На правах рукописи

Адхамова Амина Шухратовна

Краевые задачи для систем дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2024

Работа выполнена в Математическом институте им. С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы".

Научный руководитель: Скубачевский Александр Леонидович, д.ф.-м.н.,
профессор и научный руководитель Математического
института имени С.М. Никольского
Российского университета дружбы народов
имени Патриса Лумумбы

Официальные оппоненты: Матвеева Инесса Изотовна, д.ф.-м.н.
профессор кафедры дифференциальных уравнений
Механико-математического факультета
Новосибирского государственного университета

Бутерин Сергей Александрович, к.ф.-м.н.
доцент кафедры математической физики
и вычислительной математики
Саратовского национального исследовательского
государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Защита состоится 17 декабря 2024 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д.3.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на официальном сайте ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» по адресу:
http://www.rudn.ru/science/dissovet.

Автореферат разослан «   » ноября 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Савин Антон Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Данная диссертация посвящена изучению систем дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами запаздывающего и нейтрального типов, связанных с задачей Н.Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием.

Современная теория функционально-дифференциальных уравнений началась с работ А. Д. Мышкиса [1], в дальнейшем развивалась многими математиками, такими как Л. Э. Эльсгольц [2], Н. Н. Красовский [3], Ю.С. Осипов [4], Г. А. Каменский [5], Р. Беллман и К. Кук [6], Дж. Хейл [7], и др. Теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, методы которой существенно используются в настоящей диссертации, посвящен целый ряд работ, среди которых широко известны работы Ф. Хартмана и Г. Стампакья [8], А. Б. Антоневича [9], В. С. Рабиновича [10] и др. Интерес к этим уравнениям связан прежде всего с многими важными приложениями: к теории упругости [11,12,13], к теории многомерных диффузионных процессов [14], в современной нелинейной оптике при построении оптических систем с вращением поля в контуре обратной связи [15,16], а также в связи с нелокальными краевыми задачами [17].

Общая теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений построена в работах А. Л. Скубачевского. В его работах впервые изучались эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сдвигами по пространствен-

[1]Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМН,* 1949. — 4, № 5 (33). — С.99–141.

[2]Эльсгольц Л. Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, 1954.— *9*, № 4 (62). — С.95–112.

[3]Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, *Докл. АН СССР*, 1957.— 114, № 2. — С.252–255.

[4]Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием, *Дифференциальные уравнения*, 1965. — 1, № 5. — С.605–618.

[5]Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, *Дифференц. уравнения*, 1974. — 10, № 3. — С.409–418.

[6]Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

[7]Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[8]Hartman F., Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential-functional equations, *Acta Math.*, 1966.— 115. —P.271–310.

[9]Антоневич А. Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе, *Дифференц. уравн.*, 1972. — 8, № 2. — С.309–317.

[10]Рабинович В. С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве, *Докл. АН СССР*, 1978.— 243, № 5. — С.1134–1137.

[11]Onanov G. G., Tsvetkov E. L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory, *Russian J. Math. Phys.*, 1995. — 3, № 4. —P.491–500.

[12]Skubachevskii A. L. *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

[13]Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017.— 12. — P.192–207.

[14]Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов, *Докл. АН СССР*, 1989. — 307, № 2. — С.287–292.

[15]Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics, *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, 1998. — 32, № 2. — P.261–278.

[16]Варфоломеев Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2007. — 21. — С.5–36.

[17]Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Докл. АН СССР*, 1969. — 185, № 4. — С.739–740.

ным переменным в ограниченных областях [18,19,20,21,22,23,24]. В дальнейшем исследование теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений продолжалось в работах его учеников, например, изучалась спектральная асимптотика, операторы с вырождением, вторая и третья краевые задачи, краевые задачи для уравнений с несоизмеримыми сдвигами, вопросы гладкости обобщенных решений [25,26, 27, 28,29,30,31,32]

Широко известно, что обратная связь в системе управления может приводить к задержке сигнала [см. Рис.1].

