

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ  
ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ»  
(РУДН)**

*На правах рукописи*

Уанкпо Гектор Жибсон Кинманон

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЁЖНОСТИ ЗАМКНУТОЙ  
РЕЗЕРВИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С  
ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ИСТОЧНИКОВ ДАННЫХ И  
ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ**

Специальность 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

**Диссертация**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель:**  
кандидат физико-математических наук,  
Козырев Дмитрий Владимирович

Москва — 2024

## Содержание

### Введение 4

<b>Глава 1. Анализ надежности резервированной системы с помощью метода введения дополнительной переменной.....</b>	<b>19</b>
1.1. Моделирование однородной системы облегченного резервирования .....	19
1.2. Асимптотические выражения для вероятностей состояний системы $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ при редких отказах .....	34
1.3. Моделирование однородной системы холодного резервирования .....	35
1.4. Моделирование однородной системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$ .....	44
1.5. Моделирование неоднородной дублированной системы холодного резервирования .....	46
<b>Глава 2. Комплекс имитационных моделей однородной и неоднородной резервированной системы .....</b>	<b>55</b>
2.1. Имитационная модель однородной системы холодного резервирования.....	56
2.1.1. Модель расчета стационарных вероятностей состояний системы холодного резервирования.....	56
2.1.2. Модель расчета среднего времени жизни и функции надежности системы холодного резервирования .....	58
2.2. Имитационная модель системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$ .....	61
2.2.1. Модель расчета стационарных вероятностей состояний системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$ .....	61
2.2.2. Модель расчета среднего времени жизни системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$ .....	63
2.3. Имитационная модель неоднородной дублированной системы холодного резервирования .....	64
2.3.1. Модель расчета стационарных вероятностей состояний неоднородной дублированной системы холодного резервирования .....	64
2.3.2. Модель расчета среднего времени жизни и функции надежности неоднородной дублированной системы холодного резервирования .....	66
<b>Глава 3. Численный анализ зависимости характеристик надёжности системы от параметров модели .....</b>	<b>68</b>
3.1. Анализ стационарных характеристик надежности однородной резервированной системы типа $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ с помощью аналитического моделирования .....	69
3.2. Анализ стационарных характеристик надежности однородной резервированной системы типа $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ с помощью имитационного моделирования .....	77
3.3. Анализ стационарных характеристик надежности однородной резервированной системы типа $\langle GI_n / GI / 1 \rangle$ с помощью имитационного моделирования .....	83

<b>3.4. Анализ нестационарных характеристик надёжности однородной резервированной системы типа <math>\langle GI_n / GI/1 \rangle</math> с помощью имитационного моделирования .....</b>	<b>88</b>
<b>3.5. Анализ стационарных характеристик надёжности неоднородной дублированной системы типа <math>\langle M_2 / GI/1 \rangle</math> с помощью аналитического моделирования .....</b>	<b>91</b>
<b>3.6. Анализ нестационарных характеристик надёжности неоднородной дублированной системы типа <math>\langle GI_2 / GI/1 \rangle</math> с помощью имитационного моделирования .....</b>	<b>93</b>
<b>Заключение .....</b>	<b>99</b>
<b>Список обозначений и сокращений .....</b>	<b>100</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>102</b>
<b>Приложение А: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления стационарных вероятностей состояний системы холодного резервирования .....</b>	<b>116</b>
<b>Приложение Б: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надёжности системы холодного резервирования .....</b>	<b>118</b>
<b>Приложение В: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки стационарных вероятностей состояний системы горячего резервирования типа k-из-n.....</b>	<b>120</b>
<b>Приложение Г: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надёжности системы горячего резервирования типа k-из-n .....</b>	<b>123</b>
<b>Приложение Д: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления стационарных вероятностей состояний неоднородной дублированной системы холодного резервирования .....</b>	<b>125</b>
<b>Приложение Е: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надёжности неоднородной дублированной системы холодного резервирования.....</b>	<b>127</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В последнее время функционирование различных аспектов современного общества стало критически зависеть от сетей связи [1, 2]. С переносом критически важных объектов в сети связи жизненно важно обеспечить надежность и доступность сетей и систем передачи данных. Ряд предыдущих исследований [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] был сосредоточен на анализе надежности различных сложных телекоммуникационных систем. Многие эксперты в области стохастического моделирования информационных процессов и структур подчеркивают важность исследования надежности этих систем, поскольку качество информационно-коммуникационных услуг включает в себя такие важные аспекты, как доступность и сохраняемость услуг, которые напрямую зависят от надежности систем и сетей, реализующих возможность предоставления данных услуг [69]. В [70] В. А. Нетес рассматривал такую меру, как интервальная надежность для описания влияния надежности на доступность услуги и сохраняемость услуги одновременно, предложил метод ее расчета и использования для частного примера информационно-коммуникационной сети. В [71] А. Н. Моисеев и др. рассматривают модель колл-центра в виде многолинейной системы массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и неограниченной зоной ожидания. Было построено приближение стационарного распределения количества вызовов в системе с произвольной функцией распределения времени обслуживания. Авторы подчеркивают, что исследование моделей с неэкспоненциальным временем обслуживания обеспечивает решения для широкого класса математических моделей, делая результаты более адекватными для реальных систем.

В [10] рассмотрено создание имитационных моделей и средств для поддержки автоматизированного проектирования высоконадежных распределенных компьютерных систем. В [11] была представлена модель отказа линии электропередачи, которая дополнена системой динамических

тепловых характеристик, а также были исследованы эффекты неопределенности параметров модели отказа линии, влияние надежности системы и влияние корреляция погодных данных с показателями надежности энергосистемы. В [12] представлен анализ надежности парогазовой турбины.

Благодаря стремительному распространению информационных технологий, вызванному лавинообразным ростом новых требовательных к сетевым ресурсам сервисов, мобильные пользователи ожидают гораздо более высокий уровень обслуживания, чем когда-либо прежде. Это создает беспрецедентную нагрузку на существующие и новые сетевые инфраструктуры [21]. Действительно, количество подключенных портативных устройств резко возросло за последнее десятилетие [22], и ожидается, что этот рост только продолжится с расширением линейки носимых устройств. Сегодняшний переход к технологиям мобильной связи следующего поколения (5G/6G) приносит с собой поразительное разнообразие интегрированных в информационную сеть устройств, таких как носимая электроника, очки дополненной и виртуальной реальности, беспилотные автомобили, и многое другое [23, 24]. Этот сдвиг парадигмы открывает большое разнообразие совершенно новых приложений и сценариев, которые требуют не только обычных ресурсов (например, полосы пропускания), но и накладывают другие новые важные ограничения, в первую очередь, по задержкам и надежности [25]. Последнее связано с продолжающейся эволюцией существующей сетевой экосистемы, поскольку в ней происходит переход от обслуживания преимущественно H2H-приложений (human-to-human) к разнообразным сервисам связи межмашинного типа (MTC - machine-type communications) [26]. Перспективные мобильные коммуникационные системы следующих поколений должны будут не только справляться с все возрастающим объемом пользовательского трафика и возрастающей плотностью абонентских устройств, но и обеспечивать обслуживание более широкого круга

автоматизированных приложений с новыми уникальными требованиями относительно их надежности, скорости, доступности и эффективности функционирования в новой экосистеме Интернета надежных вещей (Internet of Reliable Things - IoRT). Примерами областей применения этого быстро растущего множества приложений, требующих сверхвысокой надежности связи (Ultra-Reliable Communication - URC), являются интеллектуальные транспортные системы, системы умного дома, умного города, мониторинга объектов, системы безопасности на автодорогах, системы общественной безопасности и др. [27,28]. Сетевое оборудование должно легко взаимодействовать с несколькими различными программными платформами, в условиях постоянного обновления программного обеспечения. Кроме того, устройства могут подвергаться сильно меняющимся внешним воздействиям: резким тепловым колебаниям, жидкостям, влаге, вибрациям, ударам и т.п. Перечисленные особенности развития компьютерных сетей и систем передачи данных последующих поколений в экосистеме IoRT обуславливают возрастающую потребность в адекватных математических моделях и инструментах, позволяющих исследовать их производительность и надежность.

Расчет надежности и исследование чувствительности характеристик надежности систем является одним из основных направлений исследований в области надежности информационных процессов и структур. Понятие «чувствительность» трактуется по-разному в разных прикладных областях, но, в общем, под чувствительностью понимается изменчивость выходных данных модели при вариации её входных параметров, в частности вида и параметров функций распределения случайных величин, описывающих характеристики объекта исследований [32].

Отдельным направлением исследований является анализ чувствительности вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания (СМО). Здесь нельзя не отметить фундаментальную работу

Б.А. Севастьянова [33], которая послужила импульсом к созданию теории чувствительности в области теории массового обслуживания, а также другие классические работы экспертов в области моделирования систем передачи информации и анализа чувствительности этих моделей – И. Н. Коваленко [34], В. В. Калашникова [35], В. А. Ивницкого [36], В. В. Рыкова [38] и др. В серии работ [39, 40] А. С. Румянцева с соавторами проводился анализ чувствительности стационарных характеристик производительности многолинейных СМО к распределению времени обслуживания.

В теории надежности впервые проблемы анализа чувствительности обсуждались в книге [37] для случая однородной восстанавливаемой системы облегченного дублирования с помощью методов теории восстановления. Эта же проблема для системы с неоднородными элементами теми же методам обсуждалась также в [41]. В [38] для изучения сложных систем надежности использовался аппарат многомерных альтернирующих процессов. Была исследована система в случае отсутствия ограничений на количество ремонтных сооружений. В [74, 75, 79] другие значительные авторы рассмотрели исследование разные модели надежностей системы такие как энергосистемы, морских и наземных систем передачи данных... и т.д. В серии работ диссертанта [29-31] была исследована надёжность однородной системы холодного резервирования в случае, когда функция распределения (ФР) времени безотказной работы (в.б.р) элементов системы является экспоненциальной, а время ремонта отказавших элементов имеет произвольное распределение. Также в [83, 84, 85, 86, 94] был исследован анализ надежности холодной резервной комплексной системы. В [42] был проведен расчет надежности резервированной системы с произвольным распределением времени восстановления. Был обобщен предыдущий результат для неоднородных систем, а также была решена проблема расчета функции надежности для особого случая модели надежности с ограниченным количеством ремонтных приборов.

