

## О Т З Ы В

официального оппонента о диссертации Болтачева А. В. "Об индексе нелокальных эллиптических уравнений, ассоциированных с диффеоморфизмами многообразий с краем" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Актуальность темы определяется тем, что теория индекса эллиптических операторов является самым ярким достижением математики второй половины прошлого века. Она не только связала анализ и топологию, но и дала толчок к исследованию различных классов операторов на многообразиях. Наиболее интересен случай дифференциально-разностных операторов на некомпактных многообразиях. Именно это и является объектом исследования данной диссертации.

В первой главе приводятся предварительные сведения об алгебре Буте де Монвеля и скрещенных произведениях с группой  $\Gamma$ .

Во второй главе строится топологический индекс краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием групп степенного роста. Для матричных  $\Gamma$ -операторов Буте де Монвеля, действующих между образами проекторов, доказано, что эллиптичности следует фредгольмовость. Разработана техника работы с многообразиями с расслоенным краем, включая изоморфизм Тома и характер Черна. Основным результатом этой главы является формула индекса для операторов указанного вида. В качестве примера рассмотрена скрученная краевая задача для оператора Эйлера и вычислен ее индекс.

Третья глава посвящена исследованию эллиптических операторов, ассоциированных с не обязательно изометрическим топологически свободным действием аменальной конечнопорожденной группы  $\Gamma$  диффеоморфизмов, сохраняющих край многообразия. Построена алгебра символов таких операторов и показано, что эллиптичность такого оператора (краевой задачи) равносильна фредгольмовости. С помощью технического результата о замкнутости некоторой коцепи (аналога класса Тодда) в периодических циклических когомологиях скрещенного произведения с  $\Gamma$  определяется топологический индекс соответствующих краевых задач.

Далее, развитая теория применяется к случаю краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра, т.е. бесконечного цилиндра с действием группы целых чисел поворотами. Получен критерий эллиптичности краевых задач в терминах эллиптичности внутреннего символа и условий Шапиро-Лопатинского на обоих основаниях цилиндра. В качестве примера рассмотрено возмущение оператора Лапласа нелокальными слагаемыми, для которого получены достаточные условия эллиптичности в терминах оператора Матъё.

Автор использует в диссертации сочетание методов — классических методов теории псевдодифференциальных операторов (включая методы теории краевых задач) и методы некоммутативной геометрии (теорию циклических когомологий, операторных алгебр, регуляризованных следов), что позволяет получать указанные результаты.

Все результаты диссертации являются новыми. Они достоверны, полностью обоснованы, доказательства подробно изложены и верны.

Ценность работы состоит в том, что исследованные классы операторов очень естественные, к ним относятся операторы, возникающие в ряде конкретных задач, и

возможность вычисления их индекса полезна. Также полезно, что рассматриваемые группы не обязательно коммутативны — действия нильпотентных групп также встречаются в естественных задачах.

Из крайне немногочисленных и незначительных недостатков работы упомяну нечеткое определение пространства Шварца на стр. 33, в котором не объяснено обозначение  $\overline{\mathbb{R}}_+$  и неясно, требуется ли чтобы функции обращались в 0 в нуле, впрочем, это не влияет на оценку диссертации в целом.

Основные результаты диссертации своевременно и достаточно полно опубликованы и прошли апробацию на ряде конференций и семинаров. Автореферат написан четко и адекватно отражает содержание диссертации.

Диссертационное исследование Болтачева А. В. «Об индексе нелокальных эллиптических уравнений, ассоциированных с диффеоморфизмами многообразий с краем» является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится новое решение научной задачи исследования фредгольмовости и индекса специальных классов дифференциально-разностных операторов, имеющей важное значение для теории эллиптических дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов», утвержденного Ученым советом РУДН протокол № УС-1 от 22.01.2024 г., а её автор, Болтачев Андрей Владимирович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

профессор Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»,

доктор физико-математических наук (01.01.04 – геометрия и топология),

доцент

Владимир Маркович Мануйлов

Подпись Мануйлова В. М. заверяю

Декан механико-математического  
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова,  
чл.-корр. РАН



Адрес: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1.

Контактный телефон: +7 495 9393798

Адрес электронной почты: manuilov@mech.math.msu.su

29.11.2024