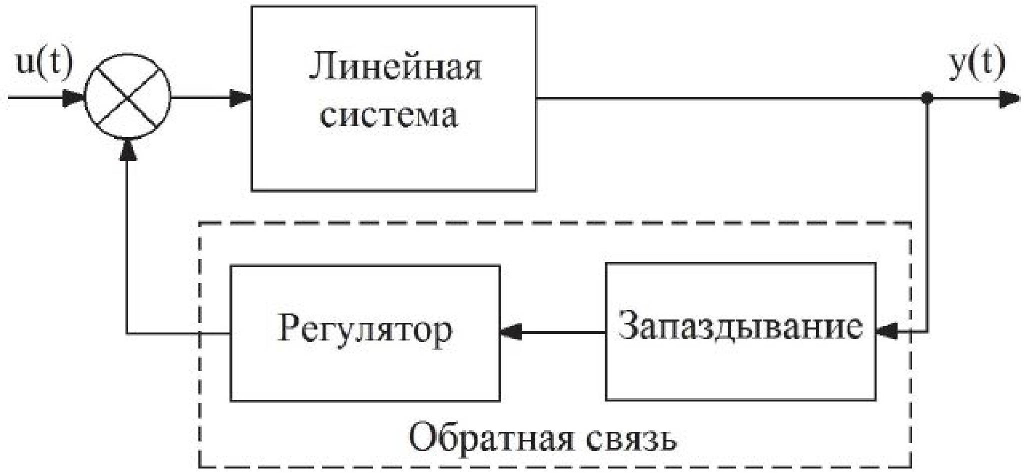

Рис. 1

Впервые задача об успокоении системы управления с последействием рассматривалась Н. Н. Красовским [33]. Поведение системы управления описывалось системой линейных

[18]Скубачевский А. Л. О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах, *Дифференц. уравн.*, 1982.— 18, № 9. —С.1590–1599.

[19]Скубачевский А. Л. Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением, *Дифференц. уравн.*, 1983. — 19, № 1. — С.457–470.

[20]Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1983. — 34, № 1.— С.105–112.

[21]Скубачевский А. Л. Нелокальные краевые задачи со сдвигом, *Матем. заметки*, 1985. — 38, № 4. — С.587–598.

[22]Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы, *Матем. сб.*, 1986. — 129(171), № 2. — С.279–302.

[23]Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations, *J. Differential Equations*, 1986. — 63, № 3. — P.332–361.

[24]Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения, *УМН*, 2016. — 71:5, № 431. — С.3–112.

[25]Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л. Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов, *Дифференц. уравн.*, 1999. — 35, № 6. — С.793–800.

[26]Попов В. А., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2011. — 39. — С.130–140.

[27]Цветков Е. Л. Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матем. заметки*, 1992. — 51, № 6. — С.599–603.

[28]Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Тр. Санкт-Петербург. мат. об-ва.*, 1998. — 5. — С.223–288.

[29]Иванова Е. П. О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2016. — 62. — С.85–99.

[30]Неверова Д. А. Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей, *Соврем. мат. Фундам. направл.*, 2020. — 66, № 2. — С.272–291.

[31]Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2019. — 65, № 4. — С.635–654.

[32]Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2021. — 500. — С.74–77.

[33]Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [34,35] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [36]. Системы управления с последействием запаздывающего типа изучались в [37]. Отметим также работы, посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием [38], исследование для случая запаздывания, пропорционального времени (уравнение пантографа) – Л.Е. Россовским [39], а также исследование системы управления произвольного порядка с глобальным последействием на графе - С. А. Бутериным [40].

Цели и задачи работы. Цель работы заключается в следующем: 1) для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального и запаздывающего типов установить связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка; 2) изучить разрешимость соответствующей краевой задачи для систем дифференциально-разностных уравнений; 3) исследовать гладкость обобщенных решений рассматриваемой краевой задачи на подынтервалах и на всем интервале

Научная новизна. В работе получены новые результаты об обобщенных решениях краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального и запаздывающего типов, полученных из вариационных задач.

Впервые были доказаны однозначная разрешимость и исследована гладкость обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами нейтрального и запаздывающего типов. Доказано, что гладкость обобщенных решений для системы уравнений нейтрального типа сохраняется на подынтервалах и может нарушаться на всем интервале. Получены достаточные условия сохранения гладкости обобщенных решений на всем интервале.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в общей теории нелокальных краевых задач и в теории управления систем с последействием, а также для анализа результатов численного моделирования решений подобных задач.