В [30] изучалась чувствительность характеристик надёжности системы передачи данных горячего резервирования к виду распределений времени между отказами и восстановления элементов системы. В [49, 50, 80], была рассмотрена более общая аналитическая модель однородной системы передачи данных горячего резервирования для произвольного числа элементов системы. В работе [52] исследована надёжность системы горячего резервирования для случаев независимых систем и зависимых систем с общими сбоями. В [53] был рассмотрен анализ надёжности многоуровневой системы горячего резервирования. В [54] был представлен обзор основных подходов теории надёжности и описан систематический метод анализа надёжности резервированных систем с использованием матричных методов. Рассмотрены некоторые общие конфигурации системы: горячий резерв, холодный резерв, системы с ремонтом и без ремонта, системы с зависимыми состояниями.

Компьютерные и коммуникационные сети постоянно развиваются благодаря результатам решения теоретических и практических задач, направленных на повышение доступности и надёжности сетей и систем передачи данных [80, 81]. Исследователи часто сталкиваются с разработкой и анализом сложных резервированных систем, многие из которых представляют собой резервированные системы типа  $k$ -из- $n$ . В [68] В. Ю. Иткин и др. продемонстрировали возможности оценки надёжности структур нефтегазовой отрасли с помощью математических моделей  $k$ -из- $n$  систем. На двухчастных примерах технических систем нефтегазовой отрасли была показана возможность расчета характеристик надёжности соответствующих систем с помощью  $k$ -из- $n$  моделей в предположении пуассоновского потока отказов и произвольного распределения времени ремонта. Авторами было получено численное решение системы уравнений в частных производных для нестационарного режима с помощью процедур MATLAB. В [55] было предложено приложение моделей  $k$ -из- $n$  систем и нового метода оценки их



надежности – предложено создание объектов гражданской инфраструктуры с использованием моделей стареющих  $k$ -из- $n$  систем с одинаковым износом элементов. В [56] авторы сосредоточились на оценке надежности и пропускной способности многокомпонентной, взвешенной системы типа  $k$ -из- $n$ , с множеством состояний. Разработан рекурсивный подход для более эффективной оценки надежности системы и проведено сравнение с существующим подходом по различным аспектам. В [57] была исследована надежность систем с одновременными и последовательными отказами типа  $k$ -из- $n$ , подвергшихся внешним воздействиям (шокам). В [58] проведен анализ надежности системы типа  $k$ -из- $n$  с отказами по общей причине для железной дороги, где надежность резервной системы горячего резерва с учетом отказа по общей причине были проанализированы и использованы для повышения точности оценки надежности системы. В [59] разработана оценка надежности восстанавливаемой системы разделения нагрузки  $k$ -из- $n$  с моделью блок-схемы. Далее в [60] была применена модель системы  $k$ -из- $n$  к исследованию надежности лётного модуля на базе гексакоптера привязной беспилотной высотной телекоммуникационной платформы.

Сегодня методы прикладной теории вероятностей, случайных процессов, математической статистики, стохастического анализа, теории массового обслуживания способствуют решению сложнейших задач, среди которых можно отметить проектирование современных сетей передачи информации. Решение этих проблем заключается в повышении доступности и надежности систем передачи данных, таких как сети беспроводной связи. Современные беспроводные сети достигнут замечательного уровня производительности и эффективности в ближайшие годы благодаря развитию новых математических моделей [77, 78]. Одним из направлений создания сверхскоростной и надежной беспроводной связи в рамках развития сетей будущего поколения является разработка гибридных резервированных систем на основе лазерных и радио-технологий, каждая из

которых чувствительна к определенным условиям окружающей среды [76]. В [87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96] рассмотрели несколько моделей надежности неоднородной системы. Одним из основных условий стабильной работы системы передачи данных является нечувствительность показателей надежности и эффективности системы к изменению исходных параметров модели. Анализ такой чувствительности, проведенный в рамках данного исследования, является одним из новых направлений исследований высоконадежных систем передачи данных нового поколения и расширяет предыдущие исследования в этой области [9].

Помимо аналитического моделирования в настоящее время имитационное моделирование эффективно применяется для задач моделирования сетевых информационных систем, разработки математических методов, информационных технологий, включая разработку новых моделей вычислений, для анализа функционирования компьютерных сетей, моделирования телетрафика и т.д. [17]. В [50] был представлен разработанный программный комплекс имитационного моделирования надежности замкнутой однородной системы холодного резервирования с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки; и имитационная модель расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта её элементов. В [63-67] также были рассмотрены различные подходы к моделированию и анализу надежности сложных систем.

### **Степень разработанности темы.**

Для исследования надежности резервированной системы передачи данных в диссертационной работе проведен обзор результатов, полученных ранее, в области применения методов математического и имитационного моделирования. Анализ характеристик надежности исследуемых в диссертационной работе моделей резервированных систем проведен с

помощью математического аппарата теории вероятностей, теории надёжности и теории случайных процессов. Среди работ, представленных в обзоре выше, следует особо отметить работы следующих российских и зарубежных ученых, внесших значимый вклад в создание теории и методов тематики исследований: Г. П. Башарин, Ю. К. Беляев, П. П. Бочаров, В. М. Вишнеvский, Ю. В. Гайдамака, И. Б. Герцбах, Б.В. Гнеденко, В. А. Ивницкий, В. Ю. Иткин, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко, Д. В. Козырев, А. Н. Моисеев, В. А. Нетес, А. С. Румянцев, В. В. Рыков, К. Е. Самуйлов, Б. А. Севастьянов, А. Д. Соловьёв, И. А. Ушаков, D. G. Kendall, A. Lisnianski, G.Levitin, K.Trivedi, S. Chakravarthy M. Xie, M. Zuo, и др.

**Цели и задачи исследований.** Целью диссертационной работы является разработка моделей для анализа показателей надёжности замкнутой резервированной системы обслуживания с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Разработка и исследование комплекса аналитических моделей для анализа показателей надёжности замкнутых резервированных систем обслуживания различной конфигурации и разного типа резерва.

2. Разработка алгоритмов дискретно-событийного имитационного моделирования и их реализация в виде комплекса имитационных моделей для анализа показателей надёжности замкнутых резервированных систем обслуживания различной конфигурации и разного типа резерва в общем случае.

3. Анализ зависимости характеристик надёжности резервированной системы от исходных параметров модели – вида функций распределения, коэффициента вариации, относительной скорости восстановления элементов системы.

**Объем и структура работы.** В диссертации содержится введение, основная часть, состоящая из 3 глав, заключение, 10 приложений и библиографический список из 72 наименований. Диссертационная работа изложена на 127 страницах, содержит 31 таблицу, 38 рисунков.

### **Краткое изложение.**

**В главе 1** проводится аналитическое исследование характеристик надежности резервированной системы с помощью метода введения дополнительной переменной. В разделе 1.1 предложена и исследована математическая модель однородной системы облегченного резервирования, и вычислены её характеристики надежности методом введения дополнительной переменной. Для этого выведена система дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющая найти вероятности состояний рассматриваемой системы, и найдено её решение методом вариации постоянной. В разделе 1.2 проведено исследование поведения системы  $\langle M_n / GI / 1 \rangle$  при редких отказах её элементов и выведены асимптотические выражения для вероятностей состояний системы. В разделе 1.3 предложена и исследована математическая модель однородной системы холодного резервирования. Составлена система дифференциальных уравнений для нахождения вероятностей состояний системы и найдено её решение методом вариации постоянной. В разделе 1.4 предложена и исследована математическая модель надежности однородной системы горячего резервирования типа  $k$ -из- $n$ . В разделе 1.5 рассмотрено обобщение аналитической модели системы, исследованной в подразделе 1.3., на случай, когда элементы системы не являются идентичными. Вычислены стационарные вероятности состояний неоднородной дублированной системы холодного резервирования.

**В главе 2** представлен комплекс программ имитационного моделирования на основе дискретно-событийного подхода для численного и

графического анализа надежности резервированных систем разных типов резерва с произвольной функцией распределения времени безотказной работы и времени ремонта элементов. В подразделе 2.1.1 и 2.1.2 представляются, соответственно, алгоритм расчета стационарных вероятностей состояния системы и алгоритм расчета оценки среднего времени жизни системы холодного резервирования. Аналогично в подразделе 2.2.1 и 2.2.2 для системы типа  $k$ -из- $n$ , а также в подразделе 2.3.1 и 2.3.2 для неоднородной дублированной системы холодного резервирования приводятся разработанные алгоритмы имитационного моделирования для расчета стационарных вероятностей состояний, среднего времени жизни и функции надежности систем.

**В главе 3** на основе полученных в главах 1 и 2 аналитических и имитационных результатов с использованием экспертных исходных данных проведен численный и графический анализ зависимости характеристик надёжности системы от входных параметров модели.

**В заключении** содержатся результаты диссертационной работы.

Построение математических и имитационных моделей выполнено с использованием среды Matlab, а также на языке программирования R.

**Научная новизна** диссертационной работы:

1. Разработан комплекс новых аналитических моделей замкнутой резервированной системы обслуживания с произвольным числом элементов с разными типами резерва (горячее, холодное, облегчённое резервирование и резервирование типа  $k$ -из- $n$ ). Исследовано поведение системы при редких отказах её элементов и выведены асимптотические выражения для вероятностей состояний системы.

2. Разработан новый комплекс программ имитационного моделирования для расчета характеристик надежности резервированной системы и анализа их зависимости от параметров модели в самом общем случае, когда как распределение времени безотказной работы, так и распределение времени ремонта отказавших элементов являются произвольными.

### **Теоретическая и практическая значимость работы.**

Теоретическую значимость представляют разработанные в диссертации математические методы и вычислительные алгоритмы, предназначенные для исследования характеристик надежности резервированной системы передачи данных. Полученные теоретические результаты работы представляют практическую значимость, так как позволяют производить расчёт характеристик надёжности резервированной системы и оценку среднего времени жизни системы, в том числе для замкнутых однородных систем холодного, облегчённого и горячего резервирования, а также замкнутой неоднородной дублированной системы холодного резервирования.

Результаты работы включены в исследования по гранту РФФИ Аспиранты № 20-37-90137 «Исследование чувствительности характеристик надежности гибридных систем связи к виду функций распределения наработки на отказ и времени восстановления их элементов». Результаты работы также были использованы в реализованном в РУДН проекте «5-100» повышения конкурентоспособности ведущих российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

**Методология и методы исследования.** В диссертационной работе автор применяет методологию теории вероятностей, теории марковских процессов, теории массового обслуживания.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Разработанная в виде замкнутой системы массового обслуживания с ограниченным числом источников заявок общая математическая модель для анализа характеристик надежности однородной системы  $n$ -кратного резервирования, с произвольной функцией распределения времени ремонта её элементов. Разработанная математическая модель для анализа характеристик надежности неоднородной дублированной системы.
2. Разработанный комплекс имитационных моделей для вычисления стационарных и нестационарных характеристик надежности однородной и неоднородной резервированных систем в случае, когда оба исходных распределения модели отличны от показательного.
3. Численный и графический анализ зависимости характеристик надежности системы от параметров модели (типа резерва, значения коэффициента вариации времени ремонта, вида распределения времени ремонта, относительной скорости восстановления), проведенный с помощью разработанных аналитических и имитационных моделей.

