэффициент затухания, $d$ — длина маятника, $g$ — ускорение свободного падения, ω — частота колебаний точки подвеса, $A$ — амплитуда колебаний точки подвеса.

В силу теорем 2.1, 2.2 при $\sigma \neq 0$ оператор $N_{\text{ч}}$ (2.14) является непотенциальным относительно билинейной формы (2.3) и для задачи (2.14), (2.15) существует вариационный множитель вида $e^{\sigma t}$. Обозначим

$$\widehat{N}_{\text{ч}}(u) \equiv e^{\sigma t} N_{\text{ч}}(u) = 0. \tag{2.16}$$

Согласно формуле (2.10), имеем действие по Гамильтону для (2.16):

$$F_{\widehat{N}_ч}[u] = \int_0^T e^{\sigma t}\left(-\frac{1}{2}\dot{u}^2 - \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t)\cos\alpha}{d}\cos u \right.$$
$$\left. - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t)\sin\alpha}{d}\sin u\right) dt, \tag{2.17}$$

а соответствующий конечно-разностный функционал имеет вид

$$\overline{F}[\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{\sigma t_k}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau}\right)^2 - \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_k)\cos\alpha}{d}\cos\tilde{u}_k \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_k)\sin\alpha}{d}\right)\sin\tilde{u}_k\right].$$

С помощью (2.13) запишем дискретный аналог задачи (2.14), (2.15) на основе функционала (2.17)

$$\overline{N}^F_{ч,k}(\overline{u}_r) \equiv e^{\sigma t_k}\frac{\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k}{\tau^2} - e^{\sigma t_{k-1}}\frac{\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}}{\tau^2} + e^{\sigma t_k}\frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_k)\cos\alpha}{d}\sin\tilde{u}_k$$
$$+ e^{\sigma t_k}\left(-\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_k)\sin\alpha}{d}\right)\cos\tilde{u}_k = 0, \qquad k = \overline{1, m-1},$$
$$\tilde{u}_0 = \varphi, \tilde{u}_m = \psi.$$

Решение этой системы находится по формулам

$$\tilde{u}_{k+1} = \tilde{u}_k + e^{-\sigma\tau}(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1}) - \tau^2\frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_k)\cos\alpha}{d}\sin\tilde{u}_k$$
$$+ \tau^2\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_k)\sin\alpha}{d}\cos\tilde{u}_k\,, \qquad k = \overline{1, m-1}, \tag{2.18}$$
$$\tilde{u}_0 = \varphi, \tilde{u}_m = \psi.$$

Для проведения численных экспериментов положим:

- коэффициент затухания $\sigma = -0.01$ с$^{-1}$,
- ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с$^2$,
- длина $d = 1$ м,
- малый параметр $\gamma$ ($\gamma = 0.3$, 0.1 см. ниже),

- амплитуда колебаний точки подвеса $A = \gamma A_0$, $A_0 = 1$ м,
- угол $\alpha = \gamma^2 \alpha_0$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$,
- частота колебаний точки подвеса $\omega = \frac{\omega_0}{\gamma}$, $\omega_0 = 5$ Гц,
- $T = 5\frac{2\pi}{\omega_0}$ с количеством узлов $m = 400$, значения функции в конечных точках $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_m = 0$.

На рисунке 2.1, рисунке 2.2 изображены решения (2.18) при различных указанных значениях $\gamma$.

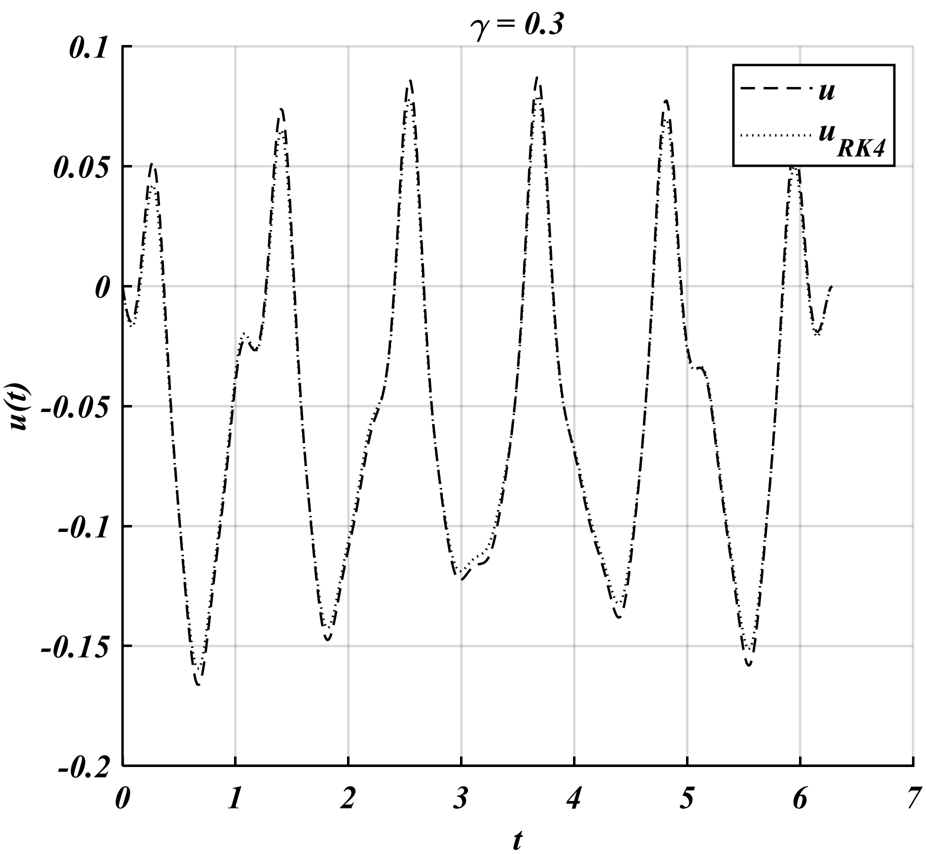


Рисунок 2.1. $u$ — решение (2.18), $u_{RK4}$ — решение по методу Рунге-Кутта при $\gamma = 0.3$.

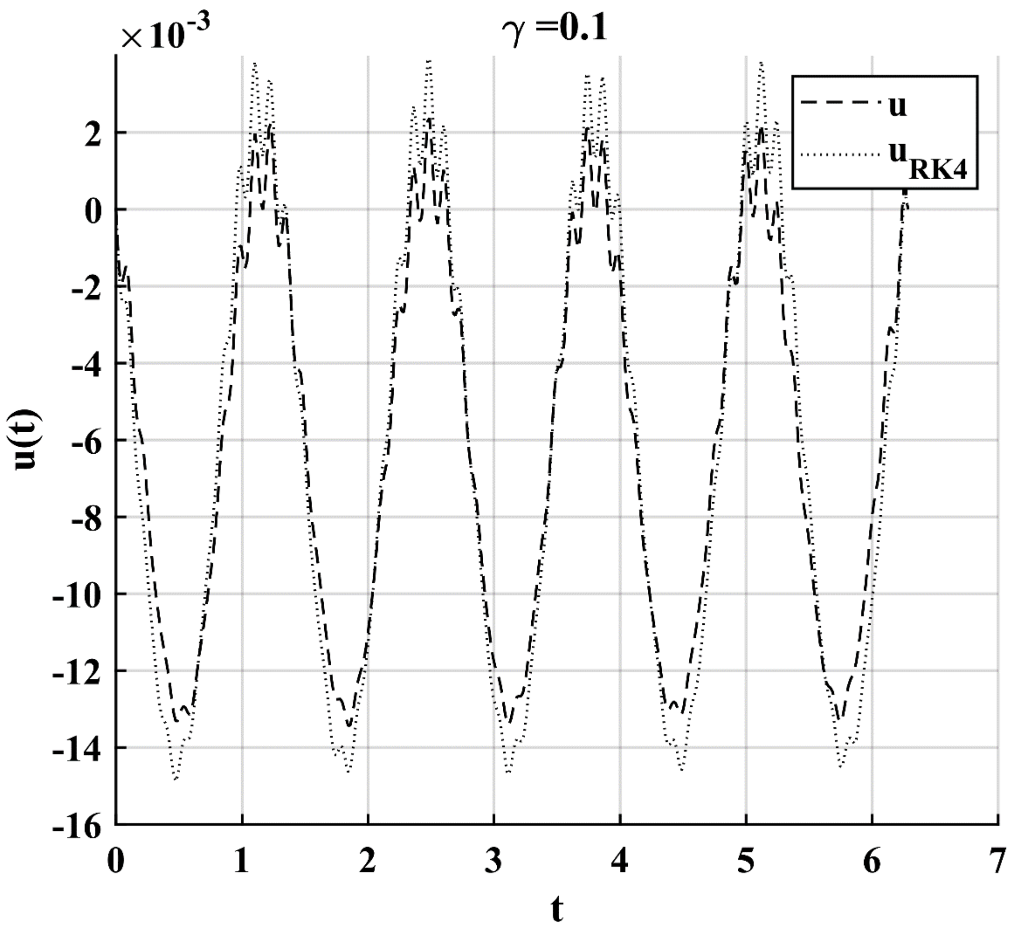


Рисунок 2.2. $u$ — решение (2.18), $u_{RK4}$ — решение по методу Рунге–Кутты при $\gamma = 0.1$.

Следует отметить, что поскольку (2.1), (2.2) — краевая задача, для построения приведенных в работе графиков дополнительно использован известный метод стрельбы [61]. Он позволяет учесть значение решения на правом конце отрезка. В этой связи выбран метод Рунге-Кутты [62] из-за его простоты и эффективности для проверки правильности найденного решения (2.18).

Легко видеть, что когда $A_0\omega_0 > \sqrt{2gd}$ и γ достаточно мало ($\gamma = 0.1$), графики решения (2.18) имеют $T$-периодический вид. Это свойство в случае непрерывного времени отмечено в статьях [60, 63].

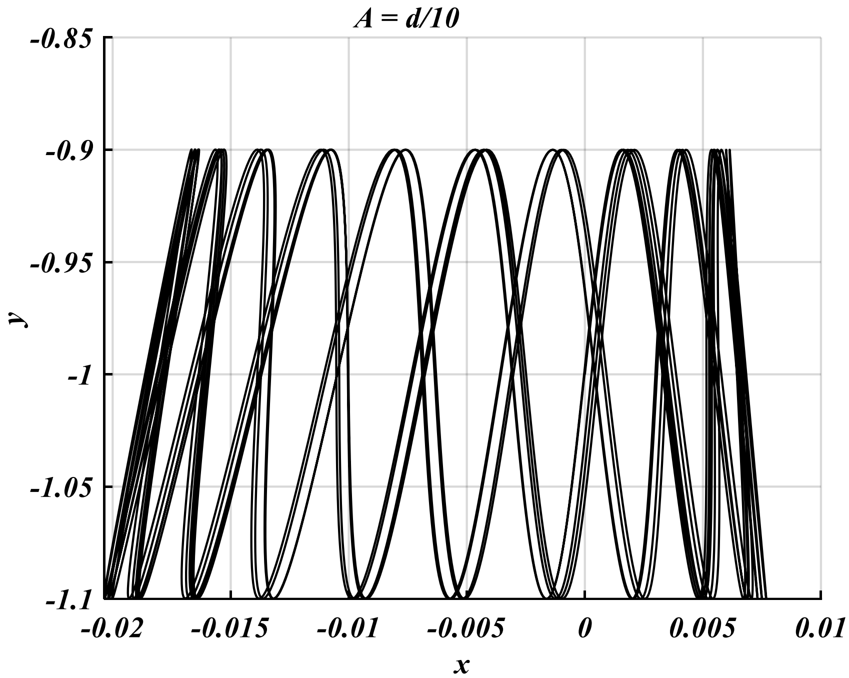


Рисунок 2.3. Портрет системы на плоскости $OXY$ для маятника при большой амплитуде вынуждающих колебаний при $A = \frac{d}{10}$.

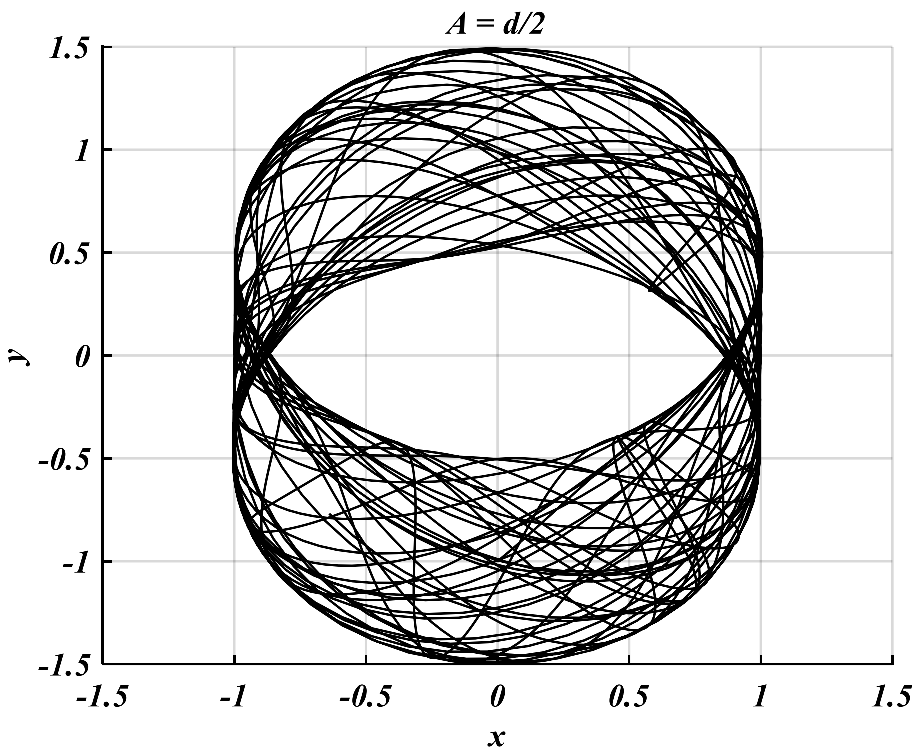


Рисунок 2.4. Портрет системы на плоскости $OXY$ для маятника при большой амплитуде вынуждающих колебаний при $A = \frac{d}{2}$.