Результаты работы включены в исследования по гранту РФФИ Аспиранты № 20-31-90119 «Многомерные системы управления с последействием».

Методология и методы исследования. Изучение вариационных и краевых задач для дифференциально-разностных уравнений основано на комбинации методов исследования эллиптических дифференциальных уравнений, свойствах разностных операторов и теории пространств Соболева. В части результатов, связанных прежде всего с разрешимостью, используется вариационный подход, суть которого заключается в получении оценок коэрцитивности соответствующих билинейных форм.

Основные положения, выносимые на защиту:

[34] Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием, *Доклады РАН.*, 1994. — 335, № 2. — С.157–160.

[35] Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

[36] Леонов Д. Д. К задаче об успокоении системы управления с последействием, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2010. — 37. — С.28–37.

[37] Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием, *Дифференциальные уравнения*, 1965. — 1, № 5. — С.605–618.

[38] Banks H. T., Kent G. A. Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space, *SIAM J. Control*, 1972. — 10, № 4. — С.567–593.

[39] Россовский Л. Е. Задача об успокоении системы с запаздыванием, линейно зависящим от времени, *Проблемы современной математики и приложения к задачам физики и механики. — М.: Изд-во МФТИ*, 1995. —С.172–182.

[40] Бутерин С. А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последействием на графе, *Матем. заметки*, 2024. — 115, № 6. — С.825–848.

1. Установлена связь между вариационными задачами, соответствующими задаче Н.Н. Красовского об успокоении нестационарной системы управления с последействием в случаях нейтрального и запаздывающего типов, и краевыми задачами для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

2. Единым методом доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для соответствующих систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка нейтрального и запаздывающего типов. Получены априорные оценки решений в пространствах Соболева.

3. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений на подынтервалах для системы уравнений нейтрального типа. Получены достаточные условия сохранения гладкости на всем интервале.

4. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений для системы уравнений запаздывающего типа на всем интервале.

5. Для системы управления с последействием с различным числом входов и выходов построено фридрихсово расширение оператора, соответствующего краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Апробация результатов. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством Н. А. Раутиан; на семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством И. С. Ломова; на Коломенском научном семинаре под руководством В. П. Лексина; в Российском университете дружбы народов на семинаре под руководством А. Л. Скубачевского; на 19-ой Международной конференции Distributed Computer and Communicational Networks: Control, Computation, Communication (Москва, 2016); на 8-ой и 9-й Международных конференциях по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2017, 2022); на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019); на 30-й, 31-й и 32-й Крымских Осенних Математических Школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2019, 2020, 2021); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2019); на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2020), на Международной конференции «Frontier in mathematics and computer science» (Ташкент, 2020); на Международных научных конференциях «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2022, 2023); на Международной конференции «Nonlocal and Nonlinear Problems» (Москва, 2023) и на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2024).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 20 печатных изданиях, 7 из которых изданы в научных журналах, индексируемых в международных базах данных, 13 — в тезисах докладов международных и всероссийских конференций. Их список приведён в конце автореферата. Все результаты диссертации, содержащиеся в совместных работах, принадлежат лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 100 страниц с 1 рисунком.

Список литературы содержит 82 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, смежных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Глава 1 состоит из трех параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений с постоянными матричными коэффициентами.

Параграф 1.1 содержит постановку задачи. А именно, рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t, \tag{1}$$

где $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$ – неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T$ – вектор-функция управления, A_m, B_m – матрицы порядка $n \times n$ с постоянными элементами, A_0 – невырожденная матрица, запаздывание $\tau > 0$ – константа, $M \in \mathbb{N}$.

Предыстория системы описывается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \ t \in [-M\tau, 0], \tag{2}$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^T$ – заданная вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1) с начальным условием (2) в положение равновесия. Для этого будем искать такое управление $u(t), \ \ 0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \ t \in [T - M\tau, T], \tag{3}$$

где $T > (M+1)\tau, \ T - M\tau = (N+\theta)\tau, \ N \in \mathbb{N}, \ 0 < \theta \leqslant 1$.

Управление, обеспечивающее выполнение (1) - (3), не единственно. Среди всех возможных управлений, будем искать управление, доставляющее минимум функционалу

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма. Используя (1), получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) = \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m y(t-m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{4}$$

с краевыми условиями (2) - (3).