### **Степень достоверности и апробация.**

Достоверность полученных результатов обеспечивается их строгими доказательствами, применением методов анализа из теории вероятностей, теории надежности, теории случайных процессов, а также подтверждается численными расчетами и вычислительным экспериментом. Результаты, полученные с помощью разработанного комплекса имитационных моделей, хорошо согласуются с результатами, полученными с помощью аналитических моделей.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях и семинарах:

- XIX Международная научная конференция «Распределенные

компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2016 (Москва, РУДН, 2016 г.);

- VII Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» ITTMM-2017 (Москва, РУДН, 2017 г.);
- VIII Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» ITTMM-2018 (Москва, РУДН, 2018 г.);
- XIII Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, МГУ, 2018 г.);
- IX Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» ITTMM-2019 (Москва, РУДН, 2019 г.);
- XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Prospects of Fundamental Sciences Development» (Томск, Россия, 2019 г.);
- XIV Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, МГУ, 2019 г.);
- XII Международный конгресс «International Congress on Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops» (ICUMT-2020), (Брно, Чехия, 2020 г.)
- «XXX European Safety and Reliability Conference and XV Probabilistic Safety Assessment and Management Conference» (ESREL2020



PSAM15) (Венеция, Италия, 2020 г.)

- XV Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, МГУ, 2020 г.);
- XXIII Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2020 (Москва, РУДН, 2020 г.);
- XXIV Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2021 (Москва, РУДН, 2021 г.);
- XVI Международная научно-практическая конференция «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, МГУ, 2021 г.).

Также по материалам диссертационных исследований в федеральной службе по интеллектуальной собственности зарегистрированы программы для ЭВМ:

- № 2020610408 «Программа расчета средней наработки на отказ замкнутой однородной системы многократного холодного резервирования с произвольными исходными распределениями»
- № 2020610325 «Программа расчета стационарных вероятностей состояний замкнутой однородной системы многократного холодного резервирования с произвольным распределением времени ремонта и времени безотказной»
- № 2021660642 «Программа расчета вероятности безотказной работы замкнутой однородной системы многократного холодного резервирования с произвольными исходными распределениями»
- № 2021660643 «Программа расчета средней наработки на отказ замкнутой однородной системы многократного горячего резервирования с произвольными исходными распределениями»

**Личный вклад.** Основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад соискателя состоит в исследовании моделей и методов их исследования, доказательстве утверждений, разработке алгоритмов и программных средств для проведения численных расчетов, численном расчете и интерпретации полученных результатов. Программные средства, используемые для численного и графического анализа, разработаны при непосредственном участии автора. Работа [65] выполнена без соавторов.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 18 печатных изданиях [4, 17-20, 25, 29-31, 42, 49, 50, 60, 63-67], в том числе 5 – в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [42, 50, 64, 65, 67], 8 – в изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science [4, 17-20, 60, 63, 66]. Получены 4 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [97-100].

## Глава 1. Анализ надежности резервированной системы с помощью метода введения дополнительной переменной

В качестве математической модели системы, состоящей из  $n$  однотипных каналов передачи данных с одним ремонтным устройством, рассмотрена модель замкнутой восстанавливаемой резервированной однородной системы с экспоненциальным законом распределения времени безотказной работы (в.б.р.) её элементов и произвольным законом распределения времени их ремонта. Анализ надежности системы проведен для всех основных типов резервирования – нагруженного резервирования, резервирования замещением и смешанного резервирования, которые для простоты будем обозначать как горячее, холодное и облегчённое резервирование, соответственно. Рассматриваемую систему обозначим в соответствии с обобщенной символикой Башарина-Кендалла [21] как модель  $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ , где угловые скобки означают, что это замкнутая система обслуживания с ограниченным числом источников заявок [22], а символы  $M_n$  и  $GI$  (General Independent) на первом и втором местах означают показательное распределение в.б.р. элементов системы и произвольное распределение времени их ремонта, соответственно. Единственное ремонтное устройство восстанавливает отказавшие элементы по одному с приоритетом по порядку отказа, то есть резервные отказавшие элементы ждут своей очереди на ремонт до завершения ремонта основного элемента.

### 1.1. Моделирование однородной системы облегчённого резервирования

Рассмотрим систему облегчённого резервирования, т.е. систему, в которой резервные элементы находятся в менее нагруженном режиме, чем основной элемент.

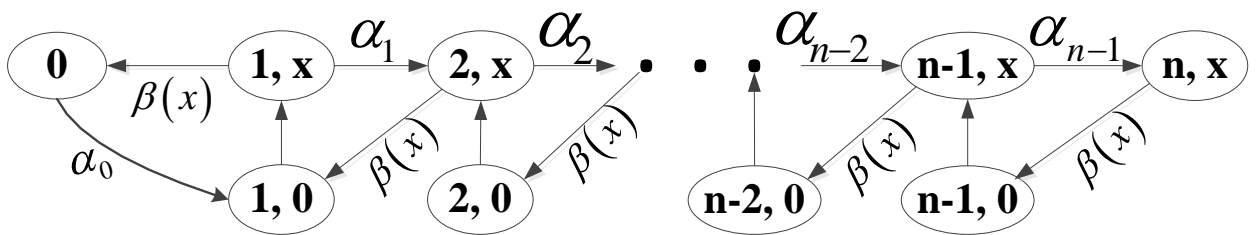
Для описания функционирования системы введем случайный процесс  $v(t)$  – число отказавших элементов системы в момент времени  $t$ , заданный на множестве состояний  $E = \{0, n\}$ . Однако в силу того, что время ремонта отказавших элементов системы отлично от экспоненциального, данная

система является немарковской. Для описания поведения системы с помощью Марковского процесса (МП) [71] и для вычисления её характеристик надежности используем один из методов марковизации – метод введения дополнительных переменных [72] и воспользуемся расширенным пространством состояний  $\varepsilon = E \times R_+$ . В качестве дополнительной переменной введем  $x(t) \in R_+$  – время, затраченное в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента. В результате получим двумерный случайный процесс [11]  $(v(t), x(t))$ , с пространством состояний  $\varepsilon = \{(0), (1, x), (2, x), \dots, (n, x)\}$ .

Обозначим через  $p_0(t)$  вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $i=0$ , и через  $p_i(t, x)$  плотность распределения (ПР) вероятностей (по непрерывной компоненте) того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $i = \overline{1, n}$ , и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале  $(x, x + dx)$ ,

$$p_0(t) = p\{v(t) = 0\},$$

$$p_i(t, x) dx = p\{v(t) = i, x < x(t) < x + dx\}, i = \overline{1, n}.$$



$$\alpha_i = \lambda + (n-1-i)\gamma; \quad i = \overline{0, n-1}; \quad 0 < \gamma \leq \lambda$$

Рисунок. 1.1. Граф интенсивности переходов для однородной системы облегченного резервирования.

Рассмотрим вероятности некоторых вспомогательных событий, которые будут использоваться в дальнейших расчетах.

Первое событие: начиная с рассматриваемого момента времени, за время  $\Delta$  элемент сломается, при условии, что он отработал  $x$  единиц времени.

$$p\{x \leq A \leq x + \Delta | A \geq x\} = \frac{p\{x \leq A \leq x + \Delta\}}{p\{A \geq x\}} = \frac{A(x + \Delta) - A(x)}{1 - p\{A < x\}} = \frac{a_i(x)\Delta}{1 - A(x)} = \frac{\alpha_i e^{-\alpha_i x} \Delta}{e^{-\alpha_i x}} = \alpha \Delta + o(\Delta)$$

Второе событие: начиная с рассматриваемого момента времени, за время  $\Delta$  элемент будет отремонтирован, при условии, что он находился в ремонте  $x$  единиц времени.

$$\begin{aligned} p\{x \leq B \leq x + \Delta | B \geq x\} &= \frac{p\{x \leq B \leq x + \Delta\}}{p\{B \geq x\}} = \frac{B(x + \Delta) - B(x)}{1 - p\{B < x\}} = \frac{b(x)\Delta}{1 - B(x)} \\ &= \beta(x)\Delta + o(\Delta) \end{aligned}$$

Здесь и далее введено следующее обозначение:

$$\beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)} - \text{условная ПР остаточной длительности ремонта элемента,}$$

**Теорема 1.** *Стационарные вероятности состояния восстанавливаемой системы облегченного резервирования имеет вид:*

$$p_0 = C_1 \frac{\beta(\alpha_1)}{\alpha_0}$$

$$p_1 = C_1 \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1}$$

$$p_i = C_1 \left( \Phi_i \frac{1 - \beta(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); \quad i = \overline{2, n-1}; \quad n > 2$$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} \right); & n = 2 \\ C_1 \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); & n > 2 \end{cases}$$

**Доказательство.** С помощью формулы полной вероятности перейдем к выводу системы уравнений Колмогорова, позволяющей найти стационарные

вероятности состояний рассматриваемой системы.