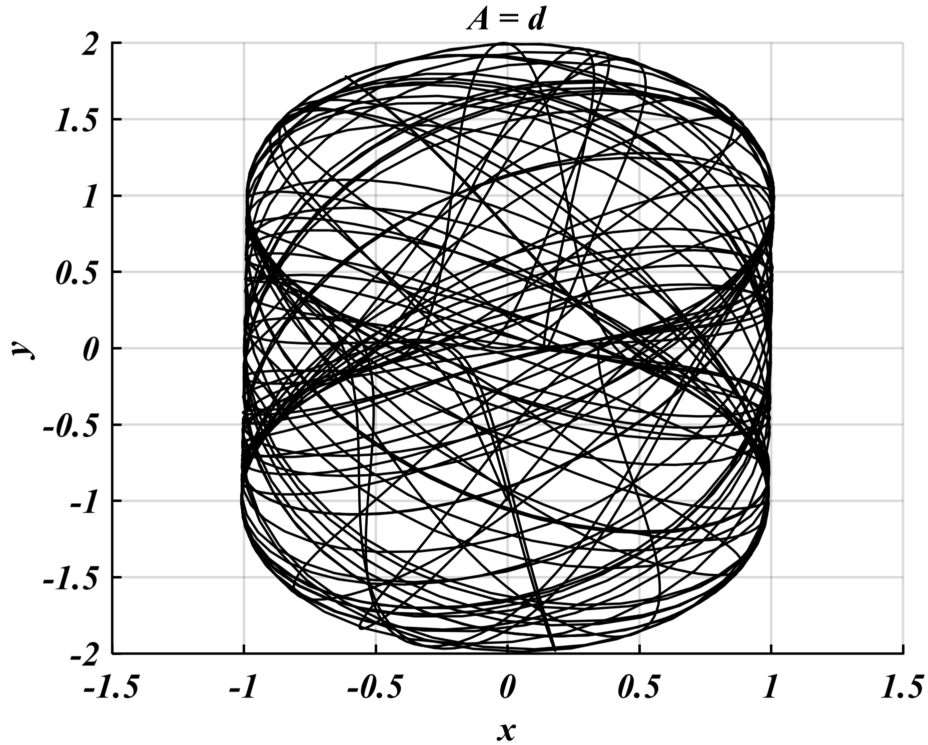


Рисунок 2.5. Портрет системы на плоскости $OXY$ для маятника при большой амплитуде вынуждающих колебаний при $A = d$.

Если увеличить значение амплитуды колебаний точки подвеса маятника $A = \frac{d}{2}$, то придём к решению, изображенному на рисунке 2.4 (при этом параметры маятника следующие: $\gamma = 0.1$ и $m = 4000$). При дальнейшем увеличении амплитуды до $A = d$ траектория движения маятника заполняет все пустое пространство внутри. Это хорошо видно на рисунке 2.5. При увеличении амплитуды картина не меняется.

**Построение и исследование разностной схемы уравнений (2.9) на основе функционала (2.12)**

Аналогично предыдущему разделу, запишем (2.12) в виде суммы

$$J[p, u] = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [p\dot{u} - H(t, p, u)]\ dt.$$

Аппроксимируя, получаем

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [p\dot{u} - H(t,p,u)]\ dt \approx \frac{T}{m}\left[\tilde{p}_k\left(\frac{\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k}{\tau}\right) - H_k\right],$$

где $\tilde{p}_k = p(t_k)$ и $H_k = H(t_k, \tilde{p}_k, \tilde{u}_k)$.

Таким образом, имеем разностное действие по Гамильтону

$$\bar{J}[\overline{p}_r, \overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\tilde{p}_k\left(\frac{\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k}{\tau}\right) - H_k\right].$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial\bar{J}[\overline{p}_r, \overline{u}_r]}{\partial\tilde{p}_k} = \frac{T}{m}\left(\frac{\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k}{\tau} - \frac{\partial H_k}{\partial\tilde{p}_k}\right), \quad k = \overline{0, m-1},$$
$$\frac{\partial\bar{J}[\overline{p}_r, \overline{u}_r]}{\partial\tilde{u}_k} = \frac{T}{m}\left(-\frac{\tilde{p}_k-\tilde{p}_{k-1}}{\tau} - \frac{\partial H_k}{\partial\tilde{u}_k}\right), \quad k = \overline{1, m}.$$

Теперь получаем систему разностных уравнений

$$\overline{N}_{1,k}^J \equiv \frac{\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k}{\tau} + \frac{\tilde{p}_k}{M_k} = 0,$$

$$\overline{N}_{2,k}^J \equiv -\frac{\tilde{p}_{k+1}-\tilde{p}_k}{\tau} + M_{k+1}\Theta_{k+1}\sin\tilde{u}_{k+1} + M_{k+1}\Psi_{k+1}\cos\tilde{u}_{k+1} = 0,$$

$$k = \overline{0, m-1}.$$

Отсюда находим решение этой системы по формулам

$$\tilde{u}_{k+1} = \tilde{u}_k - \tau\frac{\tilde{p}_k}{M_k}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + \tau M_{k+1}\Theta_{k+1}\sin\tilde{u}_{k+1} + \tau M_{k+1}\Psi_{k+1}\cos\tilde{u}_{k+1}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$\tilde{u}_0 = \varphi, \tilde{u}_m = \psi.$$

Перейдём к задаче (2.14), (2.15). В силу теоремы 2.3 уравнение (2.16) представимо в форме уравнений Гамильтона

$$\dot{u} = -e^{-\sigma t}p,$$
$$\dot{p} = e^{\sigma t}\left(\frac{g - A\omega^2\sin(\omega t)\cos\alpha}{d}\sin u - \frac{A\omega^2\sin(\omega t)\sin\alpha}{d}\cos u\right).$$

Действие по Гамильтону имеет вид

$$J_{\widehat{N}_ч}[t,p,u]=\int_0^T[p\dot{u}-H_ч(t,p,u)]\,dt,$$

где

$$H_ч(t,p,u)=-\frac{p^2}{2e^{\sigma t}}+e^{\sigma t}\frac{g-A\omega^2\sin(\omega t)\cos\alpha}{d}\cos u+e^{\sigma t}\frac{A\omega^2\sin(\omega t)\sin\alpha}{d}\sin u.$$

Соответствующий разностный функционал равен

$$\bar{J}_{\widehat{N}_ч}[\overline{p}_r,\overline{u}_r]=\frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\tilde{p}_k\left(\frac{\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k}{\tau}\right)-H_{ч,k}\right],$$

где $H_{ч,k}=H_ч(t_k,\tilde{p}_k,\tilde{u}_k)$. На его основе получаем следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\overline{N}^J_{ч1,k}\equiv\frac{\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k}{\tau}+\frac{\tilde{p}_k}{e^{\sigma t_k}}=0,\\
&\overline{N}^J_{ч2,k}\equiv-\frac{\tilde{p}_{k+1}-\tilde{p}_k}{\tau}+e^{\sigma t_{k+1}}\frac{g-A\omega^2\sin(\omega t_{k+1})\cos\alpha}{d}\sin\tilde{u}_{k+1}\\
&\qquad-e^{\sigma t_{k+1}}\frac{A\omega^2\sin(\omega t_{k+1})\sin\alpha}{d}\cos\tilde{u}_{k+1}=0,\\
&k=\overline{0,m-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_{k+1}=\tilde{u}_k-\tau\frac{\tilde{p}_k}{e^{\sigma t_k}},k=\overline{0,m-1},\\
&\tilde{p}_{k+1}=\tilde{p}_k+\tau e^{\sigma t_{k+1}}\frac{g-A\omega^2\sin(\omega t_{k+1})\cos\alpha}{d}\sin\tilde{u}_{k+1}\\
&\qquad-\tau e^{\sigma t_{k+1}}\frac{A\omega^2\sin(\omega t_{k+1})\sin\alpha}{d}\cos\tilde{u}_{k+1},k=\overline{0,m-1},\\
&\tilde{u}_0=\varphi,\tilde{u}_m=\psi.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

Для проведения численных экспериментов положим:

- малый параметр $\gamma=\ 0.1$,
- амплитуда колебаний точки подвеса $A=\gamma A_0$, $A_0=1$м,
- остальные параметры $\sigma$, $g$, $d$, $\alpha_0$, $\omega_0$, $T$, $m$, $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_m$ не меняются, как в предыдущем разделе.

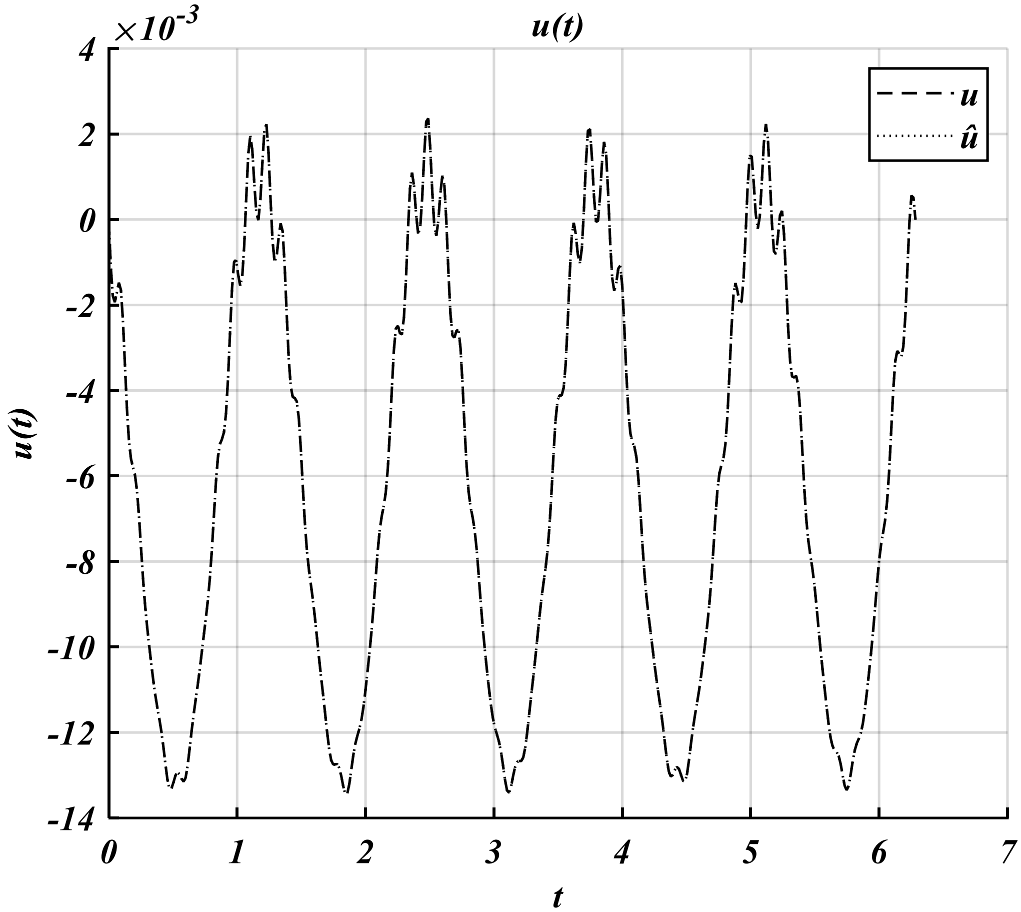


Рисунок 2.6. $\hat{u}$ — решение (2.18), $u$ — решение (2.19).

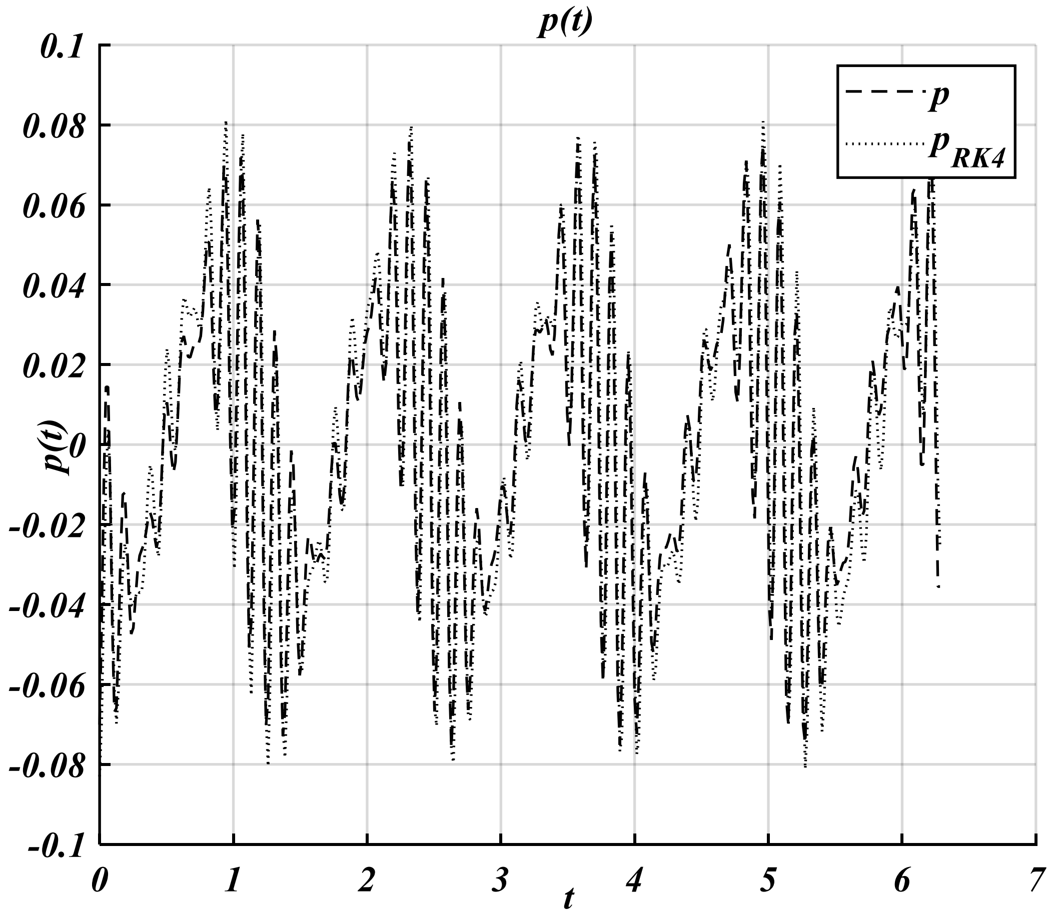


Рисунок 2.7. $p$ — решение (2.19), $p_{\mathrm{RK4}}$ — решение по методу Рунге-Кутты.

