Болтачев Андрей Владимирович

ОБ ИНДЕКСЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2024

Работа выполнена в Математическом институте имени С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Научный руководитель: Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор Математического института имени С.М. Никольского Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Официальные оппоненты: Антоневич Анатолий Борисович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета

Кордюков Юрий Аркадьевич, д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН

Мануйлов Владимир Маркович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 17.12.2024 в 15:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы (адрес: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3).

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте РУДН в сети интернет (https://www.rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан _ ноября 2024 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.Ю. Савин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Проблема индекса была сформулирована в статье Гельфанда[1], в которой поставлена задача о гомотопической классификации эллиптических операторов и задача о вычислении индекса в топологических терминах. Последняя задача была полностью решена Атьей и Зингером[2,3] для псевдодифференциальных операторов на гладком многообразии без края. Отметим некоторые важные обобщения теоремы Атьи–Зингера: теория индекса семейств эллиптических операторов[4], теория индекса для вещественных эллиптических операторов[5] и др. Теория индекса эллиптических операторов также имеет применения в физике (см., напр., работы Альвареза-Гауме[6], Гецлера[7], Шварца[8]). Так, важным приложением является формула индекса оператора Дирака.

Исследованием псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем занимались Вишик и Эскин[9], Эскин[10]. Теорема об индексе на многообразии с краем была получена в работе Буте де Монвеля[11]. Алгебра краевых задач Буте де Монвеля была введена в основном для нужд теории индекса. Подробное изложение и развитие теории индекса краевых задач было дано в монографии Ремпеля и Шульце[12]. Важную роль в этой теории играет исчисление символов. Несмотря на то, что описание краевых условий часто требует использования сложного аналитического аппарата, основная идея состоит в том, чтобы систематически использовать формальное соответствие между символьным и операторным уровнями и адаптировать методы, используемые в случае многообразий без края. Такой подход позволяет обобщить результаты, касающиеся эллиптических псевдодифференциальных операторов, на эллиптические краевые задачи. Одним из важных результатов работы[12] является получение формул индекса эллиптических краевых задач.

Дальнейшее исследование теории краевых задач Буте де Монвеля было проведено в работах Мело, Неста и Шроэ[13], а также Мело, Шика и Шроэ[14]. Впервые формула индекса псевдодифференциальных краевых задач была получена в статье Федосова[15]. В ней рассмотрены некоторые теоремы об индексе и их обобщения. Была дана формула индекса эллиптической краевой задачи в терминах внутреннего и граничного символов. Однако топологический (точнее, когомологический) смысл этой формулы не был прояснен.

---

[1] Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях. *УМН,* 1960. — 15, № 3. — С.121–132.

[2] Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. I. *УМН*, 1968. — 23, № 5. — С.99–142.

[3] Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. III. *УМН*, 1969. — 24, № 1. — С.127–182.

[4] Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. IV. *УМН*, 1972. — 27, № 4. — С.161–178.

[5] Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. V. *УМН*, 1972. — 27, № 4. — С.179–188.

[6] Alvarez-Gaumé L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. *Commun. Math. Phys.*, 1983. — 90. — С.161–173.

[7] Getzler E. Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem. *Commun.Math. Phys.*, 1983. — 92. — P.163–178.

[8] Шварц А. С. Эллиптические операторы в квантовой теории поля *Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Совр. пробл. мат.*, 1981. — 17. — С.113–117.

[9] Вишик М. И., Эскин Г. И. Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения, *УМН*, 1967. — 22, № 1. — С.15–76.

[10] Эскин Г. И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973.

[11] Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudodifferential operators. *Acta Math.*, 1971. — 126. — P.11–51.

[12] Ремпель Ш., Шульце Б.-В. *Теория индекса эллиптических краевых задач*, Мир, М., 1986.

[13] Melo S. T., Nest R., Schrohe E. C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra. *J. Reine Angew. Math.*, 2003. — 561. — P.145–175.

[14] Melo S. T., Schick Th., Schrohe E. A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems. *J. Reine Angew. Math.*, 2006. — 599. — P.217–233.

[15] Федосов Б. В. Теоремы об индексе. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, 1991. — 65. — С.165–268.

В теории нелокальных эллиптических задач рассматриваются операторы со сдвигами аргументов:

$$D = \sum_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma T_\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

где Γ — дискретная группа диффеоморфизмов гладкого компактного многообразия M с краем, $(T_\gamma u)(x) = u(\gamma^{-1}(x))$ — оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму $\gamma : M \to M$, D_γ — псевдодифференциальные операторы порядка $\leq m$.

При изучении нелокальных эллиптических краевых задач выделяют задачи двух типов: задачи, в которых область сохраняется при действии группы, и задачи, в которых область не сохраняется. Задачи первого типа исследовались в достаточно большой общности Антоневичем, Лебедевым и соавторами[16,17]. Такие задачи возникают преимущественно в дифференциальной геометрии и некоммутативной геометрии. Различными авторами были также исследованы неинвариантные случаи, в которых не сохраняется край многообразия[18,19,20,21,22].

Подчас результаты общей теории выглядят весьма громоздко и поэтому явные результаты получаются в конкретных примерах. Такими примерами служат некоммутативный тор[23], функционально-дифференциальные уравнения с диффеоморфизмами: сдвига[18,19], сжатия и растяжения[20,24,25], ортотропного сжатия[21], диффеоморфизмом Аносова[26], диффеоморфизмами Морса–Смейла[27].

В монографии Назайкинского, Савина, Стернина[28] с помощью методов из K-теории операторных алгебр и некоммутативной геометрии решена проблема индекса нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных со счетной группой изометрических диффеоморфизмов на замкнутом многообразии. Также Савиным и Стерниным была получена гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем[29]. Проблема индекса нелокальных краевых задач оставалась мало исследованной.

Цели и задачи. Целью работы является исследование краевых задач со сдвигами на гладких многообразиях с краем и получение соответствующих формул индекса. Рассмот-

[16] Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. *Functional differential equations. II. C^*-applications. Parts 1, 2.* Longman, Harlow, 1998.

[17] Antonevich A. B., Lebedev A. V. Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach. Providence, RI, 2000. Amer. Math. Soc.

[18] Skubachevskii A. L. *Elliptic functional differential equations and applications.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1997.

[19] Skubachevskii A. L. Boundary value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys*, 2016. — 71, № 5. — P.801–906.

[20] Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. *СМФН*, 2014. — 54. — С.3–138.

[21] Тасевич А. Л. Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями на границе соседних подобластей. *СМФН*, 2023. — 69, № 1. — С.152–165.

[22] Baldare A., Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schrohe E. C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators. *Math. Notes*, 2022. — 111, № 5. — С.701–721.

[23] Connes A. *Noncommutative geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[24] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Некоммутативная эллиптическая теория. Примеры. *Труды МИАН*, 2010. — 271. — С.204–223.

[25] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений. *Матем. сб.*, 2011. — 202, № 10. — С.99–130.

[26] Antonevich A., Lebedev A. *Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory.* Longman, Harlow, 1994.

[27] Izvarina N. R., Savin A. Yu. Ellipticity of operators associated with Morse-Smale diffeomorphisms. *Differential equations on manifolds and mathematical physics. Trends in Math.*, 2020. — P.202–220.

[28] Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu. *Elliptic theory and noncommutative geometry.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[29] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем. *Уфимск. матем. журн.*, 2016. — 8, № 3. — С.126–134.

рен случай действия группы, которое сохраняет край многообразия. Предлагается исследовать условия эллиптичности нелокальных краевых задач, связанных с диффеоморфизмом скручивания цилиндра.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Получена формула индекса нелокальных краевых задач на гладких многообразиях с краем, на которых изометрически действует дискретная группа. Рассмотрен пример скрученной нелокальной краевой задачи, для которой получена формула индекса. Для нелокальных краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы, сформулирована теорема конечности. Определен топологический индекс таких задач с помощью аппарата циклических когомологий. Наконец, получены условия эллиптичности нелокальной краевой задачи со скручиваниями цилиндра.

Теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории псевдодифференциальных операторов и псевдодифференциальных краевых задач. Используются методы дифференциальной геометрии, а именно, дифференциальные формы, связности, характеристические классы, а также методы некоммутативной геометрии. В частности, для получения формулы индекса используется аппарат циклических когомологий.

Положения, выносимые на защиту.

1) Получена формула индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста. Эти результаты являются новыми даже в случае конечной группы.
2) В качестве приложения получена формула индекса скрученных краевых задач. В частности, вычислен индекс скрученного оператора Эйлера.
3) Определен топологический индекс краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы на многообразии с краем. В определении используются циклические когомологии.
4) Для краевых задач со скручиваниями конечного цилиндра получены условия эллиптичности в явном виде.

Степень достоверности и апробация результатов. Степень достоверности полученных в диссертации результатов обеспечивается строгостью доказательств, имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Результаты, представленные в диссертационной работе, были доложены на следующих международных конференциях:

- Международная конференция Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ), Крым, 17-26 сентября 2021.
- Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения”, Воронеж, 3-9 мая 2021, 3-9 мая, 2023.

- Международная конференция “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis” (OTHA), Ростов-на-Дону, 22–27 августа 2021, 21–26 августа 2022.
- Международная конференция “The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (DFDE), Москва, 28 июня – 5 июля 2022.
- Международная научная конференция “Уфимская осенняя математическая школа”, Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022, 2–5 октября 2024.
- Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”, Воронеж, 27 января – 1 февраля, 2023.

Результаты диссертационной работы докладывались на следущих научных семинарах:

- Научный семинар “Алгебры в анализе”, рук. А.Я. Хелемский, А.Ю. Пирковский, МГУ, 18.10.2024.
- Научный семинар “Некоммутативная геометрия и топология”, рук. А.С. Мищенко, И.К. Бабенко, В.М. Мануйлов, А.А. Ирматов, А.А. Арутюнов, Ф.Ю. Попеленский, МГУ, 07.04.2022.
- Научный семинар “Кинетические и нелинейные уравнения математической физики”, рук. С.Б. Куксин, А.Л. Пятницкий, А.Л. Скубачевский, РУДН, 23.05.2024.
- Научный семинар Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, рук. А.Л. Скубачевский, РУДН, 16.11.2021.
- Научный студенческий семинар по дифференциальным уравнениям, рук. А.Ю. Савин, П.А. Сипайло, РУДН (неоднократно, 2019–2021).
- Общематематический семинар молодых ученых Математического института им. С.М. Никольского, рук. Ю.О. Беляева, РУДН, 30.11.2020.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 5 статей в научных журналах, индексируемых в международных базах данных и 6 — в тезисах докладов на международных конференциях. Их список приведён в конце автореферата. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 125 страниц. Список литературы содержит 61 наименование.

Основное содержание работы

В **главе 1** даются сведения об алгебре Буте де Монвеля.

В **§1.1** напоминается определение операторов Буте де Монвеля на гладком компактном многообразии с краем и описывается алгебра символов Буте де Монвеля. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем X. Набор (x', x_n, ξ', ξ_n) определяет локальные координаты на кокасательном расслоении T^*M. Обозначим через $H_+ = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ пространство Фреше образов преобразования Фурье $\mathcal{F}_{x_n\to\xi_n}$ функций из пространства Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Пространство H_- определяется аналогично.

Рассмотрим гладкие функции со значениями в пространствах Фреше

- $b(x', \xi', \xi_n) \in C^\infty(T_0^*X, H_-)$, $c(x', \xi', \xi_n) \in C^\infty(T_0^*X, H_+)$;
- $g(x', \xi', \xi_n, \eta_n) \in C^\infty(T_0^*X, H_+ \otimes H_-)$, $q(x', \xi') \in C^\infty(T_0^*X)$.

Набору функций выше сопоставим гладкое семейство операторов

$$a_X(x',\xi'):\begin{matrix}\overline{H}_+\\ \oplus\\ \mathbb{C}\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\overline{H}_+\\ \oplus\\ \mathbb{C}\end{matrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix}h\\ v\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\Pi_+(a(x',0,\xi',\xi_n)h(\xi_n))+\Pi'_{\eta_n}(g(x',\xi',\xi_n,\eta_n)h(\eta_n))+c(x',\xi',\xi_n)v\\ \Pi'_{\xi_n}(b(x',\xi',\xi_n)h(\xi_n))+q(x',\xi')v\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\Pi_+:H_+\oplus H_-\to H_+$ — проектор на первое слагаемое, а Π' — непрерывный функционал

$$\Pi':H_+\oplus H_-\longrightarrow\mathbb{C},\qquad u(\xi_n)\longmapsto\lim_{x_n\to 0+}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n}(u(\xi_n)).$$

Определение 1. *Главным символом* Буте де Монвеля порядка m называется пара

$$\sigma=(\sigma_{\rm int},\sigma_X)\in C^\infty(T^*_0M)\oplus C^\infty(T^*_0X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C})),$$

в которой:

1) первая компонента $\sigma_{\rm int}\in C^\infty(T^*_0M)$ называется *внутренним символом* и является однородной функцией, удовлетворяющей свойству трансмиссии;

2) вторая компонента называется *граничным символом* и является оператор-функцией

$$\sigma_X\in C^\infty(T^*_0X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C})) \tag{3}$$

на кокасательном расслоении T^*_0X края, где через $\mathcal{B}$ обозначена алгебра непрерывных операторов;

3) выполнено условие согласования $(\sigma_{\rm int}(x,\xi))|_X=a(x',0,\xi',\xi_n)$ и условие *скрученной однородности* граничного символа

$$a_X(x',\lambda\xi')=\varkappa_\lambda a_X(x',\xi')\varkappa_\lambda^{-1},\quad \forall|\xi'|\geq 1, x'\in X \text{ и } \lambda\geq 1,$$

где

$$\begin{array}{rcl}\varkappa_\lambda:H_+\oplus\mathbb{C}&\longrightarrow&H_+\oplus\mathbb{C}\\ (h(\xi_n),v)&\longmapsto&(\lambda^{-1/2}h(\lambda^{-1}\xi_n),v)\end{array}$$

— действие группы растяжений.

Гладкие семейства граничных символов (3) образуют алгебру, которую мы обозначим через $\Sigma_X\subset C^\infty(T^*_0X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C}))$. Символу Буте де Монвеля σ порядка m сопоставляется оператор

$$\operatorname{Op}(\sigma):\begin{matrix}C^\infty(M)\\ \oplus\\ C^\infty(X)\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}C^\infty(M)\\ \oplus\\ C^\infty(X)\end{matrix}. \tag{4}$$

Оператор в формуле (4) называется *оператором Буте де Монвеля.*

Обозначим линейное пространство операторов (4) нулевого порядка и типа через $\Psi_B(M)$. Символьное отображение

$$\begin{array}{rcl}\Psi_B(M)&\longrightarrow&C^\infty(S^*M)\oplus C^\infty(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}))\\ \mathcal{D}&\longmapsto&(\sigma_{\rm int}(\mathcal{D}),\sigma_X(\mathcal{D}))\end{array} \tag{5}$$

корректно определено и справедлива формула композиции символов операторов Буте де Монвеля $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$

$$\sigma_{\rm int}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2)=\sigma_{\rm int}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\rm int}(\mathcal{D}_2),\qquad \sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2)=\sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$

Символьное отображение (5) непрерывно продолжается до мономорфизма C^*-алгебр

$$\overline{\Psi_B(M)}/\mathcal{K}\longrightarrow C(S^*M)\oplus C(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C})),$$

где $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ — идеал компактных операторов, а замыкание $\overline{\Psi_B(M)}$ рассматривается в $\mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$.

Пусть Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma\colon M \to M$, сохраняющих край $\gamma(X) = X$. Для элемента $\gamma \in \Gamma$ определим оператор сдвига

$$T_\gamma : L^2(M) \oplus L^2(X) \longrightarrow L^2(M) \oplus L^2(X), \quad (u(x), v(x')) \longmapsto (u(\gamma^{-1}(x)), v(\gamma^{-1}(x'))).$$

В **§1.2** напоминаются определения алгебраического и гладкого скрещенных произведений.