Рассмотрим случай, когда система находится в состоянии (0):

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta) &= p\{v(t+\Delta)=0\} \\ &= (1-\alpha_0\Delta)p_0(t) + \int_0^t p_1(t,x)\beta(x)\Delta dx \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда система находится в состоянии (1):

$$\begin{aligned} p_1(t+\Delta, x+\Delta)dx &= p\{v(t+\Delta)=1, x+\Delta < x(t+\Delta) < x+\Delta+dx\} \\ &= (1-\alpha_1\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_1(t,x)dx \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда система находится в состоянии  $i = \overline{2, n-1}$ :

$$\begin{aligned} p_i(t+\Delta, x+\Delta)dx &= p\{v(t+\Delta)=i, x+\Delta < x(t+\Delta) < x+\Delta+dx\} \\ &= (1-\alpha_i\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_i(t,x)dx + \alpha_{i-1}\Delta p_{i-1}(t,x)dx \end{aligned}$$

Далее, случай, когда система находится в состоянии  $n$ :

$$\begin{aligned} p_n(t+\Delta, x+\Delta)dx &= p\{v(t+\Delta)=n, x+\Delta < x(t+\Delta) < x+\Delta+dx\} \\ &= (1-\beta(x)\Delta)p_n(t,x)dx + \alpha_{n-1}\Delta p_{n-1}(t,x)dx \end{aligned}$$

Таким образом, получим следующие уравнения:

$$p_0(t+\Delta) = (1-\alpha_0\Delta)p_0(t) + \int_0^t p_1(t,x)\beta(x)\Delta dx \quad (1)$$

$$p_1(t+\Delta, x+\Delta) = (1-\alpha_1\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_1(t,x) \quad (2)$$

$$p_i(t+\Delta, x+\Delta) = (1-\alpha_i\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_i(t,x) + \alpha_{i-1}\Delta p_{i-1}(t,x) \quad (3)$$

$$p_n(t+\Delta, x+\Delta) = (1-\beta(x)\Delta)p_n(t,x) + \alpha_{n-1}\Delta p_{n-1}(t,x) \quad (4)$$

И соответствующие граничные условия:

$$p_i(t+\Delta, \theta\Delta)\Delta dx = p\{v(t+\Delta)=i, \Delta < x(t+\Delta) < \Delta+dx\}; i = \overline{1, n-1}$$

$$p_1(t+\Delta, \theta\Delta)\Delta = \alpha_0 p_0(t)\Delta + \int_0^t p_2(t,x)\beta(x)\Delta dx \quad (5)$$

$$p_i(t + \Delta, \theta \Delta) \Delta = \int_0^t p_{i+1}(t, x) \beta(x) \Delta dx; i = \overline{2, n-1} \quad (6)$$

Ниже приводятся пояснения к выводу каждого уравнения.

Уравнение 1: вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система будет в нулевом (0) состоянии (все элементы работоспособны), есть вероятность того, что в момент времени  $t$  она также находилась в этом состоянии, и за время  $\Delta$  ни один элемент не отказал, или вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии (1) со временем, затраченным к моменту  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным от 0 до  $t$ , и за время  $\Delta$  элемент будет отремонтирован.

Уравнение 2: вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система будет находиться в состоянии (1) со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x + \Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система также находилась в состоянии (1) со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  отказавший элемент не восстановится, а работающий элемент не сломается.

Уравнение 3: вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система будет находиться в состоянии  $(i)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x + \Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система также находилась в состоянии  $(i)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  отказавший прибор не восстановится, а работающий прибор не сломается; или вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(i-1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  работающий элемент сломается.

Уравнение 4: вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система

будет находиться в состоянии  $(n)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x + \Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система также находилась в состоянии  $(n)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  прибор не восстановится, или вероятность того, что в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(n-1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента  $x$ , и за время  $\Delta$  элемент выйдет из строя.

Уравнение 5: (граничное условие): вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система находится в состоянии (1), а время, затраченное в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равно  $\theta\Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в нулевом (0) состоянии, и за время  $\Delta$  основной прибор выйдет из строя, или множество таких вероятностей, что в момент времени  $t$  система находилась в состоянии (2) со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, от 0 до  $t$ , и за время  $\Delta$  он будет отремонтирован.

Уравнение 6: (граничное условие): вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система находится в состоянии  $(i)$ , а время, затраченное в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равно  $\theta\Delta$ , есть вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(i+1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, от 0 до  $t$ , и за время  $\Delta$  элемент будет отремонтирован.

Преобразуем эти уравнения:

Из (1)

$$p_0(t + \Delta) = (1 - \alpha_0\Delta) p_0(t) + \int_0^t p_1(t, x) \beta(x) dx$$

$$p_0(t + \Delta) = p_0(t) - p_0(t) \alpha_0\Delta + \int_0^t p_1(t, x) \beta(x) \Delta dx$$



$$p_0(t+\Delta) - p_0(t) = -p_0(t)\alpha_0\Delta + \int_0^t p_1(t,x)\beta(x)\Delta dx$$

$$\frac{p_0(t+\Delta) - p_0(t)}{\Delta} = -p_0(t)\alpha_0 + \int_0^t p_1(t,x)\beta(x)dx$$

Из (2)

$$p_1(t+\Delta, x+\Delta) = (1-\alpha_1\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_1(t,x)$$

$$p_1(t+\Delta, x+\Delta) = p_1(t,x)(1-\alpha_1\Delta-\beta(x)\Delta)$$

$$p_1(t+\Delta, x+\Delta) = p_1(t,x) - p_1(t,x)(\alpha_1 + \beta(x))\Delta$$

$$p_1(t+\Delta, x+\Delta) - p_1(t, x+\Delta) + p_1(t, x+\Delta) - p_1(t,x) = -p_1(t,x)(\alpha_1 + \beta(x))\Delta$$

$$\frac{p_1(t+\Delta, x+\Delta) - p_1(t, x+\Delta)}{\Delta} + \frac{p_1(t, x+\Delta) - p_1(t,x)}{\Delta} = -p_1(t,x)(\alpha_1 + \beta(x))$$

Из (3), при  $i = \overline{2, n-1}$

$$p_i(t+\Delta, x+\Delta) = (1-\alpha_i\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_i(t,x) + \alpha_{i-1}\Delta p_{i-1}(t,x)$$

$$p_i(t+\Delta, x+\Delta) = p_i(t,x)(1-\alpha_i\Delta-\beta(x)\Delta) + \alpha_{i-1}\Delta p_{i-1}(t,x)$$

$$p_i(t+\Delta, x+\Delta) = p_i(t,x) - p_i(t,x)(\alpha_i + \beta(x))\Delta + \alpha_{i-1}\Delta p_{i-1}(t,x)$$

$$p_i(t+\Delta, x+\Delta) - p_i(t, x+\Delta) + p_i(t, x+\Delta) - p_i(t,x) = -p_i(t,x)(\alpha_i + \beta(x))\Delta + \alpha_{i-1}\Delta p_{i-1}(t,x)$$

$$\frac{p_i(t+\Delta, x+\Delta) - p_i(t, x+\Delta)}{\Delta} + \frac{p_i(t, x+\Delta) - p_i(t,x)}{\Delta} = -p_i(t,x)(\alpha_i + \beta(x)) + \alpha_{i-1}p_{i-1}(t,x)$$

Из (4)

$$p_n(t+\Delta, x+\Delta) = (1-\beta(x)\Delta)p_n(t,x) + \alpha_{n-1}\Delta p_{n-1}(t,x)$$

$$p_n(t+\Delta, x+\Delta) = p_n(t,x) - p_n(t,x)\beta(x)\Delta + \alpha_{n-1}\Delta p_{n-1}(t,x)$$

$$p_n(t+\Delta, x+\Delta) - p_n(t, x+\Delta) + p_n(t, x+\Delta) - p_n(t,x) = -p_n(t,x)\beta(x)\Delta + \alpha_{n-1}\Delta p_{n-1}(t,x)$$

$$\frac{p_n(t+\Delta, x+\Delta) - p_n(t, x+\Delta)}{\Delta} + \frac{p_n(t, x+\Delta) - p_n(t,x)}{\Delta} = -p_n(t,x)\beta(x) + \alpha_{n-1}p_{n-1}(t,x)$$

С предельным переходом при  $\Delta \rightarrow 0$ , перейдем к выводу системы

дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющей найти вероятности состояний рассматриваемой системы [22]:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\alpha_0 p_0(t) + \int_0^t p_1(t, x) \beta(x) dx \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial p_1(t, x)}{\partial x} = -p_1(t, x)(\alpha_1 + \beta(x)) \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_i(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial p_i(t, x)}{\partial x} = -p_i(t, x)(\alpha_i + \beta(x)) + \alpha_{i-1} p_{i-1}(t, x) \quad (9)$$

$$\frac{\partial p_n(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial p_n(t, x)}{\partial x} = -p_n(t, x) \beta(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(t, x) \quad (10)$$

Из (5) и (6), граничные условия примут вид:

$$p_1(t, 0) = \alpha_0 p_0(t) + \int_0^t p_2(t, x) \beta(x) dx \quad (11)$$

$$p_i(t, 0) = \int_0^t p_{i+1}(t, x) \beta(x) dx; \quad i = \overline{2, n-1} \quad (12)$$

Предположим, что описанный процесс имеет стационарное распределение вероятностей при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда преобразованные уравнения примут следующий вид:

$$\alpha_0 p_0 = + \int_0^{\infty} p_1(x) \beta(x) dx \quad (13)$$

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = -p_1(x)(\alpha_1 + \beta(x)) \quad (14)$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\alpha_i + \beta(x)) + \alpha_{i-1} p_{i-1}(x); \quad i = \overline{2, n-1} \quad (15)$$

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x) \beta(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x) \quad (16)$$

Граничные условия примут вид:

$$p_1(0) = \alpha_0 p_0 + \int_0^{\infty} p_2(x) \beta(x) dx \quad (17)$$

$$p_i(0) = \int_0^{\infty} p_{i+1}(x) \beta(x) dx; \quad i = \overline{2, n-1} \quad (18)$$

Приступим к решению этой системы, используя метод вариации постоянной [23]. Рассмотрим уравнение (14) системы:

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = -p_1(x)(\alpha_1 + \beta(x))$$

$$\frac{dp_1(x)}{p_1(x)} = -(\alpha_1 + \beta(x)) dx$$

$$\ln(p_1(x)) = -\alpha_1 x + \ln(1 - B(x)) + C_1$$

$$\ln(p_1(x)) = \ln(e^{-\alpha_1 x}) + \ln(1 - B(x)) + \ln(C_1)$$

$$p_1(x) = C_1 e^{-\alpha_1 x} (1 - B(x)) \quad (19)$$

Далее, подставим полученный результат  $p_1(x)$  в уравнение (13)

системы

$$\alpha_0 p_0 = \int_0^{\infty} p_1(x) \beta(x) dx$$

$$\alpha_0 p_0 = C_1 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 x} (1 - B(x)) \frac{b(x)}{(1 - B(x))} dx$$

$$\alpha_0 p_0 = C_1 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 x} b(x) dx$$

$$p_0 = C_1 \frac{B(\alpha_1)}{\alpha_0} \quad (20)$$

Из (15):

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\alpha_i + \beta(x)) + \alpha_{i-1} p_{i-1}(x); \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\alpha_i + \beta(x)) + Q_{i-1}(x)e^{-\alpha_{i-1}x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\alpha_i + \beta(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$\frac{dp_i(x)}{p_i(x)} = -(\alpha_i + \beta(x))dx; \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$p_i(x) = C_i e^{-\alpha_i x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