Таким образом, выше представлен вариационный подход к построению двух разностных схем для задачи о движении маятника, точка подвеса которого осциллирует вдоль прямой, составляющий малый угол с вертикалью. Приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи. Численные решения показывают, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает периодическое движение.

## 2. 2 Бивариационность и сравнение приближенных решений диссипативных задач

В настоящем параграфе проведено сравнение аналитического и приближенных решений заданной диссипативной задачи, допускающей бивариационные формулировки.

Рассмотрим следующую задачу:

$$N(u) \equiv \ddot{u} - 2\dot{u} - 3u - t(1 + e^{3t}) = 0, t \in (0,1), \quad (2.20)$$

$$D(N) = \{u \in U = C^2[0,1]: u(0) = u(1) = 0\}. \quad (2.21)$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция.

**Утверждение 2.1** *Задача* (2.20), (2.21) *не допускает прямой вариационной формулировки относительно билинейной формы вида*

$$\langle v, g \rangle \equiv \int_0^1 v(t) g(t)\, dt.$$

*Доказательство.* Имеем

$$N'_u h = \ddot{h} - 2\dot{h} - 3h,$$

$$\langle N'_u h, g \rangle = \int_0^1 \left[\ddot{h} - 2\dot{h} - 3h\right] g\, dt \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u). \quad (2.22)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что

$$h|_{t=0} = g|_{t=0} = h|_{t=1} = g|_{t=1} = 0 \quad \forall h, g \in (N'_u), \quad (2.23)$$

из (2.22) получаем

$$\langle N'_u h, g \rangle = \int_0^1 [\ddot{g} + 2\dot{g} - 3g] h\, dt \not\equiv \langle N'_u g, h \rangle = \int_0^1 [\ddot{g} - 2\dot{g} - 3g] h\, dt\,.$$

Заданный оператор вида (2.20) не удовлетворяет условию (1.5).

Утверждение доказано. ■

**Утверждение 2.2.** *Для задачи* (2.20), (2.21) *существует вариационный множитель вида* $M(t) = e^{-2t}$.

*Доказательство*. Обозначим

$$\widehat{N}(u) = M(t)N(u),$$

$$Q(u,h,g) = \left\langle \widehat{N}'_u h, g \right\rangle - \left\langle \widehat{N}'_u g, h \right\rangle \quad \forall u \in D(N), \forall g,h \in D(N'_u).$$

Имеем

$$\widehat{N}'_u h = M(t)N'_u h,$$

$$\left\langle \widehat{N}'_u h, g \right\rangle = \int_0^1 M(t)N'_u\, h \cdot g\, dt = \int_0^1 M(t)\left[\ddot{h}g - 2\dot{h}g - 3hg\right] dt\ ,$$

$$\left\langle \widehat{N}'_u g, h \right\rangle = \int_0^1 M(t)[\ddot{g}h - 2\dot{g}h - 3gh]\, dt\,.$$

С учётом этого получаем

$$Q(u,h,g) = \int_0^1 \left[M(t)g\ddot{h} - 2M(t)g\dot{h} - M(t)h\ddot{g} + 2M(t)h\dot{g}\right] dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия (2.23), отсюда находим

$$Q(u,h,g) = \int_0^1 \left\{2\left[\frac{d}{dt}M + 2M\right]\dot{g} + \left[\frac{d^2}{dt^2}M + 2\frac{d}{dt}M\right]g\right\} h\, dt,$$

$$\forall u \in D(N), \forall h,g \in D(N'_u).$$

Для выполнения условия

$$Q(u,h,g) = 0 \quad \forall u \in D(N), \forall g,h \in D(N'_u)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d}{dt}M + 2M = 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M + 2\frac{d}{dt}M = 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Таким образом, вариационный множитель $M(t)$ имеет вид

$$M(t) = e^{-2t}.$$

Утверждение доказано. ■

Уравнение $\widehat{N}(u) \equiv e^{-2t}N(u) = 0, u \in D(N)$ может быть получено из вариационного принципа Гамильтона с действием

$$F_1[u] = \int_0^1 \left[-e^{-2t}\left(\frac{1}{2}(\dot{u})^2 + \frac{3}{2}u^2 + t(1+e^{3t})u\right)\right]dt. \tag{2.24}$$

Определим вспомогательный оператор $Bu(t) = u(1-t)$ на $D(N)$ и следующую билинейную форму:

$$\Phi_2(v,g) = \int_0^1 v(t)g(1-t)dt. \tag{2.25}$$

**Утверждение 2.3.** *Оператор* (2.20) *является потенциальным на* $D(N)$ (2.21) *относительно билинейной формы* (2.25).

*Доказательство.* Имеем

$$\Phi_2(N_u'h,g) = \int_0^1 \left[\ddot{h}(t) - 2\dot{h}(t) - 3h(t)\right]g(1-t)\,dt \quad \forall u \in D(N), \forall g,h \in D(N_u').$$

Интегрируя по частям и учитывая (2.23), получаем

$$\Phi_2(N_u'h,g) = \int_0^1 \left[h(t)\frac{d^2}{dt^2}g(1-t) + 2h(t)\frac{d}{dt}g(1-t) - 3h(t)g(1-t)\right]dt$$

$$= \int_0^1 [\ddot{g}(t) - 2\dot{g}(t) - 3g(t)]h(1-t)\,dt \equiv \Phi_2(N_u'g,h).$$

Заданный оператор вида (2.20) удовлетворяет условию (1.5).

Утверждение доказано. ■

Используя формулу (1.4), находим второе действие по Гамильтону для (2.20) в виде неэйлерова функционала

$$F_2[u] = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[u(1-t)\frac{d^2}{dt^2}u(t) - 2u(1-t)\frac{d}{dt}u(t) - 3u(1-t)u(t) \right.$$
$$\left. - 2t(1+e^{3t})u(1-t)\right]dt. \tag{2.26}$$

**Приближенные решения и их сравнение**

Применяя метод Ритца [64], используя функционалы (2.24) и (2.26) с помощью системы Матлаб, находим приближенные решения задачи (2.20), (2.21), соответственно, в виде

$$\begin{aligned} u^{R1}(t) = {} & 3.2766037543838721019850775385028\ t^5 \\ & - 4.2485181155792907918137662490888\ t^4 \\ & + 2.2131010564544955197677266066156\ t^3 \\ & - 0.88233121358421046988396953412514\ t^2 \\ & - 0.35885548167486636005506836190444\ t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{R2}(t) = {} & 3.7263099296607348401491409737749\ t^5 \\ & - 5.3462681126693769872855660451808\ t^4 \\ & + 3.1261912321936359638708973341052\ t^3 \\ & - 1.1753405883560688003732682084856\ t^2 \\ & - 0.33089246082892501636120405421377\ t. \end{aligned}$$

Используя метод, представленный в параграфе 2.1, находим дискретные аналоги задачи (2.20), (2.21) на основе функционалов (2.24) и (2.26), соответственно, в виде

$$\overline{N}_{F_1}^i(\bar{u}_r) \equiv e^{-2t_i}\frac{\tilde{u}_{i+1}-\tilde{u}_i}{\tau^2} - e^{-2t_{i-1}}\frac{\tilde{u}_i-\tilde{u}_{i-1}}{\tau^2} - 3e^{-2t_i}\tilde{u}_i - e^{-2t_i}t_i(1+e^{3t_i}) = 0,$$
$$i = \overline{1, m-1},$$

$$\overline{N}_{F_2}^j(\bar{u}_r) \equiv \frac{\tilde{u}_{j+2}-2\tilde{u}_{j+1}+\tilde{u}_j}{\tau^2} - 2\frac{\tilde{u}_{j+1}-\tilde{u}_j}{\tau} - 3\tilde{u}_j - t_j(1+e^{3t_j}) = 0,$$

$$j = \overline{0, m-2},$$

и их решения

$$\tilde{u}_{i+1}^{D1} = \tilde{u}_i + e^{2\tau}(\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}) + 3\tau^2\tilde{u}_i + \tau^2 t_i(1 + e^{3t_i}), i = \overline{1, m-1},$$

$$\tilde{u}_{j+2}^{D2} = 2\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j + 2\tau\left(\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j\right) + 3\tau^2\tilde{u}_j + \tau^2 t_j(1 + e^{3t_j}), j = \overline{0, m-2}.$$

Точное решение задачи (2.20), (2.21) имеет вид

$$u^{\text{T}}(t) = -\frac{e^{-t}(23e^3 + 16)}{144(e^3 - e^{-1})} - \frac{e^{3t}(45e^3 - 137e^{-1} - 64)}{576(e^3 - e^{-1})} + \frac{1}{576}(72t^2 - 36t + 9)e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}.$$

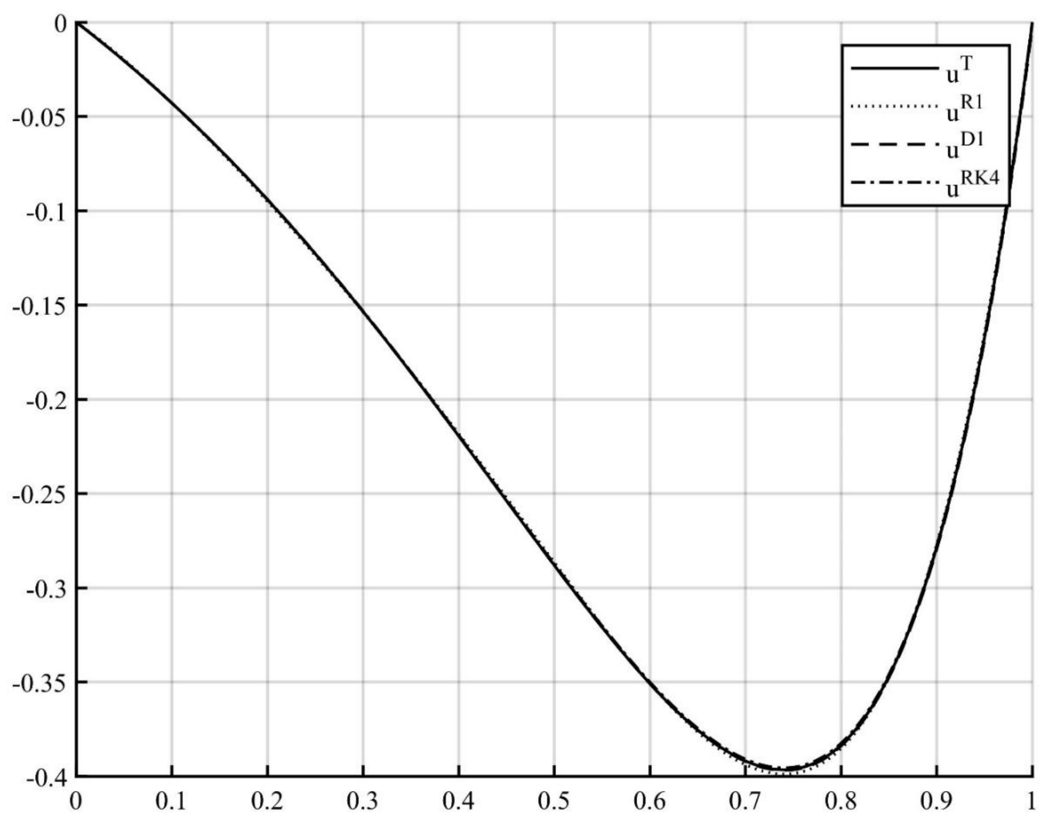


Рисунок 2.8. Зависимость решений $u^T$, $u^{R1}$, $u^{D1}$, $u^{RK4}$ от $t$

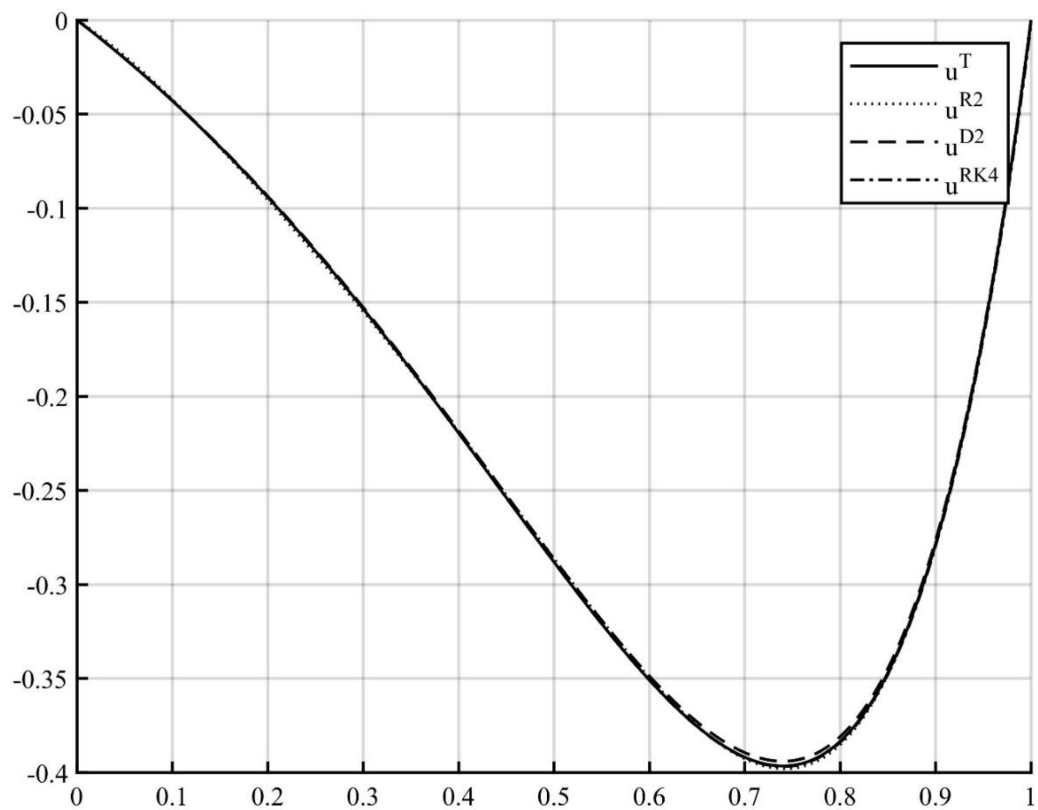


Рисунок 2.9 Зависимость решений $u^T$, $u^{R2}$, $u^{D2}$, $u^{RK4}$ от t

Здесь $u^{RK4}$ — приближенное решение по методу Рунге-Кутты.