Пусть Γ — дискретная конечнопорожденная группа, которая действует на алгебре $\mathcal{A}$ автоморфизмами.

Определение 2. *Алгебраическим скрещенным произведением* алгебры $\mathcal{A}$ и группы Γ, обозначаемым через $\mathcal{A} \rtimes_{\text{alg}} \Gamma$, называется векторное пространство функций $f : \Gamma \to \mathcal{A}$ с компактным носителем, в котором произведение элементов $\{f_1(\gamma)\} \cdot \{f_2(\gamma)\} \in \mathcal{A} \rtimes_{\text{alg}} \Gamma$ определяется формулой

$$\{f_1(\gamma)\} \cdot \{f_2(\gamma)\} = \left\{ \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f_1(\gamma_1)\gamma_1(f_2(\gamma_2)) \right\}. \tag{6}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Фреше с полунормами $\|\cdot\|_m$, $m \in \mathbb{N}$, а Γ — группа степенного роста, действующая на алгебре $\mathcal{A}$ автоморфизмами $a \mapsto \gamma(a)$, где $a \in \mathcal{A}$ и $\gamma \in \Gamma$.

Определение 3. *Гладким скрещенным произведением*, обозначаемым через $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$, называется векторное пространство функций $f : \Gamma \to \mathcal{A}$, которые быстро убывают на бесконечности в смысле следующих оценок: $\|f(\gamma)\|_m \le C_{m,N}(1 + |\gamma|)^{-N}$ для любых $N, m \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in \Gamma$, где константа $C_{m,N}$ не зависит от элемента γ.

Известно следующее утверждение[30]. Пусть Γ — группа степенного роста и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует число $k \in \mathbb{N}$ и такой вещественный многочлен $p(z)$, что для любых $a \in \mathcal{A}$ и $\gamma \in \Gamma$ выполнено неравенство $\|\gamma(a)\|_m \le p(|\gamma|)\|a\|_k$. Тогда гладкое скрещенное произведение $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$ является алгеброй с умножением, определенным формулой (6).

Глава 2 посвящена построению топологического индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием группы.

В **§2.1** приводится постановка задачи и определяется топологический индекс краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием группы. В п. **2.1.1** вводятся Γ-операторы Буте де Монвеля и доказывается их фредгольмовость. Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n с краем X, а Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma : M \to M$, которые сохраняют край $\gamma(X) = X$. Пусть группа Γ является группой степенного роста.

Определение 4. Элементы $\{\mathcal{D}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в гладком скрещенном произведении $\Psi_B(M) \rtimes \Gamma$ определяют операторы

$$\mathcal{D} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{D}_\gamma T_\gamma : L^2(M) \oplus L^2(X) \to L^2(M) \oplus L^2(X), \tag{7}$$

которые называются Γ-*операторами Буте де Монвеля*.

Определение 5. *Символом* оператора (7) называется пара $\sigma(\mathcal{D}) = (\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}), \sigma_X(\mathcal{D}))$, состоящая из внутреннего и граничного символов

$$\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}) = \{\sigma(A_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \in C^\infty(S^*M) \rtimes \Gamma, \quad \sigma_X(\mathcal{D}) = \{\sigma_X(\mathcal{D}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \in \Sigma_X \rtimes \Gamma, \tag{8}$$

где A_γ — оператор в левом верхнем углу матричного оператора $\mathcal{D}_\gamma$.

Предложение 6. *Пусть даны операторы* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \Psi_B(M) \rtimes \Gamma$. *Тогда справедливы формулы*

$$\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}_2) \text{ и } \sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$

[30] Schweitzer L. B. Spectral invariance of dense subalgebras of operator algebras. *Internat. J. Math.*, 1993. — 4, № 2. — P.289–317.

Рассмотрим операторы Буте де Монвеля, действующие между образами матричных проекторов.

Определение 7. Матричным Γ-*оператором Буте де Монвеля* называется такая тройка $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, что

- $\mathcal{D} \in \mathrm{Mat}_N(\Psi_B(M) \rtimes \Gamma)$ — матрица с компонентами из $\Psi_B(M) \rtimes \Gamma$;
- $\mathcal{P}_j \in \mathrm{Mat}_N((C^\infty(M) \oplus C^\infty(X)) \rtimes \Gamma)$, $j = 1, 2,$ — проекторы, т.е., $(\mathcal{P}_j)^2 = \mathcal{P}_j$, $j = 1, 2$;
- выполнено соотношение $\mathcal{P}_2 \mathcal{D} \mathcal{P}_1 = \mathcal{D}$.

Теперь определим оператор, обозначаемый через $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$

$$\mathcal{D} : \mathcal{P}_1(L^2(M, \mathbb{C}^N) \oplus L^2(X, \mathbb{C}^N)) \longrightarrow \mathcal{P}_2(L^2(M, \mathbb{C}^N) \oplus L^2(X, \mathbb{C}^N)) \tag{9}$$

действующий между образами проекторов в пространстве L^2. .

Определение 8. Оператор $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ называется *эллиптическим*, если существует такой матричный оператор $(\mathcal{R}, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1)$, что выполнены следующие равенства

$$\sigma(\mathcal{D})\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{P}_2), \qquad \sigma(\mathcal{R})\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{P}_1).$$

Теорема 9. *Эллиптический оператор* (9) *фредгольмов.*

В случае задач для дифференциальных операторов условия эллиптичности могут быть сформулированы в виде, аналогичном условию Шапиро–Лопатинского.

В п. **2.1.2** определяются комплексы де Рама на многообразиях с расслоенным краем и их группы когомологий.

Определение 10. Пусть M — гладкое многообразие с краем ∂M. Будем считать, что край является тотальным пространством локально тривиального расслоения $\pi : \partial M \to X$ со слоем F. Тогда пара (M, π) называется *многообразием с расслоенным краем*.

Обозначим через $\Omega^*(M)$ алгебру дифференциальных форм на многообразии M, а через $\Omega^*_c(\partial M)$ — алгебру дифференциальных форм на ∂M с компактным носителем. Вложение $i : \partial M \hookrightarrow M$ индуцирует отображение сужения $i^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(\partial M)$. Проекция π определяет индуцированное вложение $\pi^* : \Omega^*(X) \to \Omega^*(\partial M)$ и отображение прямого образа (интегрирование вдоль слоёв проекции π)

$$\pi_* : \Omega^*_c(\partial M) \longrightarrow \Omega^{*-\nu}_c(X), \quad \nu = \dim F.$$

Рассмотрим градуированный морфизм

$$(\Omega^*_c(M), d) \xrightarrow{\pi_* i^*} (\Omega^{*-\nu}_c(X), d), \quad d\pi_* i^* = (-1)^\nu \pi_* i^* d$$

комплексов де Рама на M и X. Обозначим конус морфизма $\pi_* i^*$ через $(\Omega^*_c(M, \pi), \partial)$, где

$$\Omega^j_c(M, \pi) = \Omega^j_c(M) \oplus \Omega^{j-\nu-1}_c(X), \quad \partial = \begin{pmatrix} d & 0 \\ \pi_* i^* & (-1)^{\nu+1} d \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Группы когомологий комплекса $(\Omega^*_c(M, \pi), \partial)$ будем обозначать через $H^*_c(M, \pi)$.

Также рассмотрим комплекс $(\widetilde{\Omega}^*(M, \pi), \widetilde{\partial})$:

$$\widetilde{\Omega}^j(M, \pi) = \{(\omega, \omega_X) \in \Omega^j(M) \oplus \Omega^j(X) \mid i^*\omega = \pi^*\omega_X\}, \quad \widetilde{\partial} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Покомпонентное внешнее произведение дифференциальных форм дает произведение

$$\wedge : \Omega^j_c(M, \pi) \times \widetilde{\Omega}^k(M, \pi) \longrightarrow \Omega^{j+k}_c(M, \pi).$$

Определим линейный функционал

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, [M, \pi] \rangle : H^*_c(M, \pi) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega, \omega_X) & \longmapsto & \int_M \omega - (-1)^n \int_X \omega_X. \end{array}$$

Граница $\partial(T^*M) \simeq T^*X \times \mathbb{R}$ кокасательного расслоения T^*M расслоена над T^*X со слоем $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующую проекцию через $\pi : \partial(T^*M) \to T^*X$, а вложение $\partial(T^*M) \subset T^*M$ через i. Рассмотрим комплекс $(\Omega^*(T^*M, \pi), \partial)$, а его когомологии обозначим через $H^*(T^*M, \pi)$.