Пусть  $C_i = C_i(x)$

$$[C_i(x)e^{-\alpha_i x}(1-B(x))] = -C_i(x)e^{-\alpha_i x}(1-B(x))(\alpha_i + \beta(x)) + \alpha_{i-1}Q_{i-1}(x)e^{-\alpha_{i-1}x}(1-B(x))$$

$$C'_i(x)e^{-\alpha_i x}(1-B(x)) = \alpha_{i-1}Q_{i-1}(x)e^{-\alpha_{i-1}x}(1-B(x))$$

$$C'_i(x) = \alpha_{i-1}Q_{i-1}(x) \frac{e^{-\alpha_{i-1}x}}{e^{-\alpha_i x}} = \alpha_{i-1}Q_{i-1}(x)e^{-(\alpha_{i-1}-\alpha_i)x}$$

$$C_i(x) = C_i + \alpha_{i-1} \int Q_{i-1}(x)e^{-(\alpha_{i-1}-\alpha_i)x} dx$$

$$p_i(x) = Q_i(x)e^{-\alpha_i x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (21)$$

где

$$Q_i(x) = C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j e^{-(\alpha_j - \alpha_i)x}$$

Далее рассмотрим (16):

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x) + \alpha_{n-1}p_{n-1}(x)$$

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x) + \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x)e^{-\alpha_{n-1}x}(1-B(x))$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x)$$

$$\frac{dp_n(x)}{p_n(x)} = -\beta(x) dx$$

$$\frac{dp_n(x)}{p_n(x)} = -\frac{b(x)}{1-B(x)} dx$$

$$\ln(p_n(x)) = \ln(1-B(x)) + C_n$$

$$p_n(x) = C_n(1-B(x))$$

Пусть  $C_n = C_n(x)$

$$[C_n(x)(1-B(x))]' = -C_n(x)(1-B(x))\beta(x) + \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x)e^{-\alpha_{n-1}x}(1-B(x))$$

$$C_n'(x)(1-B(x)) = \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x)e^{-\alpha_{n-1}x}(1-B(x))$$

$$C_n'(x) = \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x)e^{-\alpha_{n-1}x}$$

$$C_n(x) = C_n + \alpha_{n-1} \int Q_{n-1}(x)e^{-\alpha_{n-1}x} dx$$

$$p_n(x) = Q_n(x)(1-B(x)), \quad (22)$$

где

$$Q_n(x) = \begin{cases} C_n - C_{n-1}e^{-\alpha_{n-1}x}; & n = 2 \\ C_n - C_{n-1}e^{-\alpha_{n-1}x} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j e^{-\alpha_j x}; & n > 2 \end{cases}$$

Для нахождения константы  $C_i, i = \overline{1, n}$  рассмотрим уравнения (17) и (18) системы дифференциальных уравнений (граничные условия):

Из (17), при  $n = 2$

$$p_{n-1}(0) = C_{n-1} = \alpha_0 p_0 + \int_0^{\infty} p_n(x) \beta(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\alpha_{n-1}) + \int_0^{\infty} Q_n(x)(1-B(x))\beta(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\alpha_{n-1}) + \int_0^{\infty} (C_n - C_{n-1}e^{-\alpha_{n-1}x})(1-B(x))\beta(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \mathcal{B}(\alpha_{n-1}) + \int_0^{\infty} (C_n - C_{n-1} e^{-\alpha_{n-1}x}) b(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \mathcal{B}(\alpha_{n-1}) + C_n \int_0^{\infty} b(x) dx - C_{n-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha_{n-1}x} b(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \mathcal{B}(\alpha_{n-1}) + C_n - C_{n-1} \mathcal{B}(\alpha_{n-1})$$

$$C_n = C_{n-1} \Leftrightarrow C_2 = C_1 \psi_2$$

Из (17), при  $n > 2$

$$p_1(0) = C_1 = \alpha_0 p_0 + \int_0^{\infty} p_2(x) \beta(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \mathcal{B}(\alpha_1) + \int_0^{\infty} Q_2(x) e^{-\alpha_2 x} (1 - B(x)) \beta(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \mathcal{B}(\alpha_1) + \int_0^{\infty} Q_2(x) e^{-\alpha_2 x} b(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \mathcal{B}(\alpha_1) + \int_0^{\infty} \left( C_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} C_1 e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)x} \right) e^{-\alpha_2 x} b(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \mathcal{B}(\alpha_1) + C_2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_2 x} b(x) dx - \frac{\alpha_1 C_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 x} b(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \mathcal{B}(\alpha_1) + C_2 \mathcal{B}(\alpha_2) - \frac{\alpha_1 C_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \mathcal{B}(\alpha_1)$$

$$C_2 = C_1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \mathcal{B}(\alpha_1) \right) \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha_2)} \Leftrightarrow C_2 = C_1 \psi_2$$

Из (18), при  $n > 2$

$$p_{n-1}(0) = \int_0^{\infty} p_n(x) \beta(x) dx$$

$$p_{n-1}(0) = \int_0^{\infty} Q_n(x) (1 - B(x)) \beta(x) dx$$

$$p_{n-1}(0) = \int_0^{\infty} Q_n(x) b(x) dx$$

$$C_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-1-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) C_j = \int_0^{\infty} \left( C_n - C_{n-1} e^{-\alpha_{n-1}x} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) C_j e^{-\alpha_j x} \right) b(x) dx$$

$$C_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-1-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) C_j = C_n - C_{n-1} \mathcal{B}(\alpha_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) C_j \mathcal{B}(\alpha_j)$$

$$C_n = C_{n-1} (1 + \mathcal{B}(\alpha_{n-1})) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-1-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) C_j - \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) C_j \mathcal{B}(\alpha_j)$$

При  $n > 3$

$$p_i(0) = \int_0^{\infty} p_{i+1}(x) \beta(x) dx; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j = \int_0^{\infty} \mathcal{Q}_{i+1}(x) e^{-\alpha_{i+1}x} (1 - B(x)) \beta(x) dx$$

$$C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j = \int_0^{\infty} \left( C_{i+1} + \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \left( \prod_{k=j}^i \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j e^{-(\alpha_j - \alpha_{i+1})x} \right) e^{-\alpha_{i+1}x} b(x) dx$$

$$C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j = C_{i+1} \mathcal{B}(\alpha_{i+1}) + \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \left( \prod_{k=j}^i \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j \mathcal{B}(\alpha_j)$$

$$C_{i+1} = \left( C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j - \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \left( \prod_{k=j}^i \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j \mathcal{B}(\alpha_j) \right) \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha_{i+1})}; \quad i = \overline{2, n-2}$$

Выразим  $C_i$  через  $C_1$ :

$$C_n = C_{n-1} \Leftrightarrow C_2 = C_1 \Phi_2; \quad n = 2$$

$$C_2 = C_1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \mathcal{B}(\alpha_1) \right) \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha_2)} \Leftrightarrow C_2 = C_1 \Phi_2; \quad n > 2$$

$$C_n = C_1 \left( \Phi_{n-1} (1 + \mathcal{B}(\alpha_{n-1})) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-1-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j - \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j \mathcal{B}(\alpha_j) \right); \quad n > 2$$

$$C_{i+1} = C_1 \left( \Phi_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j - \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \left( \prod_{k=j}^i \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \mathcal{B}(\alpha_j) \right) \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha_{i+1})}; \quad i = \overline{2, n-2}; \quad n > 3$$

Нахождение вероятностей макро-состояний:

$$p_1 = \int_0^{\infty} p_1(x) dx = C_1 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 x} (1 - B(x)) dx = C_1 \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_1)}{\alpha_1}$$

$$p_i = \int_0^{\infty} p_i(x) dx = \int_0^{\infty} Q_i(x) e^{-\alpha_i x} (1 - B(x)) dx; \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$p_i = \int_0^{\infty} \left( C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j e^{-(\alpha_j - \alpha_i)x} \right) e^{-\alpha_i x} (1 - B(x)) dx; \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$p_i = C_i \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_j)}{\alpha_j}; \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$p_i = C_1 \left( \Phi_i \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); \quad i = \overline{2, n-1}; \quad n > 2$$

$$p_n = \int_0^{\infty} p_n(x) dx = \int_0^{\infty} Q_n(x) (1 - B(x)) dx$$

$$p_n = \begin{cases} \int_0^{\infty} (C_n - C_{n-1} e^{-\alpha_{n-1}x}) (1 - B(x)) dx; & n = 2 \\ \int_0^{\infty} \left( C_n - C_{n-1} e^{-\alpha_{n-1}x} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) C_j e^{-\alpha_j x} \right) (1 - B(x)) dx; & n > 2 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \int_0^{\infty} (\Phi_n - \Phi_{n-1} e^{-\alpha_{n-1}x}) (1 - B(x)) dx; & n = 2 \\ C_1 \int_0^{\infty} \left( \Phi_n - \Phi_{n-1} e^{-\alpha_{n-1}x} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j e^{-\alpha_j x} \right) (1 - B(x)) dx; & n > 2 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} \right); & n = 2 \\ C_1 \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \mathcal{B}(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); & n > 2 \end{cases}$$

В итоге получаем:

$$p_0 = C_1 \frac{\mathcal{B}(\alpha_1)}{\alpha_0} \tag{23}$$



$$p_1 = C_1 \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1} \quad (24)$$

$$p_i = C_1 \left( \Phi_i \frac{1 - \beta(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); \quad i = \overline{2, n-1}; \quad n > 2 \quad (25)$$

$$p_n = \begin{cases} C_1 \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} \right); & n = 2 \\ C_1 \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); & n > 2 \end{cases} \quad (26)$$

где

$$C_1 = \left( \frac{\beta(\alpha_1)}{\alpha_0} + \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1} + \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} \right)^{-1}; \quad n = 2$$

$$C_1 = \left( \frac{\beta(\alpha_1)}{\alpha_0} + \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \left( \Phi_i \frac{1 - \beta(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right) + \left( \Phi_n b - \Phi_{n-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right) \right)^{-1}; \quad n > 2$$

и  $b$  – математическое ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента.

$$\Phi_2 = \Phi_1 = 1; \quad n = 2$$

$$\Phi_2 = \left( 1 - \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \beta(\alpha_1) \right) \frac{1}{\beta(\alpha_2)}; \quad n > 2$$

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} \left( 1 + \beta(\alpha_{n-1}) \right) + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-1-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j - \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{i=j}^{n-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j \beta(\alpha_j); \quad n > 2$$

$$\Phi_{i+1} = \left( \Phi_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j - \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \left( \prod_{k=j}^i \frac{\alpha_k}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \beta(\alpha_j) \right) \frac{1}{\beta(\alpha_{i+1})}; \quad i = \overline{2, n-2}; \quad n > 3$$

■

**Замечание:** при вычислении стационарных вероятностей состояний системы  $p_i$ ;  $i = \overline{0, n}$  и вероятности отказа системы  $p_n$  выбранные данные

должны удовлетворять следующему условию:

$$\Phi_n b \geq \Phi_{n-1} \frac{1 - \mathcal{B}'(\alpha_{n-1})}{\alpha_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_j - \alpha_{k+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \mathcal{B}'(\alpha_j)}{\alpha_j}.$$

## 1.2. Асимптотические выражения для вероятностей состояний системы $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ при редких отказах

Рассмотрим поведение системы  $\langle M_n / GI / 1 \rangle$  при редких отказах её элементов и выведем асимптотические выражения для вероятностей состояний системы.