Рассмотрим приближенные решения $u^{R1}$, $u^{R2}$, $u^{D1}$, $u^{D2}$, $u^{RK4}$ при $m = 1000$. Их отклонения от точного решения $u^T$ по сферической норме

$$\|\overline{u}_r\| = \left(\frac{T}{m}\sum_{k=1}^{m-1}(\tilde{u}_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

равны соответственно

$$e_1 = 0.0402352428264095840493297373541 28,$$

$$e_2 = 0.038419881792126513164742362960169,$$

$$e_3 = 0.018588893120276915593702682372168,$$

$$e_4 = 0.049958353856645015822479649614252,$$

$$e_5 = 0.018118452545117440938282626916589.$$

Изложенная идея применения альтернативных действий по Гамильтону для получения приближенных моделей с сохранением свойства потенциальности и отыскания их решений при некоторых условиях может быть распространена и на ряд других задач.

## 2. 3 Дискретные динамические системы Биркгофа на основе функционала (1.19)

В настоящем параграфе построены системы дискретных уравнений Биркгофа на основе функционала (1.19).

Разобьем отрезок $[0,T]$ на $m$ равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0,m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения [59]

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(t) = \overline{u}_r = \big(u^1(t_1), u^2(t_1), \dots, u^{2n}(t_1), u^1(t_2), u^2(t_2), \dots, u^{2n}(t_2), \dots, u^1(t_{m-1}), u^2(t_{m-1}), \dots, u^{2n}(t_{m-1})\big), \tag{2.27}$$

где $r = 2n(m-1)$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$. Обозначим $\tilde{u}_k = u(t_k)$, $\tilde{u}_k^i = u^i(t_k)$, $k = \overline{0,m}$.

Обозначим $\overline{N}$ оператор дискретных уравнений Биркгофа (1.20) на основе функционала (1.19). Положим

$$D(\overline{N}) = \{(\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m) : \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i,\ \tilde{u}_m^i = \psi^i,\ i = \overline{1,2n}\},$$

где $\varphi^i$, $\psi^i$, $i = \overline{1,2n}$ — заданные числа.

Аппроксимируем интегралы

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i\, \dot{u}^i - B\right] dt \approx \frac{T}{m}\left(\sum_{i=1}^{2n} R_{i,k} \frac{\tilde{u}_{k+1}^i - \tilde{u}_k^i}{\tau} - B_k\right),$$

где $R_{i,k} = R_i(t_k, \tilde{u}_k)$, $B_k = B(t_k, \tilde{u}_k)$.

Функционал (1.19) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$F[u]=\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{2n}R_i\dot{u}^i-B\right]dt\approx\overline{F}[\overline{u}_r]=\frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{2n}R_{i,k}\frac{\tilde{u}_{k+1}^i-\tilde{u}_k^i}{\tau}-B_k\right).$$

Приравнивая к нулю частные производные

$$\frac{\partial\overline{F}[\overline{u}_r]}{\partial\tilde{u}_k^j}=\frac{T}{m}\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_{i,k}}{\partial\tilde{u}_k^j}\frac{\tilde{u}_{k+1}^i-\tilde{u}_k^i}{\tau}-\frac{R_{j,k}-R_{j,k-1}}{\tau}-\frac{\partial B_k}{\partial\tilde{u}_k^j}\right),$$

$$j=\overline{1,2n},\quad k=\overline{1,m-1},$$

находим разностный по времени аналог (1.20) [36–38].

$$\overline{N}_{j,k}\equiv\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_{i,k}}{\partial\tilde{u}_k^j}\frac{\tilde{u}_{k+1}^i-\tilde{u}_k^i}{\tau}-\frac{R_{j,k}-R_{j,k-1}}{\tau}-\frac{\partial B_k}{\partial\tilde{u}_k^j}=0,\tag{2.28}$$

$$j=\overline{1,2n},\quad k=\overline{1,m-1}.$$

Перепишем систему уравнений (2.28) в виде

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_{i,k}}{\partial\tilde{u}_k^j}\tilde{u}_{k+1}^i=\tau\left[\frac{R_{j,k}-R_{j,k-1}}{\tau}+\frac{\partial B_k}{\partial\tilde{u}_k^j}\right]+\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_{i,k}}{\partial\tilde{u}_k^j}\tilde{u}_k^i,\tag{2.29}$$

$$j=\overline{1,2n},\ k=\overline{1,m-1}.$$

Если

$$\det\left\|\left\{\frac{\partial R_{i,k}}{\partial\tilde{u}_k^j}\right\}_{i=1,j=1}^{2n,2n}\right\|\neq0,$$

то из (2.29) находим решения системы уравнений в виде

$$\tilde{u}_{k+1}=w(\tilde{u}_k,\tilde{u}_{k-1}),k=\overline{1,m-1}.$$

## 2. 4 Потенциальность дискретных систем

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия потенциальности относительно заданной билинейной формы. Изложен алгоритм построения соответствующего функционала — аналога действия по Гамильтону.

**Постановка задач**

Пусть состояние потенциальной системы определяется вектор-функцией $u(t)=\left(u^1(x),u^2(x),\dots,u^{2n}(x)\right)^{\mathbb{T}},\ t\in(0,T)$. Определим оператор сужения $\overline{\mathcal{T}}_r u(t)$ (2.27) и зададим сферическую норму

$$\|\overline{u}_r\|=\left(\frac{T}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{2n}\left(\tilde{u}_k^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.30)$$

Заменим в дифференциальном операторе системы (1.21)

$$C(t,u)\dot{u}(t)\sim\frac{1}{\tau}C_k^1(\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k)+\frac{1}{\tau}C_k^2(\tilde{u}_k-\tilde{u}_{k-1}),$$

где $C_k^1=C^1(t_k,\tilde{u}_k)$, $C_k^2=C_k^2(t_k,\tilde{u}_k,\tilde{u}_{k-1})$ — матрицы $\left[C_{ij,k}^1\right]_{2n\times 2n}$, $\left[C_{ij,k}^2\right]_{2n\times 2n}$, удовлетворяющие равенству $C_k^1+C_k^2=C(t_k,\tilde{u}_k)+o(\tau)$. Дифференцируемые функции $C_{ij,k}^1$ и $C_{ij,k}^2$ можно выбрать разными способами (см. пример 2.1).

Тогда можем записать в $\overline{U}_r$ следующую разностную схему:

$$\overline{N}_k\equiv\frac{1}{\tau}C_k^1(\tilde{u}_{k+1}-\tilde{u}_k)+\frac{1}{\tau}C_k^2(\tilde{u}_k-\tilde{u}_{k-1})+E(t_k,\tilde{u}_k)=0, k=\overline{1,m-1}, \qquad (2.31)$$

$$\tilde{u}_0=\varphi,\tilde{u}_m=\psi.$$

Обозначим

$$\overline{N}_{i,k}\equiv\sum_{j=1}^{2n}\left[\frac{1}{\tau}C_{ij,k}^1\left(\tilde{u}_{k+1}^j-\tilde{u}_k^j\right)+\frac{1}{\tau}C_{ij,k}^2\left(\tilde{u}_k^j-\tilde{u}_{k-1}^j\right)\right]+E_{i,k}, i=\overline{1,2n}, k=\overline{1,m-1}$$

и

$$\overline{N}_r(\overline{u}_r)\equiv\left(\overline{N}_{1,1},\overline{N}_{1,2},\cdots,\overline{N}_{1,m-1},\overline{N}_{2,1},\cdots,\overline{N}_{2n,m-1}\right),$$

где $C_{ij,k}^1=C_{ij}^1(t_k,\tilde{u}_k)$, $C_{ij,k}^2=C_{ij}^2(t_k,\tilde{u}_k,\tilde{u}_{k-1})$, $E_{i,k}=E_i(t_k,\tilde{u}_k)$.

В работах [37, 65] получены дискретные аналогии уравнения Биркгофа путем дискретизации пфаффиана. Однако вопросы о необходимых и достаточных условиях потенциальности дискретных систем и построении соответствующих функционалов в литературе, насколько нам известно, пока не исследовались. Рассматриваемые вопросы восходят к идеям монографии [49].

Для дальнейшего изложения нам понадобится понятие потенциальности дискретного оператора.

**Критерий потенциальности дискретного оператора**

Обозначим через $\overline{N}_r'$ первую производную Гато оператора $\overline{N}_r$ и положим

$$D\left(\overline{N}_r\right) = \left\{(\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m) : \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i,\ \tilde{u}_m^i = \psi^i,\ i = \overline{1,2n}\right\}, \tag{2.32}$$

$$D\left(\overline{N}_r'\right) = \left\{\left(\tilde{h}_0, \overline{h}_r, \tilde{h}_m\right) : \overline{h}_r \in \overline{U}_r, \tilde{h}_0 = \tilde{h}_m = 0\right\}.$$

**Определение 2.1.** [42] *Дискретный оператор* $\overline{N}_r : D\left(\overline{N}_r\right) \to \mathbb{R}^r$ *называется потенциальным в области* $D\left(\overline{N}_r\right)$ *относительно билинейной формы* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \overline{U}_r \times \overline{U}_r \to \mathbb{R}$*, если существует функционал* $F_{\overline{N}_r} : \overline{U}_r \to \mathbb{R}$ *такой, что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_{\overline{N}_r}\left[\overline{u}_r + \varepsilon \overline{h}_r\right] - F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r]}{\varepsilon} = \left\langle \overline{N}_r(\overline{u}_r), \overline{h}_r \right\rangle \quad \forall\, \overline{u}_r \in D\left(\overline{N}_r\right), \forall\, \overline{h}_r \in D\left(\overline{N}_r'\right).$$

При этом будем говорить, что система (2.31), (2.32) является потенциальной в области $D\left(\overline{N}_r\right)$ (2.32) относительно заданной билинейной формы, а $F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r]$ — потенциал оператора $\overline{N}_r(\overline{u}_r)$.

**Теорема 2.4.** [42] *(критерий потенциальности оператора) Пусть дифференцируемый по Гато оператор* $\overline{N}_r : D\left(\overline{N}_r\right) \to \mathbb{R}^r$ и *билинейная форма*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle :\ \overline{U}_r \times \overline{U}_r \to \mathbb{R}$$

*такие, что для любых фиксированных элементов* $\overline{u}_r \in D\left(\overline{N}_r\right)$, $\overline{h}_r, \overline{g}_r \in D\left(\overline{N}_r'\right)$ *функция* $\varphi(\varepsilon) \equiv \left\langle \overline{N}_r\left(\overline{u}_r + \varepsilon \overline{h}_r\right), \overline{g}_r \right\rangle \in C^1[0,1]$. *Тогда для потенциальности оператора* $\overline{N}_r$ *в односвязной области* $D\left(\overline{N}_r\right)$ *относительно заданной билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\left\langle \overline{N}_r' \overline{h}_r, \overline{g}_r \right\rangle = \left\langle \overline{N}_r' \overline{g}_r, \overline{h}_r \right\rangle.$$

*При этом*

$$F_{\overline{N}_r}[\overline{u}_r] = \int_0^1 \left\langle \overline{N}_r \left(\overline{u}_r^0 + \lambda(\overline{u}_r - \overline{u}_r^0)\right), \overline{u}_r - \overline{u}_r^0 \right\rangle d\lambda,$$

*где* $\overline{u}_r^0 \in D(\overline{N}_r)$ *— фиксированный элемент.*

Доказательство можно получить, используя общий критерий потенциальности оператора [41].

**Пример 2.1.** *Рассмотрим систему уравнений движения точки единичной массы в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости* [4]

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ay^2 \\ -y \end{pmatrix} = 0, \\ x(0) = \varphi, \\ x(T) = \psi, \end{cases}$$

*где* $\dot{x} = y$ *скорость частицы,* $a$ *— постоянный коэффициент,* $\varphi$, $\psi$ *— заданные числа.*

Запишем разностную схему этой системы

$$\overline{N}_k(\overline{u}_r) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k}{\tau} \\ \dfrac{\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\tilde{y}_k}{\tilde{y}_{k-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}}{\tau} \\ \dfrac{\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1}}{\tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\tilde{y}_k^2 \\ -\tilde{y}_k \end{pmatrix} = 0, \quad (2.33)$$

$$x_0 = \varphi, x_m = \psi.$$

Для оператора $\overline{N}$ (2.33) существует вариационный множитель вида [42]

$$M_k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\tilde{y}_k^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\tilde{y}_k^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M_k\overline{N}_k(\overline{u}_r)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{\tilde{y}_k^2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\tilde{x}_{k+1}-\tilde{x}_k}{\tau}\\ \frac{\tilde{y}_{k+1}-\tilde{y}_k}{\tau}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\tilde{y}_k\tilde{y}_{k-1}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\tilde{x}_k-\tilde{x}_{k-1}}{\tau}\\ \frac{\tilde{y}_k-\tilde{y}_{k-1}}{\tau}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a\\ -\frac{1}{\tilde{y}_k}\end{pmatrix}$$

— потенциальный оператор и $R_{1,k}=-\frac{1}{\tilde{y}_k}, R_{2,k}=0, B_k=a\tilde{x}_k+\ln\tilde{y}_k$.

Искомый функционал равен

$$F_{M_k\overline{N}}[\overline{u}_r]=\frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(-\frac{1}{\tilde{y}_k}\frac{\tilde{x}_{k+1}-\tilde{x}_k}{\tau}-a\tilde{x}_k-\ln\tilde{y}_k\right).$$

В случае непрерывного времени он имеет вид [4]

$$F_N=\int_0^T\left(-\frac{1}{2y}\dot{x}-\frac{x}{2y^2}\dot{y}-ax-\ln y\right)dt.$$

Положим $T=1$, $m=500$, $a=1$, $\varphi=0$, $\psi=\ln 2$. Обозначим

- $\overline{u}_r^{\mathrm{T}}=\left(\overline{x}_r^{\mathrm{T}},\overline{y}_r^{\mathrm{T}}\right)=\left(\ln(1+t_k),\frac{1}{1+t_k}\right)$ — точное решение задачи,
- $\overline{u}_r=\left(\overline{x}_r,\overline{y}_r\right)$, — решение, полученное при переходе к вариационному множителю и дальнейшей дискретизации функционала и найденное по формуле:

$$\begin{cases}\tilde{x}_{k+1}=\tilde{x}_k+\tau\tilde{y}_k,\\ \tilde{y}_{k+1}=\dfrac{1}{\tau a+\dfrac{1}{\tilde{y}_k}},\end{cases}$$

- $\overline{u}_r^{RK4}=\left(\overline{x}_r^{RK4},\overline{y}_r^{RK4}\right)$ — решение, полученное при прямом использовании метода Рунге-Кутты.