Также рассмотрим комплекс

$$\Omega^k(M, \mathrm{id}) = \{(\omega, \omega_X) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(X)\}, \quad \partial' = \begin{pmatrix} d & 0 \\ j^* & -d \end{pmatrix},$$

где отображение $j : X \hookrightarrow M$ означает естественное вложение края. Его когомологии совпадают с относительными когомологиями $H^*(M, X)$ пары (M, X).

Определим отображение

$$\Omega^*(T^*M, \pi) \xrightarrow{\alpha} \Omega^{*-n}(M, \mathrm{id}), \quad \alpha(\omega, \omega_X) = \left(\pi_*^M \omega, -\pi_*^X \omega_X\right), \quad n = \mathrm{dim} M, \tag{11}$$

где интегрирование производится вдоль слоев проекций $\pi^M : T^*M \longrightarrow M$, $\pi^X : T^*X \longrightarrow X$.

Предложение 11 (Об изоморфизме Тома)**.** *Отображение*

$$\alpha : H^*(T^*M, \pi) \longrightarrow H^{*-n}(M, X) \tag{12}$$

является изоморфизмом.

В п. **2.1.3** определяется характер Черна символов эллиптических операторов (9). Его определение использует некоммутативные дифференциальные формы на кокасательных расслоениях T^*M и T^*X и является обобщением результатов[28].

Пусть $C^\infty_{tr}(T^*M) \subset C^\infty(T^*M)$ — подалгебра классических символов порядка ≤ 0, которые удовлетворяют свойству трансмиссии. Пусть $\Omega_{T^*M} \subset \Omega(T^*M)$ — подалгебра дифференциальных форм на T^*M с коэффициентами из $C^\infty_{tr}(T^*M)$. Обозначим через $\widetilde{\Sigma}_X \subset C^\infty(T^*X, \mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C}))$ подалгебру таких семейств операторов $a_X(x', \xi')$, $(x', \xi') \in T^*X$, что семейство $a_X(x', \xi')$ определяется как в формуле (1). Обозначим через $\Omega_{T^*X} \subset \Omega(T^*X, \mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C}))$ подалгебру дифференциальных форм на T^*X с коэффициентами в $\widetilde{\Sigma}_X$. Рассмотрим действие группы Γ на алгебрах Фреше Ω_{T^*M} и Ω_{T^*X} дифференциальных форм и соответствующие гладкие скрещенные произведения $\Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma$ и $\Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma$.

Отображение

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}' \colon \ & \Sigma_X \longrightarrow C^\infty(S^*X) \\ \mathrm{Tr}'\, a_X(x', \xi') \ & = \Pi'_{\eta_n} g(x', \xi', \eta_n, \eta_n) + q(x', \xi'), \end{aligned} \tag{13}$$

называется *регуляризованным следом* Tr' граничного символа $a_X \in \Sigma_X$, где функции g, q — компоненты граничного символа из формулы (1). Отображение (13) не обладает следовым свойством. Более точно, Б.В.Федосовым получена следующая формула дефекта следа:

$$\mathrm{Tr}'[a_{X,1}, a_{X,2}] = -i\Pi'\left(\frac{\partial a_1(\xi_n)}{\partial \xi_n} a_2(\xi_n)\right) = i\Pi'\left(a_1(\xi_n)\frac{\partial a_2(\xi_n)}{\partial \xi_n}\right), \tag{14}$$

для любых $a_{X,1}, a_{X,2} \in \Sigma_X$, где a_1 и a_2 — главные символы граничных символов $a_{X,1}$ и $a_{X,2}$ соответственно.

Пусть $\gamma \in \Gamma$. Подмногообразие $M^\gamma = \{x \in M \,|\, \gamma(x) = x\}$ называется *подмногообразием неподвижных точек.*

Предположим, что заданы компактная группа Ли $\overline{\Gamma}$ изометрий, действующая на многообразии M, и вложение $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$, причем сужение действия группы $\overline{\Gamma}$ на подгруппу Γ совпадает с исходным действием группы Γ. Через $C^\gamma \subset \overline{\Gamma}$ обозначим *централизатор* элемента $\gamma \in \Gamma$. Централизатор является замкнутой подгруппой Ли в $\overline{\Gamma}$.

Обозначим элементы централизатора через h, а индуцированную меру Хаара на нем через dh. Под *мерой Хаара* будем понимать форму объема на группе, инвариантную относительно действия группы, т.е., $\gamma^* dh = dh$, $\forall \gamma \in \overline{\Gamma}$. *Классом сопряженности* $\langle\gamma\rangle$ элемента $\gamma \in \Gamma$ называется множество $\langle\gamma\rangle = \{\gamma' \in \Gamma \mid \exists z \in \Gamma\ \gamma' = z\gamma z^{-1}\}$.

Определим отображения

$$\tau^\gamma : \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega_{T^*M^\gamma}, \qquad \tau_X^\gamma : \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega_{T^*X^\gamma}, \tag{15}$$

$$\tau^\gamma(\omega) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} h^*\bigl(z^*\omega(\gamma')\bigr)\Big|_{T^*M^\gamma} dh, \quad \text{где } \omega \in \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma, \tag{16}$$

$$\tau_X^\gamma(\omega_X) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{Tr}_X \left(h^*\bigl(z^*\omega_X(\gamma')\bigr)\Big|_{T^*X^\gamma}\right) dh, \quad \text{где } \omega_X \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma. \tag{17}$$

Здесь

$$\operatorname{Tr}_X \left(\sum_I \omega_I(t) dt^I \right) = \sum_I \operatorname{Tr}'(\omega_I(t)) dt^I,$$

где $\operatorname{Tr}' : \widetilde{\Sigma}_X \to C^\infty(T^*X)$ — регуляризованный след, определенный ранее в формуле (13), а через I обозначен набор индексов. Ключевыми в определении характера Черна являются следующие свойства функционалов (15)

Предложение 12. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Слагаемые в формулах* (16) *и* (17) *не зависят от выбора элементов z.*
2. *Функционалы* (16) *и* (17) *обладают свойствами:*

$$\tau^\gamma(\omega_1 \wedge \omega_2) = (-1)^{\deg\omega_1 \deg\omega_2} \tau^\gamma(\omega_2 \wedge \omega_1), \quad \textit{для любых } \omega_1, \omega_2 \in \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma, \tag{18}$$

$$d\tau_X^\gamma(\omega) = \tau_X^\gamma(d\omega), \quad \textit{для любых } \omega \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma. \tag{19}$$

Рассмотрим эллиптический оператор $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Для краткости мы часто будем обозначать его через $\mathcal{D}$. Продолжим внутренние символы $\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}), \sigma_{\text{int}}(\mathcal{R})$ исходного оператора и его почти обратного на кокасательном расслоении T^*M гладкими символами, которые обладают свойством трансмиссии. Продолжим также и граничные символы $\sigma_X(\mathcal{D})$ и $\sigma_X(\mathcal{R})$ на T^*X гладкими символами. Обозначим эти продолжения через

$$a, r \in C^\infty_{tr}(T^*M) \rtimes \Gamma, \qquad a_X, r_X \in \widetilde{\Sigma}_X \rtimes \Gamma.$$

Выполнены следующие равенства:

$$a = P_2 a P_1, \quad r = P_1 r P_2, \quad a_X = P_2' a_X P_1', \quad r_X = P_1' r_X P_2',$$

где $P_j = \sigma_{\text{int}}(\mathcal{P}_j)$, $P_j' = \sigma_X(\mathcal{P}_j)$.