Пусть  $\mathcal{B}'(\alpha_i) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha_i x} \cdot b(x) dx$  – преобразование Лапласа (ПЛ) плотности распределения случайной величины времени восстановления отказавшего элемента.

Рассмотрим случай редких отказов, т. е. когда  $\text{Max}(\alpha_i) \rightarrow 0$ .

Используя метод разложения в ряд Тейлора, получим следующее выражение:

$$\mathcal{B}'(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{np} \frac{\mathcal{B}^{(k)}(0)}{k!} \alpha_i^k + o(\alpha_i^{np}) = \sum_{k=0}^{np} \frac{\left[ \int_0^{\infty} e^{-\alpha_i x} \cdot b(x) dx \right]^{(k)} \Big|_{\alpha_i=0}}{k!} \alpha_i^k = \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_i^k}{k!}$$

Здесь  $E[B^k] = \int_0^{\infty} x^k \cdot b(x) dx$  – моменты  $k$ -ого порядка с.в. времени восстановления отказавшего элемента,  $np$  – значение порядка разложения.

В итоге получаем следующие аналитические асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / GI / 1 \rangle$  при редких отказах в следующем виде:

$$p_0 = C_1 \frac{\sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_1^k}{k!}}{\alpha_0};$$

$$p_1 = C_1 \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_1^k}{k!}}{\alpha_1};$$

$$p_i = C_1 \left( \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_i^k}{k!}}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \left( \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\alpha_k}{(\alpha_j - \alpha_{k+1})} \right) \cdot \Phi_j \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_j^k}{k!}}{\alpha_j} \right); i = \overline{2, n-1}; n \geq 3;$$

$$p_n = \left\{ \begin{array}{l} C_1 \left( \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_{n-1}^k}{k!}}{\alpha_{n-1}} \right); n = 2 \\ C_1 \left( \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_{n-1}^k}{k!}}{\alpha_{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{n-j} \cdot \left( \prod_{k=j}^{n-2} \frac{\alpha_{k+1}}{(\alpha_j - \alpha_{k+1})} \right) \cdot \Phi_j \frac{1 - \sum_{k=0}^{np} (-1)^k \cdot E[B^k] \cdot \frac{\alpha_j^k}{k!}}{\alpha_j} \right); n \geq 3; \end{array} \right.$$

### 1.3. Моделирование однородной системы холодного резервирования

Рассмотрим однородную систему холодного резервирования, т.е. систему, в которой функции основного элемента передаются резервному элементу только после отказа основного.

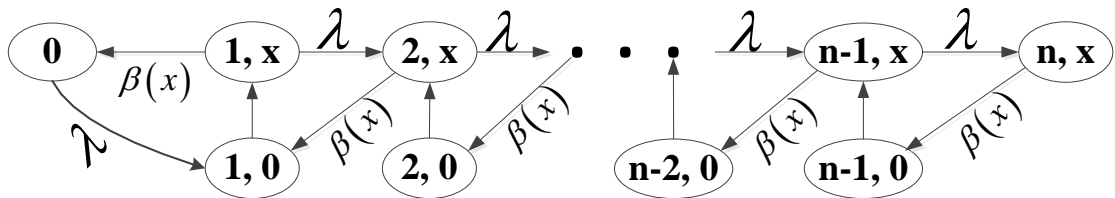


Рисунок. 1.2. Граф интенсивности переходов для однородной системы холодного резервирования.

Рассмотрим следующие состояния исследуемой системы:

Состояние 0: один (основной) элемент работает,  $(n-1)$  – в холодном резерве;

Состояние 1: один элемент отказал и находится в ремонте, один – работает,  $(n-2)$  – в холодном резерве;

Состояние  $i$ :  $i$  элементов отказали, один работает, один находится в ремонте,  $(i-1)$  ждут своей очереди на ремонт,  $(n-i-1)$  – в холодном резерве,  $i = \overline{2, n-1}$ .

Состояние  $n$ : все элементы отказали, один находится в ремонте, остальные  $(n-1)$  ждут своей очереди на ремонт.

**Теорема 2.** Стационарные вероятности состояний однородной восстанавливаемой системы холодного резервирования имеют вид:

$$p_0 = C_1 \frac{\beta(\lambda)}{\lambda}$$

$$p_i = C_1 \left( \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!} \Psi_{i-j} \right); \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$p_n = C_1 \left( \Phi_n b - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k} \right)$$

или

$$p_n = C_1 \lambda^{-1} \left( \rho^{-1} \Phi_n - \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k} \right)$$

**Доказательство теоремы 2.** Аналогично из (1) – (12), получаем следующие уравнения баланса:

$$\lambda p_0 = + \int_0^{\infty} p_1(x) \beta(x) dx \quad (19)$$

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = -p_1(x)(\lambda + \beta(x)) \quad (20)$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\lambda + \beta(x)) + \lambda p_{i-1}(x); \quad i = \overline{2, n-1} \quad (21)$$

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x) + \lambda p_{n-1}(x) \quad (22)$$

с граничными условиями:

$$p_1(0) = \lambda p_0 + \int_0^{\infty} p_2(x) \beta(x) dx \quad (23)$$

$$p_i(0) = \int_0^{\infty} p_{i+1}(x) \beta(x) dx; \quad i = \overline{2, n-1} \quad (24)$$

Перейдем к решению полученной системы дифференциальных уравнений методом вариации постоянной. Рассмотрим уравнение (19):

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = -p_1(x)(\lambda + \beta(x))$$

$$\frac{dp_1(x)}{p_1(x)} = -(\lambda + \beta(x)) dx$$

$$\ln(p_1(x)) = -\lambda x + \ln(1 - B(x)) + C_1$$

$$\ln(p_1(x)) = \ln(e^{-\lambda x}) + \ln(1 - B(x)) + \ln(C_1)$$

$$p_1(x) = C_1 e^{-\lambda x} (1 - B(x)) \quad (25)$$

Далее, подставим полученный результат для  $p_1(x)$  в уравнение (18)

системы

$$\lambda p_0 = + \int_0^{\infty} p_1(x) \beta(x) dx$$

$$\lambda p_0 = C_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} (1 - B(x)) \frac{b(x)}{(1 - B(x))} dx$$

$$\lambda p_0 = C_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$p_0 = C_1 \frac{\mathcal{B}(\lambda)}{\lambda} \quad (26)$$

Из (20):

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\lambda + \beta(x)) + \lambda p_{i-1}(x); \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\lambda + \beta(x)) + Q_{i-1}(x)e^{-\lambda x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -p_i(x)(\lambda + \beta(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$\frac{dp_i(x)}{p_i(x)} = -(\lambda + \beta(x))dx; \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$p_i(x) = C_i e^{-\lambda x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

Пусть  $C_i = C_i(x)$

$$[C_i(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))] = -C_i(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))(\lambda + \beta(x)) + \lambda Q_{i-1}(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))$$

$$C'_i(x)e^{-\lambda x}(1-B(x)) = \lambda Q_{i-1}(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))$$

$$C'_i(x) = \lambda Q_{i-1}(x)$$

$$C_i(x) = C_i + \lambda \int Q_{i-1}(x) dx$$

$$p_i(x) = (C_i + \lambda \int Q_{i-1}(x) dx) e^{-\lambda x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}$$

$$p_i(x) = Q_i(x) e^{-\lambda x}(1-B(x)); \quad i = \overline{2, n-1}, \quad (27)$$

где

$$Q_i(x) = \sum_{j=1}^i C_j \frac{(\lambda x)^{i-j}}{(i-j)!}; \quad i = \overline{2, n-1}$$

Далее рассмотрим (21):

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x) + \lambda p_{n-1}(x)$$

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x) + \lambda Q_{n-1}(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))$$

Решим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = -p_n(x)\beta(x)$$

$$\frac{dp_n(x)}{p_n(x)} = -\beta(x)dx$$

$$\frac{dp_n(x)}{p_n(x)} = -\frac{b(x)}{1-B(x)}dx$$

$$\ln(p_n(x)) = \ln(1-B(x)) + C_n$$

$$p_n(x) = C_n(1-B(x))$$

Пусть  $C_n = C_n(x)$ .

$$[C_n(x)(1-B(x))] = -C_n(x)(1-B(x))\beta(x) + \lambda Q_{n-1}(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))$$

$$C_n'(x)(1-B(x)) = \lambda Q_{n-1}(x)e^{-\lambda x}(1-B(x))$$

$$C_n'(x) = \lambda Q_{n-1}(x)e^{-\lambda x}$$

$$C_n(x) = C_n + \lambda \int Q_{n-1}(x)e^{-\lambda x} dx$$

$$p_n(x) = (C_n + \lambda \int Q_{n-1}(x)e^{-\lambda x} dx)(1-B(x))$$

$$p_n(x) = \left( C_n + \lambda \int \left( \sum_{j=1}^{n-1} C_j \frac{(\lambda x)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} e^{-\lambda x} \right) dx \right) (1-B(x))$$

$$p_n(x) = \left( C_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} C_j \frac{\lambda^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \int (x^{n-1-j} e^{-\lambda x}) dx \right) (1-B(x))$$

Рассмотрим интеграл  $\int (x^{n-1-j} e^{-\lambda x}) dx$ :

$$\int (x^{n-1-j} e^{-\lambda x}) dx = -e^{-(n-j)} \Gamma(n-j, \lambda x),$$

где гамма-функция  $\Gamma(n-j, \lambda x) = (n-j-1)! e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-j-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$ ;  $(n-j-1) > 0$ .