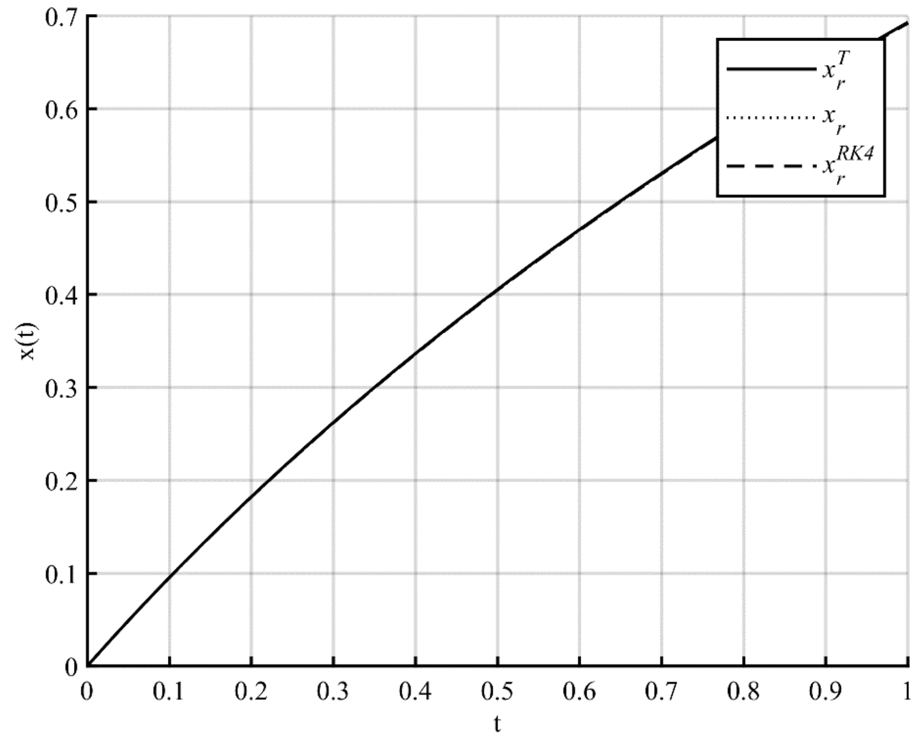


Рисунок 2.10. Зависимость $\overline{x}_r^T$, $\overline{x}_r$, $\overline{x}_r^{RK4}$ от $t$

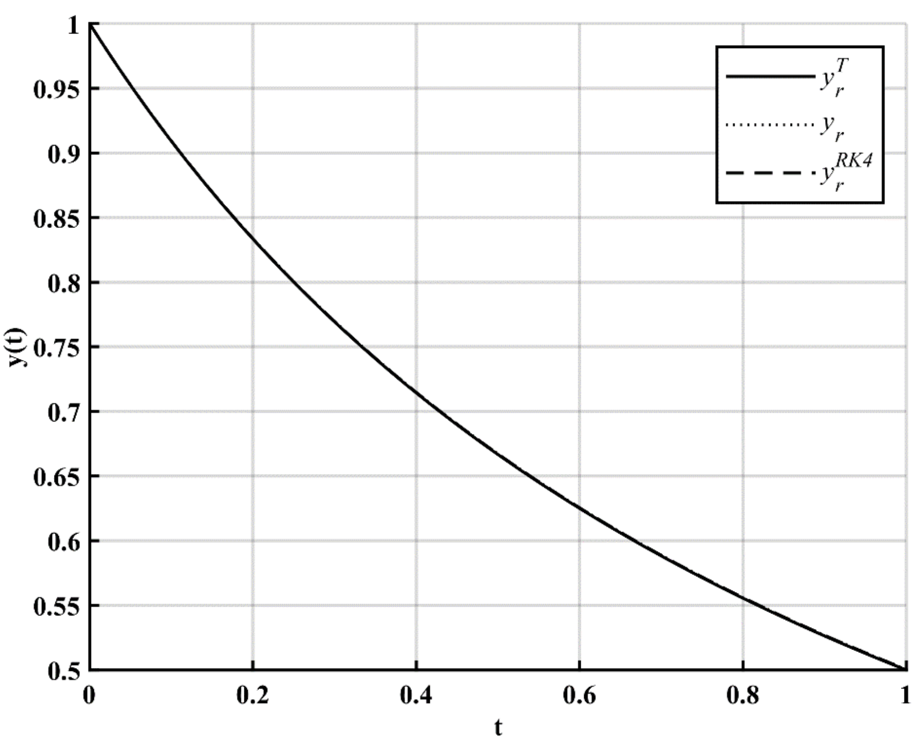


Рисунок 2.11. Зависимость $\overline{y}_r^T$, $\overline{y}_r$, $\overline{y}_r^{RK4}$ от $t$

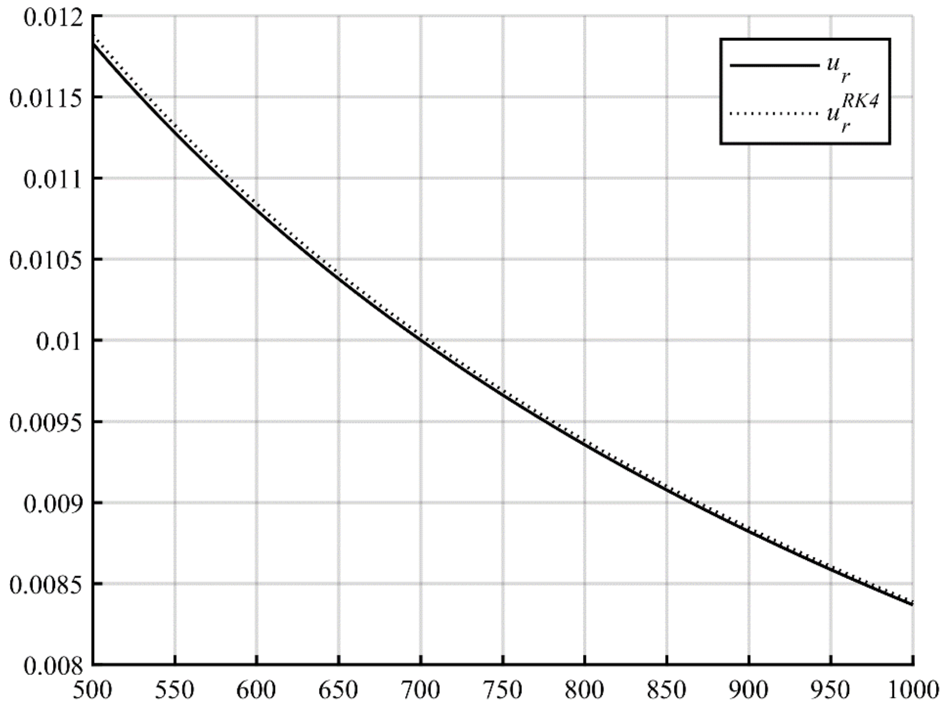


Рисунок 2.12. Зависимость погрешности от количества узлов $m$

Для оценки погрешности решений $\overline{u}_r$, $\overline{u}_r^{RK4}$, используем норму $\left\|\overline{u}_r - \overline{u}_r^T\right\|$, $\left\|\overline{u}_r^{RK4} - \overline{u}_r^T\right\|$ по формуле (2.30). С помощью Матлаб получаем таблицу значений и графики вышеперечисленных решений.

| Решение | $k = 125$ $(t = 0.25)$ | $k = 250$ $(t = 0.5)$ | $k = 375$ $(t = 0.75)$ | Погрешность |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{u}_{998}^T$ | $(0.2231, 0.8000)$ | $(0.4055, 0.6667)$ | $(0.5596, 0.5714)$ | $0$ |
| $\overline{u}_{998}$ | $(0.2229, 0.8003)$ | $(0.4051, 0.6671)$ | $(0.5592, 0.5719)$ | $0.0118$ |
| $\overline{u}_{998}^{RK4}$ | $(0.2227, 0.8003)$ | $(0.4048, 0.6671)$ | $(0.5588, 0.5719)$ | $0.0119$ |

Таблица 2.1 Значения решений в точках и погрешности решений.

# Глава 3. Системы Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы

Основная цель данной главы — из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получить весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построен интегральный инвариант и разностный аналог с дискретным временем. На его основе найдена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности системы уравнений вида $C(x,t,u)u_t + E(x,t,u_\alpha) = 0$ относительно заданной билинейной формы. Построено действие по Гамильтону для данной системы и получено её представление в виде уравнений Биркгофа для бесконечномерных систем. С помощью аппроксимации построенного функционала его разностным аналогом на основе вариационного принципа получен дискретный по времени аналог уравнений Биркгофа.

## 3. 1 Системы уравнений Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы

### Постановка задач

Пусть состояние бесконечномерной потенциальной системы определяется вектор-функцией $u(x,t) = \left(u^1(x,t), u^2(x,t), \dots, u^{2n}(x,t)\right)^{\mathbb{T}}$, $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega$ — ограниченная область из $\mathbb{R}^l$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Предположим, что при этом действие по Гамильтону имеет вид

$$F[u] = \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2n} R_i(x,t,u_\alpha)u_t^i - B(u_\alpha)\right] dxdt, \tag{3.1}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l), |\alpha| = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\,, |\alpha| = \overline{0,s},$$

где $R_i = R_i(x, t, u_\alpha)$, $B = B(u_\alpha)$ — заданные достаточно гладкие функции, $u_t^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $i = \overline{1{,}2n}$, $u_\alpha = D_\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \cdots (\partial x_l)^{\alpha_l}}$.

Будем рассматривать функционал (3.1) на множестве

$$D(N) = \big\{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^{\mathbb{T}}: u^i \in U^i = C_{x,t}^{2s,1}\big(\overline{\Omega} \times [0, T]\big):$$

$$u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x), u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x), \frac{\partial^\nu u^i}{\partial n_x^\nu}\bigg|_{\Gamma_T} = \omega_\nu^i(x, t), i = \overline{1{,}2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}\big\}, \tag{3.2}$$

где $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$, $n_x$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\varphi^i(x)$, $\psi^i(x)$, $\omega_\nu^i(x, t)$, $i = \overline{1{,}2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}$ — заданные достаточно гладкие функции.

Цель настоящего параграфа — найти уравнения движения, определяемые действием по Гамильтону (3.1), и построить их разностный аналог с дискретным временем.

**Системы уравнений Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы**

Обозначим плотность функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, t, u_\alpha, u_t) = \sum_{i=1}^{2n} R_i u_t^i - B. \tag{3.3}$$

Первая вариация (3.1) равна

$$\delta F[u, \delta u] = \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^{2n} \left( \sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha^j} \delta u_\alpha^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^j} \delta u_t^j \right) dx dt. \tag{3.4}$$

Введём плотности обобщённых импульсов $p_j$, $j = \overline{1{,}2n}$ по формулам

$$p_j = \frac{\delta L}{\delta u_t^j} = R_j, \quad j = \overline{1{,}2n},$$

где $L = \int_\Omega \mathcal{L} dx$; $\frac{\delta L}{\delta u_t^j}$ — вариационная производная.

Поскольку

$$\delta u^j\Big|_{t=0}=0, \delta u^j\Big|_{t=T}=0, \frac{\partial^\nu(\delta u^j)}{\partial n_x^\nu}\Big|_{\Gamma_T}=0, j=\overline{1,2n}, |\nu|=\overline{0,s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (3.4) получаем

$$\delta F[u,\delta u]=\int_0^T\int_\Omega\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\alpha^j}\right)-\frac{dp_j}{dt}\right]\delta u^j\,dxdt.$$

Приравнивая эту вариацию к нулю, находим систему уравнений движения в виде

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\alpha^j}\right)-\frac{dp_j}{dt}=0,\quad j=\overline{1,2n}. \tag{3.5}$$

Отметим, что

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\alpha^j}\right)=\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial R_i}{\partial u_\alpha^j}u_t^i-\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}\sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}D_{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial R_i}{\partial u_\alpha^j}\right)D_\beta u_t^i-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^j}\right)$$

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{dR_j}{dt}=\frac{\partial R_j}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2n}\sum_{|\beta|=0}^{s}\frac{\partial R_j}{\partial u_\beta^i}D_\beta\,u_t^i,$$

где

$$\binom{\alpha}{\beta}=\begin{cases}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\ldots\binom{\alpha_l}{\beta_l}, \text{если } \forall i\in\{1,2,\ldots,l\}: \alpha_i\geq\beta_i,\\ 0, \text{если } \exists i\in\{1,2,\ldots,l\}: \alpha_i<\beta_i,\end{cases}$$

$$\binom{\alpha_i}{\beta_i}=\frac{\alpha_i!}{\beta_i!\,(\alpha_i-\beta_i)!}.$$

С учетом этого система уравнений (3.5) может быть представлена в виде

$$N_j \equiv \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \left[ \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial R_i}{\partial u_\alpha^j} \right) - \frac{\partial R_j}{\partial u_\beta^i} \right] D_\beta\, u_t^i - \frac{\partial R_j}{\partial t}$$
$$- \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^j} = 0, \quad j = \overline{1,2n}. \tag{3.6}$$

Справедлива

**Теорема 3.1.** [45] *Экстремали функционала* (3.1) *являются решениями системы уравнений* (3.6).

Отметим, что из (3.6) как частный случай следуют уравнения Биркгофа (1.20).

### Дискретизация по времени

Разобьем отрезок $[0,T]$ на $m$ равных частей узлами $t_k = k\tau$, $k = \overline{0,m}$, где $\tau = m^{-1}T$. Введем операторы сужения [59]

$$\overline{\mathcal{T}}_r u(x,t) = \overline{u}_r$$
$$= \big(u^1(x,t_1), u^2(x,t_1), \dots, u^{2n}(x,t_1), u^1(x,t_2), u^2(x,t_2), \dots, u^{2n}(x,t_2), \dots,$$
$$u^1(x,t_{m-1}), u^2(x,t_{m-1}), \dots, u^{2n}(x,t_{m-1})\big),$$

где $r = 2n(m-1)$. Такие векторы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{U}_r$. Для удобства обозначим $\tilde{u}_k = u(x,t_k)$, $\tilde{u}_k^i = u^i(x,t_k)$, $k = \overline{0,m}$, $i = \overline{1,2n}$.

Обозначим $\overline{N}$ оператор дискретного аналога задачи (3.6), (3.2), полученной на основе функционала (3.1).