В **параграфе 1.2** были введены обозначения для различных вещественных функциональных пространств. Доказана **Теорема 1.1** о связи между вариационной и соответствующей краевой задачами.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N},$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0 \leqslant i \leqslant k} \ \sup_{t \in \mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0, \dots, k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b),$$

$$W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b),$$

$$\mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a,b)$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i, w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i, w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)^T,\ w = (w_1, \dots, w_n)^T$.

Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Показано, что вариационная задача (4), (2), (3) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка:

$$\begin{gathered} -\Big(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T A_m y'(t + (l-m)\tau)\Big)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} [B_l^T A_m y'(t + (l-m)\tau) - A_l^T B_m y'(t + (l-m)\tau) + \\ + B_l^T B_m y(t + (l-m)\tau)] = 0,\ t \in (0, T - M\tau) \end{gathered} \tag{5}$$

с краевыми условиями (2) - (3) при выполнении следующего условия:

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T A_m y'(t + (l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{6}$$

Определение 1.1. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется обобщенным решением задачи (5), (2), (3), если выполняется условие (6), и вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет системе уравнений (5) п.в. на $(0, T - M\tau)$, а также краевым условиям (2), (3).*

Теорема 1.1. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ доставляет минимум функционалу (4) с краевыми условиями (2), (3) тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (5), (2), (3).*

Параграф 1.3 посвящен разрешимости полученной краевой задачи. Получена априорная оценка обобщенного решения и доказана **Теорема 1.2** об однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 1.2. *Пусть $detA_0 \neq 0$. Тогда для каждого $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ существует единственное обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ краевой задачи (5), (2), (3), и*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{7}$$

где $c > 0$ не зависит φ.

Основные результаты первой главы опубликованы в работе [1] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 2** исследуется задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, которая имеет единственное обобщенное решение. Доказано, что гладкость этого решения может нарушаться на рассматриваемом интервале и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Получены достаточные условия на начальную функцию, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{8}$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\ldots,n}$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\ldots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{9}$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Мы рассматриваем задачу о приведении системы (8) с начальным условием (9) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{10}$$

где $T > (M + 1)\tau$, $M, N \in \mathbb{N}, T - M\tau = (N + \theta)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| \sum_{m=0}^M A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t)y(t-m\tau) \right|^2 dt \to min. \tag{11}$$

Показывается, что вариационная задача (9)–(11) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} -(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))' + \\ + \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) - \\ -(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))' + \\ + \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) = 0, \ t \in (0, T-M\tau) \end{aligned} \tag{12}$$

с краевыми условиями (9), (10) при выполнении следующего условия:

$$\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \tag{13}$$

Было сформулировано определение обобщенного решения полученной краевой задачи и установлена взаимосвязь между вариационной и краевой задачами.

Определение 2.2. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется обобщенным решением задачи* (12), (9), (10), *если выполняется условие* (13), *$y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений* (12), *а также краевым условиям* (9), (10).

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Функционал* (11) *с краевыми условиями* (9), (10) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (12), (9), (10).

Далее была получена априорная оценка обобщенного решения и доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 2.2. *Пусть $det A_0(t) \neq 0, \ t \in \mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ существует единственное обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ краевой задачи* (12), (9), (10), *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{14}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Параграф 2.2 посвящен свойствам разностных операторов в пространстве $L_2(a, b)$ и в пространствах Соболева.

Параграф 2.3 посвящен исследованию гладкости обобщенного решения на подынтервалах. Для однозначной разрешимости краевой задачи было достаточно, чтобы матрица коэффициентов при столбце производных без запаздывания была невырожденной в каждой точке. Накладывать ограничения на поведение остальных коэффициентов (непрерывно дифференцируемых матриц) не нужно. Этого же условия достаточно для того, чтобы обобщенное решение обладало соответствующей гладкостью на подынтервалах, полученных выбрасыванием орбит концов интервала под действием группы сдвигов:

Теорема 2.3. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда обобщенное решение задачи* (12), (9), (10) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала* $(0, d)$:

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \ldots, N+1)$, *если* $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau)$ $(j = 1, \ldots, N+1)$ *и* $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \ldots, N)$, *если* $\theta < 1$.