Следовательно,

$$p_n(x) = \left( C_n - e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) \right) (1 - B(x)) \quad (28)$$

Для нахождения константы  $C_i, i = \overline{1, n}$  рассмотрим уравнения (23) и (24) системы дифференциальных уравнений (граничные условия):

При  $n = 2$ , из (23):

$$p_{n-1}(0) = C_{n-1} = \lambda p_0 + \int_0^{\infty} p_n(x) \beta(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\lambda) + \int_0^{\infty} \left( C_n - e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) \right) (1 - B(x)) \frac{b(x)}{1 - B(x)} dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\lambda) + \int_0^{\infty} \left( C_n - e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) \right) b(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\lambda) + C_n - \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\lambda) + C_n - \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j C_k \frac{(\lambda x)^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_{n-1} = C_{n-1} \beta(\lambda) + C_n - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j C_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \int_0^{\infty} x^{j-k} e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_n = C_{n-1} (1 - \beta(\lambda)) - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j C_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \psi_{j-k}$$

При  $n > 2$ , из (23):

$$p_1(0) = C_1 = \lambda p_0 + \int_0^{\infty} p_2(x) \beta(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \beta(\lambda) + \int_0^{\infty} Q_2(x) e^{-\lambda x} (1 - B(x)) \frac{b(x)}{(1 - B(x))} dx$$

$$C_1 = C_1 \beta(\lambda) + \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 C_j \frac{(\lambda x)^{2-j}}{(2-j)!} e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \beta(\lambda) + \int_0^{\infty} (C_2 + C_1 \lambda x) e^{-\lambda x} b(x) dx$$



$$C_1 = C_1 \beta(\lambda) + C_2 \beta(\lambda) + C_1 \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_1 = C_1 \beta(\lambda) + C_2 \beta(\lambda) + C_1 \lambda \psi_1$$

$$C_2 = C_1 \left( (1 - \beta(\lambda)) - \lambda \psi_1 \right) \frac{1}{\beta(\lambda)} = C_1 \Phi_2$$

Из (24):

$$p_{n-1}(0) = C_{n-1} = \int_0^{\infty} p_n(x) \beta(x) dx$$

$$C_{n-1} = \int_0^{\infty} \left( C_n - e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) \right) (1 - B(x)) \frac{b(x)}{(1 - B(x))} dx$$

$$C_{n-1} = C_n \int_0^{\infty} b(x) dx - \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_n = C_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{\infty} Q_j(x) e^{-\lambda x} b(x) dx$$

$$C_n = C_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j C_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \psi_{j-k}$$

При  $n > 3$ , из (24):

$$p_i(0) = \int_0^{\infty} p_{i+1}(x) \beta(x) dx; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i = \int_0^{\infty} Q_{i+1}(x) e^{-\lambda x} (1 - B(x)) \frac{b(x)}{(1 - B(x))} dx; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i = \int_0^{\infty} Q_{i+1}(x) e^{-\lambda x} b(x) dx; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{i+1} C_j \frac{(\lambda x)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\lambda x} b(x) dx; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i = \sum_{j=1}^{i+1} C_j \frac{\lambda^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \int_0^{\infty} x^{i+1-j} e^{-\lambda x} b(x) dx; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i = \sum_{j=1}^{i+1} C_j \frac{\lambda^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \psi_{i+1-j}; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_i = C_{i+1} \beta(\lambda) + \sum_{j=1}^i C_j \frac{\lambda^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \psi_{i+1-j}; \quad i = \overline{2, n-2}$$

$$C_{i+1} = \left( C_i - \sum_{j=1}^i C_j \frac{\lambda^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \psi_{i+1-j} \right) \frac{1}{\beta(\lambda)}; \quad i = \overline{2, n-2}$$

Запишем  $C_i$  через  $C_1$

$$C_n = C_1 \left( \Phi_{n-1} (1 - \beta(\lambda)) - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \psi_{j-k} \right), \quad \text{при } n = 2$$

$$C_2 = C_1 \left( (1 - \beta(\lambda)) - \lambda \psi_1 \right) \frac{1}{\beta(\lambda)} = C_1 \Phi_2, \quad \text{при } n > 2$$

$$C_n = C_1 \left( \Phi_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \psi_{j-k} \right), \quad \text{при } n > 2$$

$$C_{i+1} = C_1 \left( \Phi_i - \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\lambda^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \psi_{i+1-j} \right) \frac{1}{\beta(\lambda)}; \quad i = \overline{2, n-2}, \quad \text{при } n > 3$$

В результате получаем:

$$p_0 = C_1 \frac{\beta(\lambda)}{\lambda}$$

$$p_1(x) = C_1 e^{-\lambda x} (1 - B(x))$$

$$p_i(x) = Q_i(x) e^{-\lambda x} (1 - B(x)); \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$p_n(x) = \left( C_n - e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) \right) (1 - B(x))$$

Нахождение вероятностей макро-состояний:

$$p_1 = \int_0^{\infty} p_1(x) dx = C_1 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} (1 - B(x)) dx = C_1 \frac{1 - \beta(\lambda)}{\lambda}$$

$$p_i = \int_0^{\infty} p_i(x) dx = \int_0^{\infty} Q_i(x) e^{-\lambda x} (1 - B(x)) dx; \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$p_i = C_1 \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{(\lambda x)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda x} (1-B(x)) dx; \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$p_i = C_1 \left( \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!} \Psi_{i-j} \right); \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$p_n = \int_0^{\infty} p_n(x) dx = \int_0^{\infty} \left( C_n - e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) \right) (1-B(x)) dx$$

$$p_n = C_n \int_0^{\infty} (1-B(x)) dx - \int_0^{\infty} \left( \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(x) e^{-\lambda x} (1-B(x)) \right) dx$$

$$p_n = C_n b - \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{\infty} Q_j(x) e^{-\lambda x} (1-B(x)) dx$$

$$p_n = C_n b - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j C_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k}$$

$$p_n = C_1 \left( \Phi_n b - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k} \right)$$

В итоге получаем:

$$p_0 = C_1 \frac{\mathcal{B}(\lambda)}{\lambda} \tag{29}$$

$$p_i = C_1 \left( \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!} \Psi_{i-j} \right); \quad i = \overline{1, n-1} \tag{30}$$

$$p_n = C_1 \left( \Phi_n b - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k} \right) \tag{31}$$

ИЛИ

$$p_n = C_1 \lambda^{-1} \left( \rho^{-1} \Phi_n - \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k} \right), \tag{32}$$

где

$$C_1 = \left( \frac{\mathcal{B}(\lambda)}{\lambda} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\lambda^{i-j}}{(i-j)!} \Psi_{i-j} + \Phi_n b - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k} \right)^{-1} \text{ и } \mathbf{b} - \text{математическое}$$

ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента.

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Phi_1 = 1 \text{ и } \Phi_n = \Phi_{n-1} (1 - \beta(\lambda)) - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \psi_{j-k}, \text{ при } n = 2$$

$$\Phi_2 = (1 - \beta(\lambda) - \lambda \psi_1) \frac{1}{\beta(\lambda)}, \text{ при } n > 2$$

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \psi_{j-k}, \text{ при } n > 2$$

$$\Phi_{i+1} = \left( \Phi_i - \sum_{j=1}^i \Phi_j \frac{\lambda^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \psi_{i+1-j} \right) \frac{1}{\beta(\lambda)}; \quad i = \overline{2, n-2}, \text{ при } n > 3$$

$$\psi_i = \int_0^{\infty} x^i e^{-\lambda x} b(x) dx; \quad i = \overline{0, n}$$

$$\Psi_i = \int_0^{\infty} x^i e^{-\lambda x} (1 - B(x)) dx; \quad i = \overline{0, n}$$

■

**Замечание:** при вычислении стационарных вероятностей состояний системы  $p_i; i = \overline{0, n}$ , и вероятности отказа  $p_n$ , выбранные данные должны удовлетворять следующему условию:

$$\Phi_n b \geq \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^j \Phi_k \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \Psi_{j-k}$$

#### 1.4. Моделирование однородной системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$

В данном подразделе рассмотрена однородная система горячего резервирования типа  $k$ -из- $n$ , т.е. система, которая состоит из  $n$  одинаковых элементов, а для её работоспособности достаточно работы  $k$  элементов. В этой системе резервные элементы участвуют в функционировании системы наравне с основным.

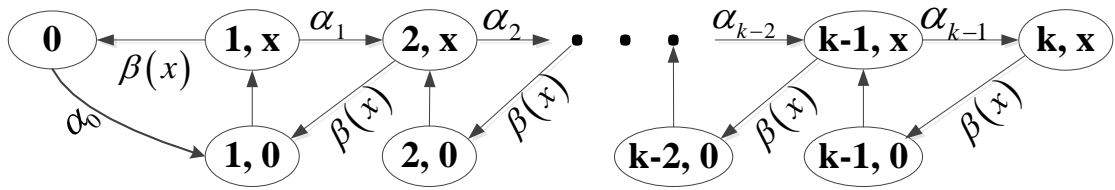


Рисунок. 1.3. Граф интенсивности переходов однородной системы горячего резервирования типа  $k$ -из- $n$ .

Для исследования системы вводятся следующие предположения:

Предположение 1: первоначально резервные элементы участвуют в функционировании системы наравне с основным;

Предположение 2: отказавшие элементы поступают в ремонт по одному.

Рассмотрим следующие состояния исследуемой системы:

Состояние 0: все элементы работают;

Состояние 1: один элемент отказал и находится в ремонте,  $(k-1)$  элементов работают;

Состояние  $i$ :  $i$  элементов отказали, один находится в ремонте,  $(i-1)$  ждут своей очереди на ремонт,  $(k-i)$  работают,  $i = \overline{2, k-1}$ .

Состояние  $k$ : все элементы отказали, один находится в ремонте, остальные  $(k-1)$  ждут своей очереди на ремонт.