Положим

$$D(\overline{N}) = \Big\{ (\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m) : \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i(x), \tilde{u}_m^i = \psi^i(x), \tilde{u}_k^i \in C^{2s}(\overline{\Omega}),$$
$$\left. \frac{\partial^\nu \tilde{u}_k^i}{\partial n_x^\nu} \right|_{\partial\Omega} = \omega_\nu^i(x,t_k), i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0,s-1}, k = \overline{0,m} \Big\}.$$

Заменим (3.3) на

$$\overline{\mathcal{L}}_k = \overline{\mathcal{L}}(x,t,D_\alpha\tilde{u}_k,\tilde{u}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{2n} R_{i,k}\frac{\tilde{u}_{k+1}^i-\tilde{u}_k^i}{\tau} - B_k, \quad k=\overline{0,m-1},$$

где $R_{i,k} = R_i(x,t_k,D_\alpha\tilde{u}_k)$, $B_k = B(D_\alpha\tilde{u}_k)$.

Далее аппроксимируем интегралы

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_\Omega \mathcal{L}dxdt \approx \frac{T}{m}\int_\Omega \overline{\mathcal{L}}_k dx.$$

Функционал (3.1) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\overline{F}[\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\int_\Omega \overline{\mathcal{L}}_k dx. \tag{3.7}$$

Тогда

$$\delta\overline{F}[\overline{u}_r,\delta\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\int_\Omega\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{s}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\delta\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)+\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\tilde{u}_{k+1}^i}\delta\tilde{u}_{k+1}^i\right]dx. \tag{3.8}$$

Поскольку

$$\delta\tilde{u}_0^i = 0, \delta\tilde{u}_m^i = 0, \left.\frac{\partial^\nu\left(\delta\tilde{u}_k^i\right)}{\partial n_x^\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad i=\overline{1,2n}, k=\overline{0,m}, |\nu| = \overline{0,s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (3.8) имеем

$$\delta\overline{F}[\overline{u}_r,\delta\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\int_\Omega\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right)+\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k-1}}{\partial\tilde{u}_k^i}\right]\delta\tilde{u}_k^i\,dx.$$

Приравнивая эту вариацию к нулю и учитывая произвольность функций $\delta\tilde{u}_k^i$, $i=\overline{1,2n}, k=\overline{1,m-1}$, находим систему уравнений движения в виде

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right)+\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k-1}}{\partial\tilde{u}_k^i} = 0, i=\overline{1,2n}, k=\overline{1,m-1}. \tag{3.9}$$

Отметим, что

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left[\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\sum_{j=1}^{2n}D_\alpha\left[\frac{\partial R_{j,k}}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\frac{\tilde{u}_{k+1}^j-\tilde{u}_k^j}{\tau}\right]-\frac{R_{i,k}}{\tau}$$

$$-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\,D_\alpha\left[\frac{\partial B_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}D_{\alpha-\beta}\left[\frac{\partial R_{j,k}}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]D_\beta\left(\frac{\tilde{u}_{k+1}^j-\tilde{u}_k^j}{\tau}\right)-\frac{R_{i,k}}{\tau}$$

$$-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\,D_\alpha\left[\frac{\partial B_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right],$$

$$\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k-1}}{\partial\tilde{u}_k^i}=\frac{R_{i,k-1}}{\tau}.$$

С учетом этого система уравнений (3.9) может быть представлена в виде

$$\overline{N}_{i,k}\equiv\sum_{j=1}^{2n}\sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\binom{\alpha}{\beta}D_{\alpha-\beta}\left[\frac{\partial R_{j,k}}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]D_\beta\left(\frac{\tilde{u}_{k+1}^j-\tilde{u}_k^j}{\tau}\right)$$
$$-\frac{R_{i,k}-R_{i,k-1}}{\tau}-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}\,D_\alpha\left[\frac{\partial B_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]=0, \tag{3.10}$$
$$i=\overline{1,2n},k=\overline{1,m-1}.$$

**Теорема 3.2.** [45] *Уравнения* (3.10) *являются разностным по времени аналогом* (3.6).

## 3. 2 Интегральные инварианты систем уравнений Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы

При исследовании уравнений движения систем различной физической природы возникают задачи определения качественных показателей и свойств движения по известным структуре и свойствам рассматриваемых уравнений. Такими качественными показателями для конечномерных систем являются, в частности, интегральные инварианты — интегралы от некоторых функций, сохраняющие свое значение в процессе движения системы. Они были введены в аналитическую механику А. Пуанкаре. В дальнейшем была установлена связь интегральных инвариантов с рядом фундаментальных понятий классической динамики. В этом параграфе на основе полученных результатов из предыдущего параграфа найдены относительный линейный интегральный инвариант первого порядка системы, описываемой лагранжианом (3.3), и его разностная аппроксимация.

### Непрерывный случай

Пусть $u = u(\lambda; x, t)$, $\lambda \in \Lambda = [0,1]$ — произвольное однопараметрическое множество элементов из $U$ непрерывно дифференцируемых по $\lambda$. Его можно рассматривать как кривую $\mathcal{G}$ в $U$. Будем считать, что $u(0; x, t) = u(1; x, t)$ для всех $(x, t) \in Q_T$, т. е. кривая замкнута.

Введем обозначение

$$\delta u = \frac{\partial u(\lambda; x, t)}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Возьмём произвольный отрезок $[T_0, T_1]$ из $[0, T]$. Вариация функционала

$$F^{(T_0,T_1)}[u(\lambda; x, t)] = \int_{T_0}^{T_1} L dt$$

принимает вид

$$\delta F^{(T_0,T_1)}[u,\delta u] = \int\limits_{T_0}^{T_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\alpha^i}\delta u_\alpha^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t^i}\delta u_t^i\right)dxdt$$

$$= \int\limits_{T_0}^{T_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\left\{(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\alpha^i}\right)\delta u^i + \left[\frac{d}{dt}\left(p_i\delta u^i\right) - \frac{dp_i}{dt}\delta u^i\right]\right\}dxdt$$

$$= \int\limits_{T_0}^{T_1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\alpha^i}\right) - \frac{dp_i}{dt}\right]\delta u^i\,dxdt + \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}p_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_1}dx$$

$$- \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}p_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_0}dx.$$

Вдоль действительных траекторий — решений системы (3.5) — вариация $\delta F^{(T_0,T_1)}[u,\delta u]$ принимает вид

$$\delta F^{(T_0,T_1)}[u,\delta u] = \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}p_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_1}dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}p_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_0}dx$$

$$= \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_1}dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_0}dx.$$

Поскольку для замкнутой кривой $\mathcal{G}$ интеграл

$$\int\limits_0^1 \delta F^{(T_0,T_1)}[u,\delta u] = 0,$$

то получаем равенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_1}dx = \int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_i\delta u^i\Bigg|_{t=T_0}dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n} R_i\,\delta u^i dx = \oint\limits_{\mathcal{G}}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n} R_i\,\delta u^i dx \tag{3.11}$$

является относительным линейным интегральным инвариантом первого порядка системы, описываемой лагранжианом (3.3).

**Теорема 3.3.** [45] *Система уравнений* (3.6) *имеет относительный интегральный инвариант первого порядка вида* (3.11).

**Дискретный случай**

Используя (3.7), запишем функционал

$$\overline{F}^{(k_0,k_1)}[\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\int\limits_{\Omega}\overline{\mathcal{L}}_k\,dx, \tag{3.12}$$

считая, что $0 < k_0 < k_1 < m$.

Находим первую вариацию (3.12)

$$\delta\overline{F}^{(k_0,k_1)}[\overline{u}_r,\delta\overline{u}_r] =$$

$$= \frac{T}{m}\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{|\alpha|=0}^{s}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\delta\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)+\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\tilde{u}_{k+1}^i}\delta\tilde{u}_{k+1}^i\right]dx$$

$$= \frac{T}{m}\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\left\{\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left[\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]\delta\tilde{u}_k^i+\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\tilde{u}_{k+1}^i}\delta\tilde{u}_{k+1}^i\right\}dx$$

$$= \frac{T}{m}\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\left\{\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left[\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_k}{\partial\left(D_\alpha\tilde{u}_k^i\right)}\right]+\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k-1}}{\partial\tilde{u}_k^i}\right\}\delta\tilde{u}_k^i\,dx$$

$$+\frac{T}{m}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k_1-1}}{\partial\tilde{u}_{k_1}^i}\delta\tilde{u}_{k_1}^i dx-\frac{T}{m}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k_0-1}}{\partial\tilde{u}_{k_0}^i}\delta\tilde{u}_{k_0}^i dx.$$

Вдоль действительных траекторий его первая вариация (3.12) равна

$$\delta\overline{F}^{(k_0,k_1)}[\overline{u}_r,\delta\overline{u}_r] = \frac{T}{m}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k_1-1}}{\partial\tilde{u}^i_{k_1}}\delta\tilde{u}^i_{k_1}dx - \frac{T}{m}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}_{k_0-1}}{\partial\tilde{u}^i_{k_0}}\delta\tilde{u}^i_{k_0}dx$$

$$= \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_{i,k_1-1}\,\delta\tilde{u}^i_{k_1}dx - \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_{i,k_0-1}\,\delta\tilde{u}^i_{k_0}dx.$$

Далее, повторяя приведённые выше рассуждения, получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_{i,k_1-1}\,\delta\tilde{u}^i_{k_1}dx = \int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_{i,k_0-1}\,\delta\tilde{u}^i_{k_0}dx.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\mathcal{G}}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2n}R_{i,k-1}\,\delta\tilde{u}^i_k dx, k = \overline{1,m} \tag{3.13}$$

являются аналогами линейных интегральных инвариантов первого порядка системы (3.10).

**Теорема 3.4.** [45] *Формула* (3.13) *определяет дискретный по времени аналог относительного интегрального инварианта первого порядка* (3.11).

Проиллюстрируем теоремы 3.3, 3.4 на следующем примере.

**Пример 3.1.** *Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:*

$$\widetilde{N}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2b^2\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{3.14}$$

*описывающее движение мембраны.*

*Здесь* $u = u(x,y,t)$ — *неизвестная функция;* $a$, $b$ — *константы,* $(x,y,t) \in Q_T = (0,l_1)\times(0,l_2)\times(0,T)$.

*Положим*

$$D(\widetilde{N}) = \{u \in U = C^2([0,l_1]\times[0,l_2]\times[0,T]) : u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=l_1} = u|_{y=l_2} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{t=T} = \psi(x)\},$$

*где* $\varphi$, $\psi$ — *заданные функции.*

Обозначим

$$\begin{cases} u^1 = u, \\ u^2 = u_t. \end{cases}$$

Уравнение (3.14) эквивалентно системе вида

$$\begin{aligned} &\widetilde{N}_1 \equiv e^{2b^2t}u_t^2 - e^{2b^2t}a^2\left(\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2}\right) + 2b^2e^{2b^2t}u^2 = 0, \\ &\widetilde{N}_2 \equiv -e^{2b^2t}u_t^1 + e^{2b^2t}u^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ей соответствует лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1} e^{2b^2t}\left\{-u^2u_t^1 + u^1u_t^2 + 2b^2u^1u^2 + (u^2)^2 + a^2\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy$$

и функции Биркгофа

$$R_1 = -\frac{1}{2}e^{2b^2t}u^2, R_2 = \frac{1}{2}e^{2b^2t}u^1,$$

$$B = -\frac{1}{2}e^{2b^2t}\left[2b^2u^1u^2 + (u^2)^2 + a^2\left(\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)^2\right)\right].$$

Отсюда можно вывести систему уравнений в дискретном по времени случае

$$\begin{aligned} \overline{N}_{1,j} \equiv \frac{1}{2}e^{2b^2t_j}\frac{\tilde{u}_{j+1}^2 - \tilde{u}_j^2}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{e^{2b^2t_j}\tilde{u}_j^2 - e^{2b^2t_{j-1}}\tilde{u}_{j-1}^2}{\tau} \\ + e^{2b^2t_j}\left[b^2\tilde{u}_j^2 - a^2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_j^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}_j^1}{\partial y^2}\right)\right] = 0, \\ \overline{N}_{2,j} \equiv -\frac{1}{2}e^{2b^2t_j}\frac{\tilde{u}_{j+1}^1 - \tilde{u}_j^1}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{e^{2b^2t_j}\tilde{u}_j^1 - e^{2b^2t_{j-1}}\tilde{u}_{j-1}^1}{\tau} + e^{2b^2t_j}\left(b^2\tilde{u}_j^1 + \tilde{u}_j^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Используя формулы (3.11) и (3.13), находим относительные линейные интегральные инварианты первого порядка системы (3.15) в непрерывном случае

$$\oint_{\mathcal{G}}\int_0^{l_2}\int_0^{l_1}\left(-\frac{1}{2}e^{2b^2t}u^2\delta u^1 + \frac{1}{2}e^{2b^2t}u^1\delta u^2\right)dxdy$$

и в дискретном случае

$$\oint\limits_{\mathcal{G}}\int\limits_{0}^{l_2}\int\limits_{0}^{l_1}\left(-\frac{1}{2}e^{2b^2t_{k-1}}\tilde{u}_{k-1}^2\delta\tilde{u}_k^1+\frac{1}{2}e^{2b^2t_{k-1}}\tilde{u}_{k-1}^1\delta\tilde{u}_k^2\right)dxdy\,,k=\overline{1,m}.$$

## 3. 3 Вариационный подход к дискретизации по времени уравнений Биркгофа с бесконечным числом степеней свободы

При построении дискретных аналогов важно сохранить основные свойства исходной дифференциальной задачи. Основная задача данного параграфа — дискретизация системы уравнений вида $C(x,t,u)u_t+E(x,t,u_\alpha)=0$ на основе её функционала — действия по Гамильтону. Получены необходимые и достаточные условия её потенциальности относительно заданной билинейной формы. При их выполнении построено действие по Гамильтону для данной системы и получено её представление в виде уравнений Биркгофа для бесконечномерных систем. С помощью аппроксимации построенного функционала его разностным аналогом на основе вариационного принципа получен дискретный по времени аналог уравнений Биркгофа. Рассмотрен иллюстративный пример.