Определим некоммутативные связности

$$\nabla_{P_j} = P_j \cdot d \cdot P_j \quad \text{на} \quad T^*M \quad \text{и} \quad \nabla_{P_j'} = P_j' \cdot d' \cdot P_j' \quad \text{на} \quad T^*X, \text{ где } j = 1, 2,$$

а d' обозначает внешний дифференциал на T^*X. Также определим связности

$$\widetilde{\nabla}_{P_1} = \nabla_{P_1} + r(\nabla a), \text{ где } \nabla a \equiv \nabla_{P_2} a - a \nabla_{P_1},$$

$$\widetilde{\nabla}_{P_1'} = \nabla_{P_1'} + r_X(\nabla' a_X), \text{ где } \nabla' a_X = \nabla_{P_2'} a_X - a_X \nabla_{P_1'}.$$

Формы кривизны связностей $\widetilde{\nabla}_{P_1}$ и $\widetilde{\nabla}_{P_1'}$ определяются выражениями

$$\widetilde{\Omega}_{P_1} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_{P_1})^2, \qquad \widetilde{\Omega}_{P_1'} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_{P_1'})^2.$$

Определение 13. Дифференциальные формы с компактными носителями

$$\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M} \sigma(\mathcal{D}) \in \Omega^{ev}_c(T^*M^\gamma), \quad \operatorname{ch}^\gamma_{T^*X} \sigma(\mathcal{D}) \in \Omega^{ev}_c(T^*X^\gamma)$$

на кокасательных расслоениях подмногообразий неподвижных точек называются *характерами Черна* символов и определяются формулами

$$\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M} \sigma(\mathcal{D}) = \tau^\gamma \left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i} (P_1 - ra) \right) - \tau^\gamma \left(P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i} - a e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i} r \right), \tag{20}$$

$$\operatorname{ch}^\gamma_{T^*X} \sigma(\mathcal{D}) = \tau_X^\gamma \left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1'}/2\pi i} (P_1' - r_X a_X) \right) - \tau_X^\gamma \left(P_2' e^{-\nabla^2_{P_2'}/2\pi i} - a_X e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1'}/2\pi i} r_X \right). \tag{21}$$

Пусть теперь граница $\partial(T^*M^\gamma) \simeq T^*X^\gamma \times \mathbb{R}$ расслоена над T^*X^γ со слоем $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующую проекцию через $\pi^\gamma : \partial(T^*M^\gamma) \to T^*X^\gamma$, а вложение $\partial(T^*M^\gamma) \subset T^*M^\gamma$ через i_γ. Следовательно, пара $(T^*M^\gamma, \pi^\gamma)$ является многообразием с расслоенным краем в смысле определения 10. Аналогично (10) рассмотрим комплекс $(\Omega_c^*(T^*M^\gamma, \pi^\gamma), \partial)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 14. *1. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Пара $(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}), -\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D}))$ является замкнутой в комплексе $(\Omega_c^*(T^*M^\gamma, \pi^\gamma), \partial)$ (см. (10)), а именно, выполнены равенства*

$$d\,(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D})) = 0, \qquad d'\,(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D})) = \pi^\gamma_* i^*_\gamma\,(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}))\,.$$

2. Класс когомологий пары $(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}), -\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D}))$, обозначаемый через $\mathrm{ch}^\gamma\,\sigma(\mathcal{D}) \in H^{ev}(T^*M^\gamma, \pi^\gamma)$, не зависит от выбора элементов a, r, a_X, r_X и не изменяется при гомотопиях эллиптических символов.

В п. **2.1.4** даются теорема об индексе и необходимые характеристические классы. *Формой Тодда* на подмногообразии M^γ называется дифференциальная форма

$$\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C}) \overset{\mathrm{def}}{=} \det\left(\frac{-\Omega^\gamma/2\pi i}{1-\exp(\Omega^\gamma/2\pi i)}\right) \in \Omega^{ev}(M^\gamma),$$

где Ω^γ — форма кривизны связности Леви–Чивиты на M^γ. Форма Тодда $\mathrm{Td}(T^*X^\gamma \otimes \mathbb{C})$ на X^γ определяется схожим образом. Пара этих форм является замкнутой в комплексе $(\widetilde{\Omega}^*(M^\gamma, \pi^\gamma), \widetilde{\partial})$, а её класс когомологий будем обозначать через

$$\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) \in \widetilde{H}^{ev}(M^\gamma, \pi^\gamma).$$

Конормальным расслоением подмногообразия $M^\gamma \subset M$ называется множество

$$N^\gamma = \{(x,\xi) \in T^*M \mid x \in M^\gamma, \xi(v) = 0\ \forall v \in T_xM^\gamma \subset T_xM\}.$$

Определим класс когомологий

$$\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma) - \mathrm{ch}\,\Omega^{odd}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)} \in H^{ev}(M^\gamma),$$

где $\Omega^{ev/odd}$ — векторное расслоение внешних форм четной/нечетной степени, а класс $\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)$ определен как линейная комбинация обычных характеров Черна

$$\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma) = \sum_k \lambda_k\,\mathrm{ch}\,V_{\lambda_k}.$$

Здесь $\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus\limits_k V_{\lambda_k}$ — разложение векторного расслоения на собственные подрасслоения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k \in \mathbb{S}^1$ эндоморфизма расслоений γ. Класс $\Omega^{odd}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)$ определяется аналогично.

Следующая теорема является основным результатом главы 2.

Теорема 15. *Пусть $\mathcal{D}$ — эллиптический оператор в смысле определения 8. Тогда справедлива формула индекса*

$$\operatorname{ind}\mathcal{D} = \sum_{\langle\gamma\rangle \subset \Gamma} \langle \mathrm{ch}^\gamma\,\sigma(\mathcal{D}) \wedge \mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}), [T^*M^\gamma, \pi^\gamma]\rangle, \tag{22}$$

где суммирование идёт по классам сопряженности группы Γ, а ряд сходится абсолютно.

В **§2.2** рассмотрен специальный класс операторов Буте де Монвеля, для которых вычисление индекса упрощается. В п. **2.2.1** приводится постановка задачи. Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с краем X, а Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma : M \to M$, сохраняющих край $\gamma(X) = X$.

Пусть $\mathcal{D}$ — эллиптический оператор Буте де Монвеля (без сдвигов), действующий в сечениях Γ-расслоений E_i, F_i, $i = 1, 2$ (таких расслоений E над M, что $\forall m \in M$, $\gamma \in \Gamma$ существует изоморфизм слоев $t_m(\gamma) : E_m \to E_{\gamma(m)}$, гладко зависящий от m и удовлетворяющий равенству $t(\gamma_1)t(\gamma_2) = t(\gamma_1\gamma_2)$ $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$).

Через $\mathcal{T}_i(\gamma)$ обозначим оператор сдвига, действующий в векторных расслоениях E_i, F_i. Пусть дан матричный $n \times n$ проектор $P \in \mathrm{Mat}_n(C^\infty(M) \rtimes \Gamma)$. Определим проектор $\widetilde{P}_j = \sum_{\gamma \in \Gamma}(1 \otimes P(\gamma))(\mathcal{T}_j(\gamma) \otimes 1)$.

Определение 16. Оператор

$$\widetilde{P}_2(\mathcal{D}\otimes 1_n)\widetilde{P}_1 : \mathrm{Im}\widetilde{P}_1 \longrightarrow \mathrm{Im}\widetilde{P}_2, \quad \text{где } \mathrm{Im}\widetilde{P}_j \subset L^2(M, E_j\otimes\mathbb{C}^n)\oplus L^2(X, F_j\otimes\mathbb{C}^n), \tag{23}$$

обозначается через $\mathcal{D}\otimes 1_P$ и называется *оператором $\mathcal{D}$, скрученным проектором P.*

В п. **2.2.2** приводится формула индекса таких скрученных операторов. Полученная формула индекса использует характер Черна символа оператора Буте де Монвеля, характер Черна проектора, изоморфизм Тома для подмногообразия неподвижных точек.