Было доказано, что при выполнении некоторых условий на матрицы $A_l(t)$ и предположения, что $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$, обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ задачи (12), (9), (10) принадлежит пространству $W_2^{2,n}(0, T-M\tau)$ тогда и только тогда, когда $(\varphi, \psi_j)_{W_2^{2,m}(-M\tau,0)} = 0,\ j = 1, \ldots, p$, где $\psi_j \in W_2^{2,m}(-M\tau, 0),\ j = 1, \ldots, p$, - линейно независимые функции, где $p \leqslant 2m$.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [2,3,5,6] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 3** исследуется разрешимость краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа. **Параграф 3.1** содержит постановку задачи.

Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T, \tag{15}$$

где $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))^T$ - вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t),\ ...,u_n(t))^T$ - вектор-функция управления, $A_0(t)$ - невырожденная матрица порядка $n \times n$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\ldots n}$ — матрица порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^0(t),\ b_{ij}^m(t)$, соответственно, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание, $T > (M+1)\tau$.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t) = \varphi(t) \textit{ для почти всех } t \in [-M\tau, 0], \tag{16}$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))^T$ – заданная вектор-функция, $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$.

Поскольку функция $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ определена п.в. на отрезке $[-M\tau, 0]$, мы зададим дополнительно начальное условие

$$y(0+0) = \varphi_0, \tag{17}$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ - некоторый вектор.

Рассмотривается задача о приведении системы (15) с начальными условиями (16), (17) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t),\ 0 < t < T$, что

$$y(t) = 0,\ t \in [T - M\tau, T], \tag{18}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений мы будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{19}$$

с краевыми условиями (16) – (18).

В **параграфе 3.2** установлена связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Было показано, что вариационная задача (16)–(19) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка:

$$-[A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + A_0^T(t)\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)]' + \tag{20}$$

$$+\sum_{l=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau) +$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau) = 0, \ t \in (0, T-M\tau)$$

с краевыми условиями (16)–(18) при выполнении следующего условия:

$$A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} A_0^T(t)B_m(t)y(t-m\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \tag{21}$$

Было сформулировано понятие обобщенного решения краевой задачи (20), (16)–(18) и доказана теорема о связи вариационной и краевой задач.

Определение 3.3. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ называется обобщенным решением задачи (20), (16)-(18), если выполняется условие (21), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (20), а также краевым условиям (16) - (18).*

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. Функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ доставляет минимум функционалу (19) с краевыми условиями (16) - (18) тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (20), (16) - (18).*

Параграф 3.3 посвящен доказательству теоремы об однозначной разрешимости краевой задачи (20), (16)–(18).

Теорема 3.2. *Пусть $det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ и любого $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное обобщенное решение краевой задачи (20), (16)-(18) $y \in W_2^{1,n}(0,T)$, при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(0,T)} \leqslant c(||\varphi||_{L_2^n(-M\tau,0)} + |\varphi_0|). \tag{22}$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от φ и φ_0.

В **параграфе 3.4** была доказана гладкость обобщенных решений на всем интервале:

Теорема 3.3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$, *и пусть* $\varphi(0) = \varphi_0$. *Тогда обобщенное решение задачи* (20), (16)-(18) $y \in W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе [4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 4** исследуется разрешимость краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа для различной размерности вектор-функций управления и состояния системы. Доказана теорема о разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Построено фридрихсово расширение. **Параграф 4.1** содержит постановку задачи.

Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{23}$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), \dots, y_k(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_m(t),\ B_m(t) = \{a_{ij}^k(t)\}$, $\{b_{ij}^k(t)\},\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ — матрицы порядка $n \times k$ с элементами $a_{ij}^m(t),\ b_{ij}^m(t)$ которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{24}$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассматривается задача о приведении системы (23) с начальным условием (24) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{25}$$

где $T > (M + 1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (23) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) \right|^2 dt \to \min. \tag{26}$$

В **параграфе 4.2** исследуется связь между вариационной и краевой задачами.

Рассматривается случай $n > k$.