### Постановка задачи

Пусть состояние бесконечномерной потенциальной системы определяется вектор-функцией $u(x,t)=\left(u^1(x,t),u^2(x,t),\dots,u^{2n}(x,t)\right)^{\mathbb{T}}$, $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega$ — ограниченная область из $\mathbb{R}^l$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$N(u)\equiv C(x,t,u)u_t+E(x,t,u_\alpha)=0, \tag{3.16}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_l)$, $|\alpha|=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i$, $|\alpha|=\overline{0,s}$, $C(x,t,u)$ — заданная матрица $\left[C_{ij}(x,t,u)\right]_{2n\times 2n}$, $E(x,t,u_\alpha)=\left(E_1(x,t,u_\alpha),E_2(x,t,u_\alpha),\dots,E_{2n}(x,t,u_\alpha)\right)^{\mathbb{T}}$ — заданная вектор-функция, $u=(u^1,\dots,u^{2n})^{\mathbb{T}}$ — неизвестная вектор-функция.

$C_{ij}\colon \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ и $E_i\colon \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^{q} \to \mathbb{R}$ — заданные достаточно гладкие функции, $q$ — размерность вектора $\{u_\alpha\}$, $|\alpha| = \overline{0,s}$, $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$.

Будем рассматривать систему уравнений (3.16) на множестве

$$D(N) = \Big\{u \in U = (U^1, \dots, U^{2n})^{\mathbb{T}}\colon u^i \in U^i = C^{2s,1}_{x,t}\big(\overline{\Omega} \times [0,T]\big)\colon u^i\big|_{t=0} = \varphi^i(x),$$

$$u^i\big|_{t=T} = \psi^i(x), \frac{\partial^\nu u^i}{\partial n_x^\nu}\bigg|_{\Gamma_T} = \omega^i_\nu(x,t), i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}\Big\}, \tag{3.17}$$

где $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $n_x$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\phi^i(x)$, $\psi^i(x)$, $\omega^i_\nu(x,t)$, $i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}$ — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что (3.16) является обобщением системы уравнений вида (1.21).

**Необходимые и достаточные условия потенциальности**

Обозначим

$$N_i \equiv \sum_{j=1}^{2n} C_{ij}\, u_t^j + E_i,$$

$$N(u) \equiv \big(N_1(u), N_2(u), \dots, N_{2n}(u)\big).$$

Найдем производную Гато оператора $N_i$

$$(N'_u h)_i = \sum_{j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{ij}}{\partial u^z} h^z u_t^j + \sum_{j=1}^{2n} C_{ij}\, h_t^j + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial E_i}{\partial u_\alpha^j} h_\alpha^j.$$

Используя билинейную форму (1.2) и условие (1.5), получаем

$$\langle N_u' h, g\rangle = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} (N_u' h)_i \cdot g^i \, dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left[ \sum_{j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{ij}}{\partial u^z} h^z u_t^j + \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} \, h_t^j \right. \tag{3.18}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial E_i}{\partial u_\alpha^j} h_\alpha^j \right] g^i \, dxdt$$

и

$$\langle N_u' g, h\rangle = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} (N_u' g)_i \cdot h^i dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left[ \sum_{j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{ij}}{\partial u^z} g^z u_t^j + \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} \, g_t^j + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial E_i}{\partial u_\alpha^j} g_\alpha^j \right] h^i \, dxdt.$$

Интегрируя по частям, из (3.18) находим

$$\langle N_u' h, g\rangle = \int_0^T \int_\Omega \left[ \sum_{i,j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{jz}}{\partial u^i} g^j u_t^z h^i - \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{d}{dt} \left( C_{ji} g^j \right) h^i \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left( \frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} g^j \right) h^i \right] dxdt.$$

Отметим, что

$$\frac{d}{dt} \left( C_{ji} g^j \right) = \frac{d}{dt} \left( C_{ji} \right) g^j + C_{ji} g_t^j = \sum_{z=1}^{2n} \frac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} g^j u_t^z + \frac{\partial C_{ji}}{\partial t} g^j + C_{ji} g_t^j,$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left( \frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} g^j \right) = \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \sum_{|\beta|=0}^{s} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} \right) g_\beta^j.$$

С учётом этого получаем

$$\langle N_u'h, g\rangle - \langle N_u'g, h\rangle$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left\{ \left[ \sum_{j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{jz}}{\partial u^i} g^j u_t^z - \sum_{j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} u_t^z\, g^j - \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial C_{ji}}{\partial t} g^j - \sum_{j=1}^{2n} C_{ji}\, g_t^j \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i}\right) g_\beta^j \right]$$

$$\left. - \left[ \sum_{j,z=1}^{2n} \frac{\partial C_{iz}}{\partial u^j} g^j u_t^z + \sum_{j=1}^{2n} C_{ij}\, g_t^j + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \frac{\partial E_i}{\partial u_\beta^j} g_\beta^j \right] \right\} h^i dxdt$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{2n} \left\{ \sum_{j,z=1}^{2n} \left( \frac{\partial C_{jz}}{\partial u^i} - \frac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} - \frac{\partial C_{iz}}{\partial u^j} \right) g^j u_t^z - \sum_{j=1}^{2n} (C_{ji} + C_{ij}) g_t^j \right.$$

$$- \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial C_{ji}}{\partial t} g^j + \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i}\right) g_\beta^j$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \frac{\partial E_i}{\partial u_\beta^j} g_\beta^j \right\} h^i dxdt$$

Ввиду произвольности функций $h^i$, $i = \overline{1{,}2n}$, из критерия потенциальности (1.5) имеем

$$\sum_{j,z=1}^{2n} \left( \frac{\partial C_{jz}}{\partial u^i} - \frac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} - \frac{\partial C_{iz}}{\partial u^j} \right) g^j u_t^z - \sum_{j=1}^{2n} (C_{ji} + C_{ij}) g_t^j - \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial C_{ji}}{\partial t} g^j$$

$$+ \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left(\frac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i}\right) g_\beta^j - \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\beta|=0}^{s} \frac{\partial E_i}{\partial u_\beta^j} g_\beta^j = 0.$$

Ввиду произвольности функций $g^j$ отсюда находим условия

$$
\begin{cases}
C_{ij} + C_{ji} = 0, \\
\dfrac{\partial C_{ji}}{\partial u^z} + \dfrac{\partial C_{iz}}{\partial u^j} + \dfrac{C_{zj}}{\partial u^i} = 0, \\
\dfrac{\partial C_{ji}}{\partial t} = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left( \dfrac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} \right) - \dfrac{\partial E_i}{\partial u^j}, \\
\sum\limits_{|\alpha|=1}^{s} (-1)^{|\alpha|} \dbinom{\alpha}{\beta} D_{\alpha-\beta} \left( \dfrac{\partial E_j}{\partial u_\alpha^i} \right) - \dfrac{\partial E_i}{\partial u_\beta^j} = 0,
\end{cases} \tag{3.19}
$$

где $i, j, z = \overline{1{,}2n}$, $|\beta| = \overline{1, s}$.

**Теорема 3.5.** *Система* (3.16) *является потенциальной на* $D(N)$ (3.17) *относительно билинейной формы* (1.2) *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (3.19).

### Дискретизация по времени

При выполнении условий (3.19) искомый функционал $F_N$ может быть построен по формуле (1.4). К этому вопросу можно подойти по-другому. Рассмотрим действие по Гамильтону для (3.16) в виде

$$
F_N = \int_0^T \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{2n} R_i u_t^i - B \right) dx dt, \tag{3.20}
$$

где $R_i(x, t, u)$, $B(x, t, u_\alpha)$ — неизвестные гладкие функции.

Дифференциал Гато функционала (3.20) равен

$$
\delta F_N[u, h] = \int_0^T \int_\Omega \left[ \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial R_i}{\partial u^j} h^j u_t^i + \sum_{i=1}^{2n} R_i h_t^i - \sum_{i=1}^{2n} \sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i} h_\alpha^i \right] dx dt.
$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta F_N[u,h]=\int_0^T\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{2n}\frac{\partial R_j}{\partial u^i}h^i u_t^j-\sum_{i=1}^{2n}\frac{dR_i}{dt}h^i\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{2n}\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i}\right)h^i\right]dxdt. \tag{3.21}$$

Поскольку

$$\frac{dR_i}{dt}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial R_i}{\partial u^j}u_t^j+\frac{\partial R_i}{\partial t},$$

то (3.21) можно записать в виде

$$\delta F_N[u,h]=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_j}{\partial u^i}-\frac{\partial R_i}{\partial u^j}\right)u_t^j-\frac{\partial R_i}{\partial t}-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i}\right)\right]h^i\,dxdt.$$

Из определения потенциальности имеем

$$\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_j}{\partial u^i}-\frac{\partial R_i}{\partial u^j}\right)u_t^j-\frac{\partial R_i}{\partial t}-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i}\right)\right]h^i\,dxdt$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{2n}\left[\sum_{j=1}^{2n}C_{ij}\,u_t^j+E_i\right]h^i\,dxdt.$$

Считая, что элементы $h^i$, $i=\overline{1,2n}$, произвольные, отсюда получаем

$$\sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_j}{\partial u^i}-\frac{\partial R_i}{\partial u^j}\right)u_t^j-\frac{\partial R_i}{\partial t}-\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i}\right)=\sum_{j=1}^{2n}C_{ij}\,u_t^j+E_i. \tag{3.22}$$

Сравнивая левую и правую части (3.22), находим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R_j}{\partial u^i}-\dfrac{\partial R_i}{\partial u^j}=C_{ij},\\ -\dfrac{\partial R_i}{\partial t}-\displaystyle\sum_{|\alpha|=0}^{s}(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i}\right)=E_i,\end{cases} \tag{3.23}$$

где $i,j=\overline{1,2n}$.

Для первой группы уравнений системы (3.23) получаем следующее решение [2]

$$R_i = -\int_0^1 \sum_{j=1}^{2n} \lambda C_{ij}\big(x,t,\hat{u}+\lambda(u-\hat{u})\big)\big(u^j-\hat{u}^j\big)d\lambda,\ i=\overline{1,2n},$$

где $\hat{u}$ — произвольный фиксированный элемент из $D(N)$.

Обозначим $\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta u^i}$ — функциональную производную $\mathfrak{B}$ по $u^i$, $i=\overline{1,2n}$.

Перепишем вторую группу уравнений системы (3.23) в следующем виде

$$\sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha\left(\frac{\partial B}{\partial u_\alpha^i}\right) = -\frac{\partial R_i}{\partial t} - E_i.$$

или

$$\frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta u^i} = -\frac{\partial R_i}{\partial t} - E_i, i=\overline{1,2n}.$$

Используя формулу (1.4), получаем

$$\mathfrak{B}[t,u] = -\int_\Omega \int_0^1 \sum_{i=1}^{2n} \left[\frac{\partial R_i}{\partial t}\big(x,t,\hat{u}+\lambda(u-\hat{u})\big) + E_i\big(x,t,\hat{u}_\alpha+\lambda(u_\alpha-\hat{u}_\alpha)\big)\right]\big(u^i - \hat{u}^i\big)d\lambda dx + \mathrm{const}.$$

Таким образом, приходим к следующим уравнениям Биркгофа для бесконечномерных систем:

$$N_i \equiv \sum_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_j}{\partial u^i} - \frac{\partial R_i}{\partial u^j}\right)u_t^j - \frac{\partial R_i}{\partial t} - \frac{\delta\mathfrak{B}}{\delta u^i} = 0, i=\overline{1,2n}. \qquad (3.24)$$

**Теорема 3.6.** *Экстремали функционала* (3.20) *являются решениями системы уравнений* (3.24).

Обозначим $\overline{N}$ оператор дискретного аналога задачи (3.24), (3.17), полученной на основе функционала (3.20).

Положим

$$D(\overline{N}) = \{(\tilde{u}_0, \overline{u}_r, \tilde{u}_m) : \overline{u}_r \in \overline{U}_r, \tilde{u}_0^i = \varphi^i(x), \tilde{u}_m^i = \psi^i(x), \tilde{u}_k^i \in C^{2s}(\overline{\Omega}),$$
$$\left.\frac{\partial^\nu \tilde{u}_k^i}{\partial n_x^\nu}\right|_{\partial\Omega} = \omega_\nu^i(x, t_k), i = \overline{1,2n}, |\nu| = \overline{0, s-1}, k = \overline{0, m}\}.$$

Далее аппроксимируем интегралы

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2n} R_i\, u_t^i - B\right) dx dt \approx \frac{T}{m} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2n} R_{i,k} \frac{\tilde{u}_{k+1}^i - \tilde{u}_k^i}{\tau} - B_k\right) dx,$$

где $R_{i,k} = R_i(x, t_k, \tilde{u}_k)$, $B_k = (x, t_k, D_\alpha \tilde{u}_k)$.

Функционал (3.20) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\overline{F}(\overline{u}_r) = \frac{T}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2n} R_{i,k} \frac{\tilde{u}_{k+1}^i - \tilde{u}_k^i}{\tau} - B_k\right) dx.$$

Тогда

$$\delta\overline{F}[\overline{u}_r, \overline{h}_r] = \frac{T}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial R_{i,k}}{\partial \tilde{u}_k^j} \tilde{h}_k^j \frac{\tilde{u}_{k+1}^i - \tilde{u}_k^i}{\tau} \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{2n} R_{i,k} \frac{\tilde{h}_{k+1}^i - \tilde{h}_k^i}{\tau} - \sum_{j=1}^{2n} \sum_{|\alpha|=0}^{s} \frac{\partial B_k}{\partial D_\alpha(\tilde{u}_k^j)} D_\alpha \tilde{h}_k^j \right) dx. \tag{3.25}$$

Поскольку

$$\tilde{h}_0^i = 0, \tilde{h}_m^i = 0, \left.\frac{\partial^\nu(\tilde{h}_k^i)}{\partial n_x^\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, i = \overline{1,2n}, k = \overline{0, m}, |\nu| = \overline{0, s-1},$$

то, интегрируя по частям, из (3.25) имеем

$$\delta\overline{F}[\overline{u}_r, \delta\overline{u}_r] = \frac{T}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \int_\Omega \sum_{j=1}^{2n} \left[ \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial R_{i,k}}{\partial \tilde{u}_k^j} \frac{\tilde{u}_{k+1}^i - \tilde{u}_k^i}{\tau} - \frac{R_{j,k} - R_{j,k-1}}{\tau} \right.$$
$$\left. - \sum_{|\alpha|=0}^{s} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left( \frac{\partial B_k}{\partial D_\alpha(\tilde{u}_k^j)} \right) \right] \tilde{h}_k^j\, dx. \tag{3.26}$$

Из равенства нулю первой вариации (3.26) получаем систему уравнений движения в дискретном по времени случае

$$\overline{N}_{j,k} \equiv \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial R_{i,k}}{\partial \tilde{u}_k^j} \frac{\tilde{u}_{k+1}^i - \tilde{u}_k^i}{\tau} - \frac{R_{j,k} - R_{j,k-1}}{\tau} - \frac{\delta \mathfrak{B}_k}{\delta \tilde{u}_k^j} = 0, \tag{3.27}$$
$$k = \overline{1, m-1}, j = \overline{1,2n},$$

где $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}[t_k, \tilde{u}_k]$.