В п. **2.2.3** в качестве примера рассмотрена скрученная краевая задача для оператора Эйлера

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} d+d^* \\ i^* \end{pmatrix} : \Omega^{ev}(M) \longrightarrow \begin{array}{c}\Omega^{odd}(M)\\ \oplus \\ \Omega^{ev}(X)\end{array}, \tag{24}$$

где $i : X \hookrightarrow M$ естественное вложение края, $d : \Omega^{ev}(M) \to \Omega^{odd}(M)$ — внешний дифференциал, а d^* — сопряженный к нему относительно римановой метрики на M. Для матричного проектора $P \in \mathrm{Mat}_N(C^\infty(M)\rtimes\Gamma)$ над гладким скрещенным произведением рассмотрим скрученную краевую задачу $\mathcal{E}\otimes 1_P$.

Теорема 17. *Индекс скрученной краевой задачи $\mathcal{E}\otimes 1_P$ равен*

$$\mathrm{ind}(\mathcal{E}\otimes 1_P) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma} {\sum}' \chi(M^\gamma, \partial M^\gamma)\,\mathrm{ch}_0^\gamma(P).$$

Здесь

- $\chi(M^\gamma, \partial M^\gamma)$ *— относительная эйлерова характеристика множества M^γ;*
- *число $\mathrm{ch}_0^\gamma(P)$ равно компоненте нулевой степени характера Черна проектора P;*
- $\chi(M^\gamma, \partial M^\gamma)$ *и $\mathrm{ch}_0^\gamma(P)$ рассматриваются как локально постоянные функции на M^γ;*
- *знак ${\sum}'$ обозначает суммирование по компонентам связности множества M^γ.*

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [1,2].

Глава 3 посвящена исследованию эллиптических операторов, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы.

В п. **3.1.1** проводится исследование таких краевых задач. Пусть M — гладкое компактное подмногообразие с краем ∂M, Γ — дискретная конечно-порожденная группа диффеоморфизмов $\gamma : M \to M$, сохраняющих край $\gamma(\partial M) = \partial M$. Рассмотрим оператор сдвига на M

$$T_\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \qquad T_\gamma u(x) = u(\gamma^{-1}x)$$

и оператор

$$\mathcal{D} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{D}_\gamma \mathcal{T}_\gamma : \mathcal{H}^s(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-m}(M), \tag{25}$$

где $\mathcal{H}^s(M) = H^s(M)\oplus H^s(\partial M)$, $\mathcal{D}_\gamma$ — оператор Буте де Монвеля порядка m на M, $\mathcal{T}_\gamma$ — оператор сдвига.

В п. **3.1.2** определяется внутренний траекторный символ задачи (25). Фиксируем точку $(x,\xi) \in T_0^*M$. Для произвольного элемента $\gamma\in\Gamma$ через $\partial\gamma : T^*M \to T^*M$ обозначим кодифференциал $\partial\gamma = (d\gamma^t)^{-1}$ диффеоморфизма $\gamma : M \to M$. Пусть на многообразии M выбрана риманова метрика, vol_M — риманова форма объема, Δ — оператор Лапласа.

Определим следующие объекты:

- вес $\mu_s : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_+$, определяемый формулой:

$$\mu_s(\gamma) = \left[\frac{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta))^s\right](x,\xi); \tag{26}$$

- весовое пространство ℓ^2 на группе Γ:

$$\ell^2(\Gamma, s) = \left\{\{w(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \,\middle|\, w(\gamma)\in\mathbb{C} \text{ при всех } \gamma\in\Gamma \text{ и } \sum_\gamma |w(\gamma)|^2\mu_s(\gamma) < \infty\right\}.$$

Определение 18. *Внутренний траекторный символ* оператора (25) порядка m в точке $(x,\xi)\in T_0^*M$ определяется как конечно-разностный оператор
$$\sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,\xi):\ell^2(\Gamma,s)\longrightarrow \ell^2(\Gamma,s-m), \tag{27}$$
причем для оператора сдвига мы полагаем $(\sigma_{\rm int}(T_{\gamma_1})w)(\gamma)=w(\gamma\gamma_1)$, а для оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}'\in\Psi_B(M)$ полагаем $(\sigma_{\rm int}(\mathcal{D}')w)(\gamma)=\sigma_{\rm int}(\mathcal{D}')(\partial\gamma^{-1}(x,\xi))w(\gamma)$.

Далее в п. **3.1.3** определяется граничный траекторный символ задачи (25).

Определение 19. *Граничный траекторный символ* оператора (25) порядка m в точке $(x',\xi')\in T_0^*\partial M$ определяется как оператор
$$\sigma_\partial(\mathcal{D})(x',\xi'):\ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^s)\longrightarrow \ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^{s-m}), \tag{28}$$
где $\mathcal{E}^s=H^s_+(x',\xi')\oplus\mathbb{C}$, $H^s_+=\mathcal{F}_{x_n\to\xi_n}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_+))$, причем символ оператора сдвига определяется формулой $(\sigma_\partial(T_{\gamma_1})w)(\gamma)=w(\gamma\gamma_1)$, а символ оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}'$ определяется формулой
$$(\sigma_\partial(\mathcal{D}')(x',\xi')w)(\gamma)=\partial\gamma^{*-1}\sigma_\partial(\mathcal{D}')(\partial\gamma^{-1}(x',\xi'))\partial\gamma^*w(\gamma).$$

В п. **3.1.4** приводится теорема о фредгольмовости краевой задачи (25).

Определение 20. Краевая задача $\mathcal{D}$ (см. (25)) называется *эллиптической*, если выполнены два условия:

1) внутренний символ $\sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,\xi)$ (см. (27)) обратим для любых $(x,\xi)\in T_0^*M$;

2) граничный символ $\sigma_\partial(\mathcal{D})(x',\xi')$ (см. (28)) обратим для любых $(x',\xi')\in T_0^*\partial M$.

Рассмотрим C^*-алгебру $\overline{\Psi(M)}/\mathcal{K}$, где через $\overline{\Psi(M)}\subset\mathcal{B}(L^2(M)\oplus L^2(\partial M))$ обозначено замыкание по операторной норме алгебры $\Psi_B(M)$, а $\mathcal{K}$ — идеал компактных операторов. Через Σ обозначим пространство примитивных идеалов C^*-алгебры символов $\overline{\Psi(M)}/\mathcal{K}$.

Стандартным образом из результатов[26] получается следующая теорема:

Теорема 21. *Пусть группа Γ аменабельна, а её действие на пространстве Σ является топологически свободным. Тогда краевая задача* (25) *фредгольмова тогда и только тогда, когда она эллиптична.*

В **§3.2** применяется аппарат циклических когомологий для получения формулы индекса нелокальных краевых задач.

В п. **3.2.1** напоминаются основные понятия теории циклических когомологий.

В п. **3.2.2** строится топологический индекс краевых задач для неизометрического действия группы. Рассмотрим многообразие $M=\mathbb{R}^n_+$ с координатами (x',x_n) и краем $X=\mathbb{R}^{n-1}$, определяемым уравнением $x_n=0$. Будем рассматривать алгебру $\mathcal{A}$ символов Буте де Монвеля нулевых порядка и типа на M. Здесь элементы алгебры $\mathcal{A}$ — это пары
$$\widetilde{a}=(a,a_X)\in\mathcal{O}(T_0^*M)\oplus\mathcal{O}(T_0^*X,\mathcal{B}(H_+\oplus\mathbb{C})),$$
где a и a_X — внутренний и граничный символы, соответственно, а через $\mathcal{O}$ обозначены пространства символов.

Обозначим через $C^n(\mathcal{A})=\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n+1},\mathbb{C})$ пространство $(n+1)$-линейных функционалов $\varphi(a_0,...,a_n)$, где $a_0,...,a_n\in\mathcal{A}$. Такие функционалы называются *n-коцепями.* Обозначим через $C^{odd}(\mathcal{A}\rtimes_{\rm alg}\Gamma)=\bigoplus\limits_k C^{2k+1}(\mathcal{A}\rtimes_{\rm alg}\Gamma)$ пространство нечетных коцепей и определим пару коцепей $(\varphi_{2n-3},\varphi_{2n-1})\in C^{odd}(\mathcal{A}\rtimes_{\rm alg}\Gamma)$:
$$\varphi_{2n-1}(a_0,\ldots,a_{2n-1})=\int\limits_{S^*M}(a_0da_1\ldots da_{2n-1})(e), \tag{29}$$
$$\varphi_{2n-3}(a_0,\ldots,a_{2n-3})=\int\limits_{S^*X}\mathrm{Tr}'\sum_{j=0}^{2n-3}(-1)^j(a_jd'a_{j+1}\ldots d'a_{j-1})(e), \tag{30}$$
где Tr' — функционал из (13).

