

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе А.В. Болтачева
«Об индексе нелокальных эллиптических уравнений,
ассоциированных с диффеоморфизмами многообразий с краем»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы диссертации

Теория индекса берет свое начало с теоремы Атьи-Зингера об индексе эллиптических операторов на гладком замкнутом многообразии, доказанной в 1963 году и являющейся одним из крупнейших достижений математики XX-го века. Впоследствии результаты и методы теории индекса были распространены на разнообразные классы многообразий, наделенных дополнительными структурами, а также на более общие геометрические объекты. Развитие теории индекса тесно связано с появлением и становлением K -теории операторных алгебр и некоммутативной геометрии.

Одним из направлений теории индекса, активно развивающимся в недавнее время, является теория индекса нелокальных эллиптических операторов со сдвигами аргументов на гладких многообразиях. Обычно сдвиги задаются некоторой группой диффеоморфизмов многообразия, дискретной или непрерывной (группой Ли). Исследование теории индекса нелокальных операторов было начато А.Б. Антоневичем в случае конечных групп и продолжено для бесконечных групп в работах А. Кона, В. Е. Назайкинского, А. Ю. Савина, Б. Ю. Стернина, Э. Шрое и др. В настоящее время достаточно хорошо разработана теория индекса нелокальных операторов на гладких замкнутых многообразиях.

Данная работа посвящена значительно менее исследованной теории индекса нелокальных эллиптических краевых задач на гладких многообразиях с краем. При изучении нелокальных краевых задач выделяют задачи двух типов в зависимости от того, сохраняется ли край многообразия при действии группы или нет. В работе рассматривается случай, когда действие группы сохраняет край многообразия. Основной упор делается на вывод явных (когомологических) формул индекса.

Краткая характеристика содержания диссертации

Результаты представлены в диссертации следующим образом. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 125 страниц.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели научных исследований, аргументирована их научная новизна, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе собраны некоторые предварительные сведения, использующиеся в диссертации. Приведено описание алгебры операторов Буте де Монвеля на гладком компактном многообразии с краем и ассоциированного символического исчисления, а также напоминаются определения алгебраического и гладкого скрещенных произведений алгебры и дискретной конечно-порожденной группы ее автоморфизмов.

Вторая глава посвящена теории индекса нелокальных краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы. Прежде всего, автор доказывает фредгольмовость краевой задачи для нелокального эллиптического оператора, удовлетворяющей аналогу условия Шапиро–Лопатинского. Затем строятся характеристические классы символов операторов Буте де Монвеля, прежде всего, характер Черна, что позволяет определить топологический индекс рассматриваемых нелокальных краевых задач. Основным результатом этой главы является кохомологическая формула индекса для эллиптических краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста. Полученная формула значительно упрощается для специального класса операторов Буте де Монвеля — операторов, скрученных проектором. Наконец, в качестве конкретного примера вычислен индекс скрученной краевой задачи для оператора Эйлера.

Третья глава посвящена теории индекса нелокальных краевых задач в случае, когда действие дискретной группы не является изометрическим. Этот случай намного сложнее, и кохомологическая формула индекса для таких задач автором не получена. Им сделаны следующие существенные продвижения в исследовании этой задачи. Прежде всего, для рассматриваемых операторов определены траекторные символы и найдены условия эллиптичности, доказана фредгольмовость эллиптических операторов. Новым здесь является случай, когда действие группы не сохраняет переменную, нормальную к краю многообразия. Основным результатом третьей главы состоит в построении топологического индекса операторов Буте де Монвеля. В данном случае подход второй главы не работает, и потому автор использует аппарат циклических кохомологий. Прежде всего, строятся некоторые периодические циклические коциклы на алгебре символов Буте де Монвеля, ассоциированной с действием группы. С их помощью определяется топологический индекс рассматриваемых нелокальных краевых задач. В конце главы рассматривается

конкретный пример нелокальной краевой задачи для дифференциального оператора со скручиваниями конечного цилиндра. Для такой задачи автор выводит явные формулы для траекторных символов и при помощи этих формул выписывает явно условия эллиптичности нелокальной краевой задачи.

Диссертация написана грамотно и аккуратно оформлена. Изложение материала четкое. Доказательства основных результатов приведены полно и подробно, со многими техническими деталями.

Достоверность и новизна результатов диссертации

Результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами. Достоверность и новизна научных результатов диссертации подтверждается также их публикацией в ведущих российских и международных математических журналах и апробацией на международных и всероссийских конференциях и научных семинарах.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все научные положения, выводы и заключения, полученные в диссертации, полностью обоснованы. Это подтверждается строгостью приведенных математических доказательств и корректным использованием современных методов теории дифференциальных уравнений в частных производных, микролокального анализа, дифференциальной геометрии и функционального анализа.

Ценность для науки и практики результатов работы

Работа носит теоретический характер. Научная значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в развитии теории индекса нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов аргументов. Полученные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории индекса и некоммутативной геометрии.

Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати

Результаты диссертации своевременно и надлежащим образом опубликованы в 5 статьях в ведущих российских и международных научных журналах, входящих в список ВАК и индексируемых в основных международных базах данных.

Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания по работе

Существенных замечаний по диссертации нет.

Заключение

Диссертационное исследование А.В. Болтачева «Об индексе нелокальных эллиптических уравнений, ассоциированных с диффеоморфизмами многообразий с краем» является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение ряда актуальных задач, имеющих важное значение в теории индекса нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов. Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов», утвержденного ученым советом РУДН протокол № УС-1 от 22.01.2024 г., а ее автор, Болтачев Андрей Владимирович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

главный научный сотрудник, Институт математики с вычислительным центром — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
доктор физ.-мат. наук (специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)
доцент

Кордюков Юрий Аркадьевич

«22» 11 2024 г.

Подпись Кордюкова Ю.А. заверяю

И.о. директора ИМВЦ УФИЦ РАН
доктор физ.-мат. наук



Мусин Ильдар Хамитович

450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, д. 112,
тел. (347) 237-5036, yurikor@matem.anrb.ru