**Теорема 3.7.** *Уравнения* (3.27) *являются разностным по времени аналогом* (3.24).

Теоретические результаты проиллюстрируем на следующим примере.

**Пример 3.2.** *Рассмотрим волновое уравнение с осевой симметрией* [66]:

$$w_{tt} = a^2 \left( w_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} w_\rho \right), t \in [0, T], \rho \in [\rho_1, \rho_2], \tag{3.28}$$

*при краевых условиях*

$$w|_{t=0} = \varphi(\rho), w|_{t=T} = \psi(\rho),$$
$$w|_{\rho=\rho_1} = \omega_1(t), w|_{\rho=\rho_2} = \omega_2(t),$$

*где* $w(t, \rho)$ *— неизвестная функция,* $\rho$ *— радиальная координата,* $a$ *— постоянный коэффициент,* $\varphi$, $\psi$, $\omega_1$, $\omega_2$ *— заданные функции,* $w_\rho = w$, $w_{\rho\rho} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} w$.

Обозначим

$$\begin{cases} w = u^1, \\ w_t = u^2. \end{cases}$$

Запишем уравнение (3.28) в виде системы

$$N(u) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^2 \\ -a^2 \left( u_{\rho\rho}^1 + \frac{1}{\rho} u_\rho^1 \right) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.29}$$

Согласно теореме 3.5 оператор (3.29) не является потенциальным. С помощью условий (3.19) можно найти матричный вариационный множитель

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система

$$\widehat{N} = MN = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 \rho u_{\rho\rho}^1 - a^2 u_\rho^1 \\ \rho u^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.30)$$

допускает представление в форме уравнений Биркгофа и находим

$$R_1 = -\frac{1}{2}\rho u^2, R_2 = \frac{1}{2}\rho u^1, B = -\frac{1}{2}a^2\rho\left(u_\rho^1\right)^2 - \frac{1}{2}\rho(u^2)^2.$$

Перейдя к его разностному аналогу, нетрудно получить дискретный вид уравнений (3.30)

$$\overline{N}_{1,k} \equiv \frac{1}{2}\rho\frac{\tilde{u}_{k+1}^2 - \tilde{u}_k^2}{\tau} + \frac{1}{2}\rho\frac{\tilde{u}_k^2 - \tilde{u}_{k-1}^2}{\tau} - a^2\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\tilde{u}_k^1 - a^2\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{u}_k^1 = 0, k = \overline{1, m-1},$$

$$\overline{N}_{2,k} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\tilde{u}_{k+1}^1 - \tilde{u}_k^1}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{\tilde{u}_k^1 - \tilde{u}_{k-1}^1}{\tau} + \rho\tilde{u}_k^2 = 0, k = \overline{1, m-1}.$$

## Заключение

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Доказана непотенциальность оператора рассматриваемой краевой задачи для системы Соболева относительно классической билинейной формы и доказано несуществование матричного вариационного множителя с компонентами, зависящими от пространственных переменных и времени. Построен аналог классического действия по Гамильтону — функционал, являющийся полуограниченным на решениях заданной краевой задачи.
2. Разработан вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением и получены соответствующие численные результаты.
3. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности заданной разностной системы. Представлен алгоритм построения соответствующего дискретного действия по Гамильтону.
4. Из вариационного принципа с использованием заданного действия по Гамильтону получены весьма общие уравнения движения бесконечномерных систем, содержащие как частный случай известные уравнения Биркгофа. Для них построены разностный аналог с дискретным временем и линейный относительный интегральный инвариант первого порядка. Получена разностная аппроксимация линейного относительного интегрального инварианта первого порядка.

## Список литературы

1. Birkhoff, G. D. Dynamical systems / G. D. Birkhoff. – New York: American Mathematical Society, 1927. – 295 p.

2. Santilli, R. M. Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalizations of Hamiltonian Mechanics / R. M. Santilli. – New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. – 371 p.

3. Santilli, R. M. On a possible Lie-Admissble covering of the Galilei relativity in newtonian mechanics for nonconservative and Galilei form-noninvariant systems / R. M. Santilli // Hadronic journal. – 1978. – Vol. 1. – P. 223-423.

4. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа и Намбу / А. С. Галиуллин, Г. Г. Гафаров, Р. П. Малайшка, А. М. Хван. – Москва: Редакция журнала Успехи физических наук, 1997. – 336 с.

5. Mei, F. X. On the Birkhoffian mechanics / F. X. Mei // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2001. – Vol. 36. – № 5. – P. 817-834.

6. Mei, F. X. A symmetry and a conserved quantity for the Birkhoff system / F. X. Mei, T. Q. Gang, J. F. Xie // Chinese physics. – 2006. – Vol. 15. – № 8. – P. 1678-1681.

7. Mei, F. X. Form invariance of Birkhoffian systems / F. X. Mei, X. W. Chen // Journal of Beijing institute of technology. – 2001. – Vol. 10. – № 2. – P. 138-142.

8. Stability with respect to partial variables for Birkhoffian systems / F. X. Mei, H. B. Wu, M. Shang, Y. F. Zhang // Chinese Physics. – 2006. – Vol. 15. – № 9. – P. 1932-1934.

9. Mei, F. X. First integral and integral invariant of Birkhoffian system / F. X. Mei, H. B. Wu // Chinese Science Bulletin. – 2000. – Vol. 45. – P. 412-414.

10. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 657 с.

11. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1971. – 552 с.

12. Cadzow, J. A. Discrete calculus of variations / J. A. Cadzow // International journal of control. – 1970. – Vol. 11. – № 3. – P. 393-407.

13. Cadzow, J. A. Discrete-time systems: An introduction with interdisciplinary applications / J. A. Cadzow. – New Jersey: Prentice Hall, 1973. – 448 p.

14. Logan, J. D. First integrals in the discrete variational calculus / J. D. Logan // Aequationes mathematicae. – 1973. – Vol. 9. – P. 210-220.

15. Logan, J. D. Generalized invariant variational problems / J. D. Logan // Journal of mathematical analysis and applications. – 1972. – Vol. 38. – № 1. – P. 174-186.

16. Logan, J. D. A canonical formalism for systems governed by certain difference equations / J. D. Logan // International journal of control. – 1973. – Vol. 17. – № 5. – P. 1095-1103.

17. Maeda, S. Canonical structure and symmetries for discrete systems / S. Maeda // Mathematica Japonica. – 1980. – Vol. 25. – P. 405-420.

18. Maeda, S. Extension of discrete Noether theorem / S. Maeda // Mathematica Japonica. – 1981. – Vol. 26. – P. 85-90.

19. Lee, T. D. Can time be a discrete dynamical variable? / T. D. Lee // Physics Letters B. – 1983. – Vol. 122. – P. 217-220.

20. Lee, T. D. Difference equations and conservation laws / T. D. Lee // Journal of Statistical Physics. – 1987. – Vol. 46. – P. 843-860.

21. Веселов, А. П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы / А. П. Веселов // Функциональный анализ и его приложения. – 1988. – Т. 22. – № 2. – С. 1-13.

22. Веселов, А. П. Интегрируемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочленов / А. П. Веселов // Функциональный анализ и его приложения. – 1991. – Т. 25. – № 2. – С. 38-49.

23. Moser, J. K. Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials / J. K. Moser, A. P. Veselov // Communications in mathematical physics. – 1991. – Vol. 139. – P. 217-243.

24. Wendlandt, J. M. Mechanical integrators derived from a discrete variational principle / J. M. Wendlandt, J. E. Marsden // Physica D: Nonlinear phenomena. – 1997. – Vol. 106. – P. 223-246.

25. Marsden, J. E. Mechanical systems with symmetry, variational principles and integration algorithms / J. E. Marsden, J. M. Wendlandt // Current and future directions in applied mathematics. – Boston: Birkhauser, 1997. – P. 219-261.

26. Kane, C. Symplectic energy-momentum integrators / C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz // Journal of Mathematical Physics. – 1999. – Vol. 40. – P. 3353-3371.

27. Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems / C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz, M. West // International journal for numerical methods in engineering. – 2000. – Vol. 49. – P. 1295-1325.

28. Finite element analysis of nonsmooth contact / C. Kane, E. A. Repetto, M. Ortiz, J. E. Marsden // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 1999. – Vol. 180. – P. 1-26.

29. Marsden, J. E. Discrete Euler-Poincaré and Lie-Poisson equations / J. E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller // Nonlinearity. – 1999. – Vol. 12. – P. 1647-1662.

30. Marsden, J. E. Symmetry reduction of discrete Lagrangian mechanics on Lie groups / J. E. Marsden, S. Pekarsky, S. Shkoller // Journal of geometry and physics. – 2000. – Vol. 36. – P. 140-151.

31. Bobenko, A. I. Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations, and semidirect products / A. I. Bobenko, Y. B. Suris // Letters in mathematical physics. – 1999. – Vol. 49. – P. 79-93.

32. Bobenko, A. I. Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top / A. I. Bobenko, Y. B. Suris // Communications in mathematical physics. – 1999. – Vol. 204. – P. 147-188.

33. Marsden, J. E. Discrete mechanics and variational integrators / J. E. Marsden, M. West // Acta numerica. – 2001. – Vol. 10. – P. 357-514.

34. Su, H. L. Symplectic schemes for Birkhoffian system / H. L. Su, M. Z. Qin // Communications in theoretical physics. – 2004. – Vol. 41. – P. 329-334.

35. Sun, Y. J. Structure-preserving algorithms for Birkhoffian systems / Y. J. Sun, Z. J. Shang // Physics letters A. – 2005. – Vol. 336. – P. 358-369.

36. Liu, S. X. Geometric formulations and variational integrators of discrete autonomous Birkhoff systems / S. X. Liu, C. Liu, Y. X. Guo // Chinese physics B. – 2011. – Vol. 20. – № 3. – P. 034501.

37. Kong, X. L. Discrete optimal control for Birkhoffian systems / X. L. Kong, H. B. Wu, F. X. Mei // Nonlinear Dynamics. – 2013. – Vol. 74. – P. 711-719.

38. Liu, S. X. Research on the discrete variational method for a Birkhoffian system / S. X. Liu, W. Hua, Y. X. Guo // Chinese physics B. – 2014. – Vol. 26. – № 6. – P. 064501.

39. Пуанкаре, А. Избранные труды. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ / А. Пуанкаре. – Москва: Наука, 1974. – 772 с.

40. Картан, Э. Интегральные инварианты / Э. Картан. – Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1940. – 216 с.

41. Савчин, В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем / В. М. Савчин. – Москва: Издательство Университета дружбы народов, 1991. – 237 с.

42. Савчин, В. М. О потенциальности дискретных систем / В. М. Савчин, Ф. Т. Чинь // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2021. – Т. 27. – № 3. – С. 72-82.

43. Savchin, V. M. Nonpotentiality of Sobolev system and construction of semibounded functional / V. M. Savchin, P. T. Trinh // Ufa Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 12. – № 2. – P. 107-117.

44. Савчин, В. М. Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением / В. М. Савчин, Ф. Т. Чинь // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2022. – Т. 30. – № 4. – С. 411-423.

45. Савчин, В. М. О потенциальности, дискретизации и интегральных инвариантах бесконечномерных систем Биркгофа / В. М. Савчин, Ф. Т. Чинь // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24. – № 2. – С. 184-192.

46. Tonti, E. A general solution of the inverse problem of the calculus of variations / E. Tonti // Hadronic Journal. – 1982. – Vol. 5. – № 4. – P. 1404-1450.

47. Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Известия академии наук СССР. Серия математическая. – 1954. – Т. 18. – № 1. – С. 3-50.

48. Масленникова, В. Н. Системы Соболева в случае двух пространственных переменных / В. Н. Масленникова, М. Е. Боговский // Доклады Академии наук СССР. – 1975. – Т. 221. – № 3. – С. 563-566.

49. Filippov, V. M. Variational principles for nonpotential operators / V. M. Filippov, V. M. Savchin, S. G. Shorokhov // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – Vol. 68. – № 3. – P. 275-398.

50. Савчин, В. М. Построение полуограниченного функционала для краевой задачи для нелинейных нестационарных уравнений Навье-Стокса / В. М. Савчин // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 162-168.

51. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер. – Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 548 с.

52. Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. – Москва: Мир, 1977. – 504 с.

53. Капица, П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П. Л. Капица // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1951. – Т. 21. – № 5. – С. 588-598.

54. Капица, П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом / П. Л. Капица // Успехи физических наук. – 1951. – Т. 44. – № 1. – С. 7-20.

55. Боголюбов, Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов // Сборник трудов Института строительной механики (АН УССР). – 1950. – Т. 14. – С. 9-34.

56. Богатов, Е. М. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н. Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П. Л. Капица и другие / Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2017. – Т. 25. – № 5. – С. 69-87.

57. Butikov, E. I. The rigid pendulum — an antique but evergreen physical mode / E. I. Butikov // European journal of physics. – 1999. – Vol. 20. – P. 429-441.

58. Головизнин, В. М. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике / В. М. Головизнин, А. А. Самарский, А. П. Фаворский // Доклады Академии наук СССР. – 1977. – Т. 235. – № 6. – С. 1285-1288.

59. Треногин, В. А. Функциональный анализ: Учебник. Третье издание / В. А. Треногин. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

60. Демиденко, Г. В. О периодических решениях одного дифференциального уравнения второго порядка / Г. В. Демиденко, А. В. Дулепова // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2021. – Т. 67. – № 3. – С. 535-548.

61. Формалев, В. Ф. Численные методы / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников. – Москва: Физматлит, 2004. – 400 с.

62. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – Москва: Мир, 1990. – 512 с.

63. Демиденко, Г. В. Об устойчивости движения перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса / Г. В. Демиденко, А. В. Дулепова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – Т. 21. – № 4. – С. 39-50.

64. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. – Москва: Наука, 1966. – 432 с.

65. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems / H. B. Zhang, L. Q. Chen, S. L. Gu, C. Z. Liu // Chinese Physics. – 2007. – Vol. 16. – № 3. – P. 582-587.

66. Polyanin, A. D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists / A. D. Polyanin, V. E. Nazaikinskii. – New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2016. – 800 p.