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 22. *Пара* $(k\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1})$, *где* $k = 2\pi i(2n-1)/(2n-2)$, *определяет класс в периодических циклических когомологиях* $HP^{odd}(\mathcal{A} \rtimes_{alg} \Gamma)$. *Это означает, что справедливы равенства*

$$B\varphi_{2n-3} = 0; \qquad kb\varphi_{2n-3} + B\varphi_{2n-1} = 0; \qquad b\varphi_{2n-1} = 0,$$

где $B : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n-1}(\mathcal{A})$ *— дифференциал Конна,* $b : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{A})$ *— дифференциал Хохшильда.*

Определим топологический индекс нелокальных краевых задач. Пусть $K_1(\mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma)$ — группа K_1 скрещенного произведения алгебры символов Буте де Монвеля $\mathcal{A}$ и группы Γ. Эллиптический символ $\sigma = \sigma(\mathcal{D}) \in \mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ определяет класс

$$[\sigma] \in K_1(\mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma). \tag{31}$$

Обозначим класс из теоремы 22 через

$$\mathrm{Todd} = [k\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1}] \in HP^{odd}(\mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma), \tag{32}$$

где $k = 2\pi i(2n-1)/(2n-2)$, коцепи $\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n-3}$ определены в формулах (29) и (30).

Спаривание Черна–Конна классов (31) и (32) обозначается через $\langle \mathrm{Todd}, [\cdot] \rangle$ и равно

$$\langle \mathrm{Todd}, [\sigma] \rangle = \frac{(-1)^{n-1}}{2(2\pi i)^{n-1}} \frac{(n-2)!}{(2n-2)!} \varphi_{2n-3}(\sigma^{-1}, \sigma, \ldots) + \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^n} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \varphi_{2n-1}(\sigma^{-1}, \sigma, \ldots). \tag{33}$$

Определение 23. *Топологический индекс* нелокальной эллиптической краевой задачи $\mathcal{D}$ с символом $\sigma = \sigma(\mathcal{D})$ определим как число $\mathrm{ind}_t \mathcal{D} = \langle \mathrm{Todd}, [\sigma(\mathcal{D})] \rangle$.

Из теоремы 22 и свойств спаривания Черна–Конна получаем следствие

Следствие 24. *Пусть* $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0,1]$ *— такое гладкое семейство краевых задач, что существует гладкое семейство обратимых символов* $\sigma(\mathcal{D}_\varepsilon)^{-1} \in \mathcal{A} \rtimes \Gamma$. *Тогда топологический индекс* $\mathrm{ind}_t \mathcal{D}_\varepsilon$ *не зависит от* ε.

Параграф **3.3** посвящен исследованию краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра. В п. **3.3.1** приводится постановка этой задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, на котором группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует скручиваниями перпендикулярно образующей цилиндра $(x, t) \mapsto (x + k\alpha t, t)$, $k \in \mathbb{Z}$. Определим оператор сдвига, отвечающий скручиваниям, формулой

$$(Tu)(x, t) = u(x - \alpha t, t).$$

На конечном цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset Y$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ i^*B \end{pmatrix} : H^s(M) \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}(M) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N). \end{array} \tag{34}$$

Определим операторы в краевой задаче (34). Во-первых,

$$D = D\left(e^{ix}, t, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} D_l \left(e^{ix}, t, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) T^l, \qquad \mathrm{ord} D = m \tag{35}$$

— дифференциальный оператор со сдвигами на цилиндре M, а коэффициенты D_l в нем являются дифференциальными операторами порядка $\leq m$ с гладкими коэффициентами. Во-вторых, оператор $B = (B_0, B_1)$ в задаче (34) представляет собой пару операторов на левом/правом основании цилиндра, причем дифференциальный оператор на левом основании

$$B_0 = B_0\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) \text{ имеет порядок } \mathrm{ord} B_0 = b_0$$

и определяет $N \in \mathbb{N}$ граничных условий, а

$$B_1 = B_1\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} B_{1,l}\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) T^l, \mathrm{ord} B_1 = b_1,$$

— дифференциальный оператор со сдвигами на правом основании, также определяет $N \in \mathbb{N}$ граничных условий.

В п. **3.3.2** и **3.3.3** вычисляется внутренний символ задачи (34):

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x,t,\xi_1,\xi_2) : \ell^2(\mathbb{Z}, s) \quad &\longrightarrow \quad \ell^2(\mathbb{Z}, s-m), \\ \sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x,t,\xi_1,\xi_2) \quad &= \quad D(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}), \end{aligned} \tag{36}$$

В п. **3.3.4** даются условия эллиптичности внутреннего символа.

Предложение 25. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *внутренний символ $\sigma_{int}\left(\mathcal{D}\right)(x,t,\xi_1,\xi_2)$ эллиптичен $\forall (x,t,\xi_1,\xi_2) \in T^*_0 M$;*

2) *семейство дифференциально-разностных операторов*

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}} : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1) \quad \widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\mathcal{F}_{\varphi\to k} = D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t}, t, 1, \xi_2 - i\alpha d/d\varphi, e^{-i\varphi}\right), \tag{37}$$

где $(\widetilde{T}_{\alpha t}u)(\varphi) = u(\varphi - \alpha t)$, обратимо $\forall (x,t) \in M$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$.

В п. **3.3.5** вычисляется граничный символ задачи (34) на левом основании цилиндра. Он равен

$$\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s_+ \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix}, \qquad w(\xi_2) \overset{\sigma^L_\partial(\mathcal{D})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \Pi_+ D(e^{ix}, 0, \xi_1, \xi_2, T_{\alpha\xi_1})w(\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}(B_0(x,\xi_1,\xi_2)w(\xi_2)) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где

- $B_0(x,\xi_1,\xi_2)$ — главный символ оператора B_0 в задаче (34);
- $T\colon H^s_+ \longrightarrow H^s_+$ — оператор сдвига, действующий по формуле $(T_{\alpha\xi_1}w)(\xi_2) = w(\xi_2 + \alpha\xi_1)$;
- пространство $H^s_+ = \mathcal{F}_{t\to\xi_2}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_+))$.

Даются условия эллиптичности граничного символа (38).

Предложение 26. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *граничный символ $\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ на левом основании цилиндра (см. (38)) эллиптичен при любых значениях параметров $(x,\xi_1) \in T^*_0\partial M|_{t=0}$;*

2) *краевая задача*

$$\widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix}, \quad \widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) \\ j^* B_0(e^{ix}, \xi_1, -i\partial_t) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

на $\overline{\mathbb{R}}_+$ с периодическими коэффициентами обратима $\forall (x,\xi_1) \in T^*_0\partial M|_{t=0}$;

3) *(условие Шапиро–Лопатинского) обратим оператор*

$$j^*\left(B_0(e^{ix}, \xi_1, -i\partial_t)\right) : L_+(x,\xi_1) \longrightarrow \mathbb{C}^N, \tag{40}$$

где N — число граничных условий в задаче (34), а через $L_+(x,\xi_1)$ обозначено пространство решений уравнения

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t})u(t) = f(t),$$

стремящихся к нулю при $t \to +\infty$.

В п. **3.3.6** вычисляется граничный символ задачи (34) на правом основании цилиндра:

$$\begin{aligned} \sigma^R_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : \ell^2(\mathbb{Z}, H^s_-) \quad &\longrightarrow \quad \ell^2(\mathbb{Z}, H^{s-m}_- \oplus \mathbb{C}), \\ w(k,\xi_2) \quad &\longmapsto \quad \begin{pmatrix} D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k,\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}\left(B_1(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k,\xi_2)\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $(\mathcal{T}w)(k,\xi_2) = w(k+1, \xi_2 + \alpha\xi_1)$.