Было показано, что вариационная задача (26), (24), (25) эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка

$$
\begin{gathered}
-\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)' + \\
+\sum_{l,m=0}^{M}\{B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) - \\
-\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' + \\
+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\} = 0,\ t\in(0,T-M\tau)
\end{gathered}
\tag{27}
$$

с краевыми условиями (24), (25) при выполнении следующего условия:

$$
\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) \in W_2^{1,n}(0,T-M\tau). \tag{28}
$$

Сформулировано понятие обобщенного решения краевой задачи (27), (24), (25).

Определение 4.4. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ называется обобщенным решением задачи* (27), (24), (25), *если выполняется условие* (28), *$y(t)$ почти всюду на $(0,T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений* (27), *а также краевым условиям* (24), (25).

Доказана теорема о связи вариационной и краевой задач.

Теорема 4.1. *Пусть $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau,0)$. Функционал* (26) *с краевыми условиями* (24), (25) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи*
(27), (24), (25).

Параграф 4.3 посвящен доказательству однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 4.2. *Пусть существует минор k-ого порядка матрицы $A_0(t)$, который не равен 0 при $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{1,k}(-M\tau,0)$ существует единственное обобщенное решение краевой задачи* (27), (24), (25) *$y \in W_2^{1,k}(-M\tau,T)$, при этом*

$$
||y||_{W_2^{1,k}(-M\tau,T)} \leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,k}(-M\tau,0)}, \tag{29}
$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Идея доказательства теоремы 4.2 сводится по существу к сведению однородной системы дифференциально-разностных уравнений (27) с неоднородными краевыми условиями (24) и однородными условиями (25) к неоднородной системе дифференциально-разностных уравнений с однородными краевыми условиями. Таким образом, возникает вопрос о построении соответствующего неограниченного оператора, действующего в пространстве $\widetilde{L}$ и изучении его свойств.

Пусть $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ — неограниченный оператор, заданный по формуле:

$$\begin{gathered}(\mathcal{A}_R y)(t) := -\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} \{B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) - \\ - \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\},\ t \in (0, T-M\tau),\end{gathered} \tag{30}$$

при $y \in D(\mathcal{A}_R)$, где

$$D(\mathcal{A}_R) = \big\{y \in \widetilde{W} : \sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)\times$$

$$\times y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,k}(0, T-M\tau)\big\}.$$

Обозначим через A_R сужение оператора $\mathcal{A}_R$ на $\dot{C}^{\infty,k}(0, T-M\tau)$, т. е. $A_R : \widetilde{L} \supset D(A_R) \to \widetilde{L}$ есть неограниченный оператор, заданный следующим образом: $A_R y = \mathcal{A}_R y$ при $y \in D(A_R) := \dot{C}^{\infty,k}(0, T-M\tau)$.

Доказана теорема о самосопряженном фридрихсовом расширении:

Теорема 4.3. *Оператор $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ является самосопряженным фридрихсовым расширением оператора A_R с нижней гранью $c_{A_R} > 0$.*

Основные результаты четвертой главы опубликованы в работе [7] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Исследованы краевые задачи, описываемые системой дифференциально-разностных уравнений с неоднороными краевыми условиями, рассматриваемые на заданном интервале;

2. Исследованы свойства вспомогательных разностных операторов;

3. Показана связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

4. Изучена разрешимость и гладкость обобщенных решений таких задач на подынтервалах и целом интервале;

5. Для оператора, описывающего вырождающийся тип, было построено фридрихсово расширение.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Скубачевскому А.Л. за постановку задачи, поддержку, помощь и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L. Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays // *Distributed Computer and Communication Networks, Switzerland* — 2016. — no. 678. — 612–623.
2. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием // *Современная математика. Фундаментальные направления* — 2019. — Vol. 65, no. 4. — 547–556.
3. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа // *Доклады академии наук* — 2020. — Vol. 490, no. 1. — 81–84.
4. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа // *Дифференциальные уравнения* — 2022. — Vol. 58, no. 6. — 747–755.
5. Адхамова А. Ш. Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием // *Современная математика. Фундаментальные направления* — 2022. — Vol. 68, no. 1. — 14–24.
6. Адхамова А. Ш. Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием нейтрального типа на всем интервале // *Современная математика. Фундаментальные направления* — 2023. — Vol. 69, no. 1. — 14–27.
7. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Задача об успокоении системы управления с последействием с различным числом входов и выходов // *Современная математика. Фундаментальные направления* — 2024. — Vol. 70, no. 2. — 189–200.

Тезисы конференций

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. “О задаче об успокоении системы управления с последействием,” *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016). Материалы Девятнадцатой международной научной конференции*, Российский университет дружбы народов (РУДН), 2016, стр. 41-44.
2. Adkhamova A.S. “On some problem for control system with delays,” *Материалы восьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям*, Российский университет дружбы народов (РУДН), 2017, стр. 5.
3. Адхамова А. Ш. “Исследование проблемы успокоения нестационарной системы управления с последействиями,” *Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева*, Москва, РУДН, 2018, стр. 137.
4. Адхамова А. Ш. “О системе управления с последействиями,” *Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» [Электронный ресурс]*, М.: МАКС Пресс, 2019.
5. Адхамова А. Ш. “Задача об успокоении нестационарной многомерной системы управления с последействиями,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2019, стр. 179-181.
6. Адхамова А. Ш. “О задаче об успокоении нестационарной многомерной системы управления с последействими,” *СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXI.*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020. стр. 29-30.

7. Адхамова А. Ш. “Гладкость обобщенного решения краевой задачи системы управления с последействием,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2019, стр. 142-143.
8. Adkhamova A.Sh. “Smoothness of generalized solution of boundary value problem for control system with delay,” *FRONTIER IN MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE Abstracts of the International Online Conference*, Tashkent, 2020.
9. Адхамова А. Ш. “О гладкости обобщенного решения задачи Красовского об успокоении системы управления с последействием,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2019, стр. 68-69.
10. Адхамова А. Ш. “О задаче Красовского об успокоении нестационарной многомерной системы управления с последействием запаздывающего типа,” *Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXIII*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2022,. стр. 36-38.
11. Adkhamova A.Sh. “Krasovskii damping problem for a multidimensional control system of retarded type,” *Девятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 28 июня – 5 июля 2022 г. = The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, Russia, June 28 – July 5, 2022 : тезисы докладов*, Москва: РУДН, 2022, стр. 5.
12. Адхамова А. Ш. “Задача Красовского об успокоении многомерной нестационарной системы управления с последействием запаздывающего типа,” *Материалы международной научной конференции “Уфимская осенняя математическая школа”*, Уфа, РИЦ БашГУ. 2022, стр. 112.
13. Adkhamova A.Sh. “On the damping problem for a multidimensional control system of retarded type,” *International Conference «Nonlocal and Nonlinear Problems». Abstracts.*, Moscow Peoples’ Friendship University of Russia Named After Patrice Lumumba, 2023, стр. 5.

А. Ш. Адхамова

Краевые задачи для систем дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами

Аннотация

В диссертации рассматриваются краевые задачи для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального и запаздывающего типов. Установлена связь между вариационными задачами, соответствующими задаче Н.Н. Красовского об успокоении нестационарной системы управления с последействием в случаях нейтрального и запаздывающего типов, и краевыми задачами для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Были доказаны однозначная разрешимость и исследована гладкость обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами нейтрального и запаздывающего типов. Доказано, что гладкость обобщенных решений для системы уравнений нейтрального типа сохраняется на подынтервалах и может нарушаться на всем интервале. Получены достаточные условия сохранения гладкости обобщенных решений на всем интервале.

A. Sh. Adkhamova

Boundary value problems for systems of differential-difference equations with variable coefficients

Abstract

We consider boundary value problems for systems of differential-difference equations of neutral and retarded types. A connection between the variational problem corresponding to the Krasovskii problem of calming a system with delay of neutral and retarded types and the boundary value problem for a system of second-order differential equations with variable coefficients has been established. Unique solvability was proved and smoothness of generalized solutions of boundary value problems for systems of differential-difference equations with variable coefficients of neutral and retarded types was investigated. Unique solvability was proved and smoothness of generalized solutions of boundary value problems for systems of differential-difference equations with variable coefficients of neutral and retarded types was investigated. It was proved that smoothness of generalized solutions for a system of equations of neutral type is preserved on subintervals and can be violated on the entire interval. Sufficient conditions for preservation of smoothness of generalized solutions on the entire interval were obtained.