Предложение 27. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *граничный символ* $\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ *на правом основании цилиндра (см.* (41)*) эллиптичен при любых значениях параметров* $x \in \mathbb{S}^1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$*;*

2) *оператор*

$$\overline{\sigma}_\partial^R(\mathcal{D}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-, L^2(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-, L^2(\mathbb{S}^1)) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^N) \end{array}, \overline{\sigma}_\partial^R(\mathcal{D})u(\tau,\psi) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(\tau,\psi) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(0,\psi) \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\tau,\psi) = u(\tau,\psi-\alpha)$, *обратим при любых* $x \in \mathbb{S}^1$*;*

Если операторы D_l *в формуле* (35) *имеют постоянные по* x *коэффициенты при* $t = 1$, *то условия 1) и 2) эквивалентны условию:*

3) *(условие Шапиро–Лопатинского) обратимо семейство краевых задач для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на полупрямой:*

$$\begin{pmatrix} D(1,1,-i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \\ j^*B_1(1,-i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \end{pmatrix} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{array} \tag{42}$$

с параметром $\psi \in [0, 2\pi]$.

Из предложений 25, 26 и 27 получаем условие эллиптичности задачи (34), которое является основным результатом параграфа.

Теорема 28. *Краевая задача* (34) *эллиптична тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

1) *внутренний символ оператора* $\mathcal{D}$ *эллиптичен;*
2) *выполнено условие Шапиро–Лопатинского на левом основании цилиндра* M*;*
3) *выполнено условие Шапиро–Лопатинского на правом основании цилиндра* M.

Следствие 29. *Пусть* α *несоизмеримо с* π. *Если краевая задача* (34) *эллиптична (т.е. выполнены условия теоремы 28), то она фредгольмова.*

В заключительном пункте **3.3.7** рассмотрен пример краевой задачи со скручиваниями цилиндра:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (1 + \varepsilon(T + T^*))\partial_x^2 u = f(x,t), \\ \quad u|_{t=0} = g_0(x), \quad u|_{t=1} = g_1(x), \end{cases} \tag{43}$$

где $u \in H^s(M)$, $f \in H^{s-2}(M)$, $g_0, g_1 \in H^s(\mathbb{S}^1)$, $(Tu)(x,t) = u(x - \alpha t, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t) \in C^\infty([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Мы показываем, что обратимость внутреннего символа задачи (43) эквивалентна обратимости оператора Матьё

$$\alpha^{-2}\widetilde{\sigma}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos\varphi\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-2}(\mathbb{R}), \tag{44}$$

а граничному символу $\sigma_\partial^L(\mathcal{D})(\xi_1)$ на левом основании соответствует краевая задача (40):

$$\begin{cases} -u''(t) + \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{2\varepsilon_0}{\alpha^2}\cos t\right) u(t) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_+), \\ u(0) = h_1, \end{cases} \quad \text{где } \varepsilon_0 = \varepsilon(0). \tag{45}$$

Дифференциальный оператор в полученной краевой задаче является оператором Матьё, аналогичным оператору (44). Условие эллиптичности состоит в однозначной разрешимости задачи (45). Обратимость граничного символа задачи (43) на правом основании цилиндра эквивалентна однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} -u''(\tau) + \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{2\varepsilon_1}{\alpha^2}\cos\psi\right) u(\tau) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-), \\ u(0) = h_1, \end{cases} \quad \text{где } \varepsilon_1 = \varepsilon(1). \tag{46}$$

Теорема 30. *Задача* (43) *эллиптична, когда выполнены следующие условия: оператор Матьё* (44) *обратим и выполнено условие* $|\varepsilon(1)| < 1/2$.

Области значений параметров (α, ε), для которых оператор Матьё обратим, могут быть найдены численными методами.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работах [3–5] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получена формула индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста. Эти результаты являются новыми даже в случае конечной группы.

2. Рассмотрено приложение полученной формулы индекса к скрученным краевым задачам. В частности, вычислен индекс скрученной краевой задачи для оператора Эйлера.

3. Определен топологический индекс краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы на многообразии с краем. В определении используются циклические когомологии.

4. Для краевых задач со скручиваниями конечного цилиндра получены условия эллиптичности в явном виде. Рассмотрен случай, когда эти условия эквивалентны однозначной разрешимости уравнения Матьё.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Савину А.Ю. за постановку задачи, поддержку, помощь и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Elliptic boundary value problems associated with isometric group actions // *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* — 2021. — Vol. 12, no. 50. — 1–34.
2. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Index of twisted elliptic boundary value problems associated with isometric group actions // *Lobach. J. of Math.* — 2022. — Vol. 43, no. 10. — 2635–2646.
3. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Periodic Cyclic Cocycles on the Boutet de Monvel Symbol Algebra // *Russ. J. Math. Phys.* — 2022. — Vol. 29. no. 4. — 417–425.
4. Boltachev, A. V., Savin A. Yu. Trajectory Symbols and the Fredholm Property of Boundary Value Problems for Differential Operators with Shifts // *Russ. J. Math. Phys.* — 2023. — Vol. 30, no. 2. — 135–151.
5. Болтачев А. В. Об эллиптичности операторов со скручиваниями // *СМФН* — 2023. — Vol. 69, no. 4. — 565–577.

Тезисы конференций

1. Болтачев А. В., Савин А. Ю. “О проблеме индекса нелокальных эллиптических краевых задач,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ- 2021*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021, ISBN 978-5-6046943-4-3.
2. Boltachev A. V. “On index of elliptic boundary-value problems associated with isometric group actions,” *Девятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 28 июня – 5 июля 2022 г. = The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, Russia, June 28 – July 5, 2022 : тезисы докладов*, Москва: РУДН, 2022, ISBN 978-5-209-11108-5.
3. Boltachev A. V., Savin A. Yu. “Index of twisted elliptic boundary value problems associated with isometric group actions,” *Материалы международной научной конференции “Уфимская осенняя математическая школа”*, Уфа: РИЦ БашГУ, 2022, ISBN 978-5-7477-5533-8.
4. Болтачев А. В., Савин А. Ю. “Периодические циклические коциклы в алгебре псевдодифференциальных краевых задач,” *Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023, ISBN 978-5-9273-3692-0.
5. Болтачев А. В., Савин А. Ю. “Периодические циклические коциклы в алгебре символов Буте де Монвеля,” *Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023, ISBN 978-5-9273-3692-0.
6. Boltachev A. V. “On Ellipticity of Operators with Shear Mappings,” *Студенческая математической конференции “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование” : тезисы докладов. Россия, Москва, 15–17 мая 2024 г. = The Student Conference “Differential Equations and Mathematical Modeling”*, Москва: РУДН, 2024, ISBN 978-5-209-11810-7.

Андрей Владимирович Болтачев

Об индексе нелокальных эллиптических уравнений, ассоциированных с диффеоморфизмами многообразий с краем

В диссертационной работе проводится исследование краевых задач со сдвигами на гладких многообразиях с краем и получены соответствующие формулы индекса. Получена формула индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста. Эти результаты являются новыми даже в случае конечной группы. В качестве приложения получена формула индекса скрученных краевых задач. В частности, вычислен индекс скрученного оператора Эйлера. Определен топологический индекс краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы на многообразии с краем. В определении топологического индекса используется аппарат циклических когомологий. Для краевых задач со скручиваниями конечного цилиндра получены условия эллиптичности в явном виде.

Andrei Vladimirovich Boltachev

On index of nonlocal elliptic equations associated with diffeomorphisms of manifolds with boundary

The thesis is devoted to the study of boundary value problems with shifts on smooth manifolds with boundary and the corresponding index formulas are obtained. The index formula of boundary value problems associated with isometric action of the discrete group of polynomial growth is obtained. These results are new even in the case of finite group. As an application the index formula for twisted boundary value problems is obtained. In particular, the index of twisted Euler operator is obtained. We define the topological index of boundary value problems associated with nonisometric action of discrete group on the manifold with boundary. We define the topological index using the apparatus of cyclic cohomology. We give the explicit ellipticity conditions for the boundary value problems with shear mappings of the finite cylinder.