Аналогично, как в подразделе 1.1, получаем следующие стационарные вероятности состояний:

$$p_0 = C_1 \frac{\beta(\alpha_1)}{\alpha_0} \quad (33)$$

$$p_1 = C_1 \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1} \quad (34)$$

$$p_i = C_1 \left( \Phi_i \frac{1 - \beta(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{m=j}^{i-1} \frac{\alpha_m}{\alpha_j - \alpha_{m+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); \quad i = \overline{2, k-1}; \quad k > 2 \quad (35)$$

$$P_k = \begin{cases} C_1 \left( \Phi_k b - \Phi_{k-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{k-1})}{\alpha_{k-1}} \right); & k = 2 \\ C_1 \left( \Phi_k b - \Phi_{k-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{k-1})}{\alpha_{k-1}} + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{k-j} \left( \prod_{i=j}^{k-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right); & k > 2 \end{cases} \quad (36)$$

где

$$C_1 = \left( \frac{\beta(\alpha_1)}{\alpha_0} + \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1} + \Phi_k b - \Phi_{k-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{k-1})}{\alpha_{k-1}} \right)^{-1}; \quad k = 2$$

$$C_1 = \left( \frac{\beta(\alpha_1)}{\alpha_0} + \frac{1 - \beta(\alpha_1)}{\alpha_1} + \sum_{i=2}^{k-1} \left( \Phi_i \frac{1 - \beta(\alpha_i)}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{m=j}^{i-1} \frac{\alpha_m}{\alpha_j - \alpha_{m+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right) + \left( \Phi_k b - \Phi_{k-1} \frac{1 - \beta(\alpha_{k-1})}{\alpha_{k-1}} + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{k-j} \left( \prod_{i=j}^{k-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j \frac{1 - \beta(\alpha_j)}{\alpha_j} \right) \right)^{-1}; \quad k > 2$$

и  $b$  – математическое ожидание с.в. времени ремонта отказавшего элемента.

Здесь для удобства использованы следующие обозначения:

$$\Phi_2 = \Phi_1 = 1; \quad k = 2$$

$$\Phi_2 = \left( 1 - \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \beta(\alpha_1) \right) \frac{1}{\beta(\alpha_2)}; \quad k > 2$$

$$\Phi_k = \Phi_{k-1} \left( 1 + \beta(\alpha_{k-1}) \right) + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{k-1-j} \left( \prod_{i=j}^{k-2} \frac{\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j - \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{k-j} \left( \prod_{i=j}^{k-2} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_j - \alpha_{i+1}} \right) \Phi_j \beta(\alpha_j); \quad k > 2$$

$$\Phi_{i+1} = \left( \Phi_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \left( \prod_{m=j}^{i-1} \frac{\alpha_m}{\alpha_j - \alpha_{m+1}} \right) \Phi_j - \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} \left( \prod_{m=j}^i \frac{\alpha_m}{\alpha_j - \alpha_{m+1}} \right) \Phi_j \beta(\alpha_j) \right) \frac{1}{\beta(\alpha_{i+1})}; \quad i = \overline{2, k-2}; \quad k > 3$$

■

### 1.5. Моделирование неоднородной дублированной системы холодного резервирования

В данном подразделе рассмотрим обобщение модели системы, рассмотренной в подразделе 1.3., на случай, когда элементы системы не

являются идентичными. Рассмотрим математическую модель восстанавливаемой замкнутой неоднородной системы холодного дублирования с одним ремонтным устройством, с двумя разнородными источниками данных с экспоненциальной функцией распределения времени безотказной работы и произвольной функцией распределения времени ремонта её элементов. Кроме того, система удовлетворяет следующим предположениям:

Предположение 1: первоначально в системе работает только один элемент (основной) с приоритетом обслуживания и восстановления.

Предположение 2: при работе основного элемента, второй элемент находится в холодном резерве.

Предположение 3: резервный элемент участвует в функционировании системы только после отказа основного.

Мы можем выделить следующие состояния системы:

Состояние  $(0^*,0)$ : основной  $(0^*)$  элемент работает с приоритетом обслуживания, второй в холодном резерве;

Состояние  $(1^*,0)$ : основной элемент отказал и находится в ремонте, второй – работает;

Состояние  $(1^*,1)$ : оба элемента отказали, основной элемент находится в ремонте с приоритетом восстановления, второй ждёт своей очереди на ремонт;

Состояние  $(0^*,1)$ : основной элемент работает, второй находится в ремонте.

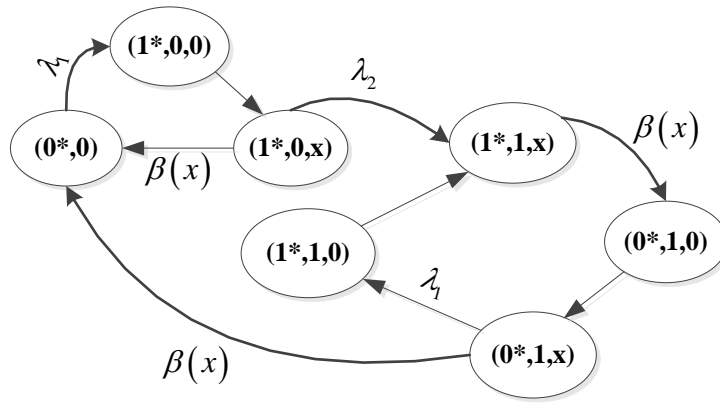


Рисунок. 1.4. Граф интенсивности переходов неоднородной системы холодного резервирования.

Приоритет обслуживания основного элемента означает следующее: после ремонта основного элемента, он сразу возобновляет свою работу, а резервный элемент потеряет свое время обслуживания (например, переход  $(1^*,0,x) \rightarrow (0^*,0)$  на графе переходов).

Приоритет восстановления основного элемента означает следующее: после отказа основного элемента, он сразу идет на ремонт, а резервный элемент потеряет свое время восстановления (например, переход  $(0^*,1,x) \rightarrow (1^*,1,0)$  на графе переходов).

Для нахождения явных аналитических выражений для стационарного распределения вероятностей состояний системы, рассмотрим случайный процесс  $v(t)$  – число отказавших элементов системы в момент времени  $t$ , и множество состояний системы  $\varepsilon = \{(0^*,0)=0, (1^*,0)=1, (0^*,1)=1, (1^*,1)=2\}$ . Для марковизации этого процесса, то есть для описания поведения системы с помощью Марковского процесса (МП) [70], введём дополнительную переменную  $x(t) \in R_+$  – время, затраченное в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, и воспользуемся расширенным пространством состояний  $E = \varepsilon \times R_+$ . В результате получим двумерный процесс [11]  $(v(t), x(t))$  с расширенным пространством состояний  $E = \{(0^*,0), (1^*,0,x), (0^*,1,x), (1^*,1,x)\}$ .



Обозначим через  $p_{0^*,0}(t)$  вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $i = (0^*, 0)$ , и через  $p_{i^*,j}(t, x)$  – ПР (по непрерывной компоненте) вероятностей того, что в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $(i = \overline{0,1}; j = \overline{0,1})$ , и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале  $(x, x + dx)$ ,

$$p_{0^*,0}(t) = p\{v(t) = 0\},$$

$$p_{i^*,j}(t, x) dx = p\{v(t) = 1, x < x(t) < x + dx\}, i = \overline{0,1}, j = \overline{0,1}, i \neq j.$$

$$p_{1^*,1}(t, x) dx = p\{v(t) = 2, x < x(t) < x + dx\}.$$

**Теорема 3.** Стационарные вероятности состояний неоднородной дублированной системы холодного резервирования имеют вид:

$$p_{0^*,0} = C_{1^*,0} \frac{1}{\lambda_1}$$

$$p_{1^*,0} = C_{1^*,0} \frac{1 - \beta(\lambda_2)}{\lambda_2}$$

$$p_{0^*,1} = C_{1^*,0} \frac{(1 - \beta(\lambda_2))(1 - \beta(\lambda_1))}{\beta(\lambda_1) \lambda_1}$$

$$p_{1^*,1} = C_{1^*,0} \left( \frac{(1 + (\beta(\lambda_1) - 1)\beta(\lambda_2))}{\beta(\lambda_1)} b - \frac{(1 - \beta(\lambda_2))}{\lambda_2} \right)$$

### Доказательство теоремы 3.

С помощью формулы полной вероятности получаем

$$p_{0^*,0}(t + \Delta) = (1 - \lambda_1 \Delta) p_{0^*,0}(t) + \int_0^t p_{1^*,0}(t, x) \beta(x) \Delta dx + \int_0^t p_{0^*,1}(t, x) \beta(x) \Delta dx \quad (37)$$

$$p_{1^*,0}(t + \Delta, x + \Delta) dx = (1 - \lambda_2 \Delta)(1 - \beta(x) \Delta) p_{1^*,0}(t, x) dx \quad (38)$$

$$p_{1^*,1}(t + \Delta, x + \Delta) dx = (1 - \beta(x) \Delta) p_{1^*,1}(t, x) dx + \lambda_2 \Delta p_{1^*,0}(t, x) dx \quad (39)$$

$$p_{0^*,1}(t+\Delta, x+\Delta)dx = (1-\lambda_1\Delta)(1-\beta(x)\Delta)p_{0^*,1}(t, x)dx \quad (40)$$

Граничные условия:

$$p_{1^*,0}(t+\Delta, \theta\Delta)\Delta = p_{0^*,0}(t)\lambda_1\Delta \quad (41)$$

$$p_{0^*,1}(t+\Delta, \theta\Delta)\Delta = \int_0^t p_{1^*,1}(t, x)\beta(x)\Delta dx \quad (42)$$

$$p_{1^*,1}(t+\Delta, \theta\Delta)\Delta = \int_0^t p_{0^*,1}(t, x)\lambda_1\Delta dx \quad (43)$$

Ниже приводятся пояснения к выводу каждого уравнения.

Уравнение 37: вероятность того, что в момент времени  $t+\Delta$  система будет в нулевом  $(0^*,0)$  состоянии (оба элемента работоспособны), есть вероятность того, что в момент времени  $t$  она также находилась в этом состоянии, и за время  $\Delta$  основной элемент не отказал, или вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(1^*,0)$  или  $(0^*,1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , от 0 до  $t$ , и за время  $\Delta$  элемент будет отремонтирован.

Уравнение 38: вероятность того, что в момент времени  $t+\Delta$  система будет находиться в состоянии  $(1^*,0)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x+\Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система также находилась в этом состоянии, со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  отказавший элемент не восстановится, а работающий элемент не сломается.

Уравнение 39: вероятность того, что в момент времени  $t+\Delta$  система будет находиться в состоянии  $(1^*,1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x+\Delta$ , есть вероятность того, что в

момент времени  $t$  система также находилась в этом состоянии со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  отказавший элемент не восстановится, а работающий элемент не сломается; или вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(1^*, 0)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  работающий элемент сломается.

Уравнение 40: вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система будет находиться в состоянии  $(0^*, 1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x + \Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система также находилась в этом состоянии со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , и за время  $\Delta$  отказавший элемент не восстановится, а работающий элемент не сломается.

Уравнение 41: (граничное условие): вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система находится в состоянии  $(1^*, 0)$ , а время, затраченное в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равно  $\theta\Delta$ , есть вероятность того, что в момент времени  $t$  система находится в нулевом  $(0^*, 0)$  состоянии, и за время  $\Delta$  основной элемент выйдет из строя.

Уравнение 42: (граничное условие): вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система находится в состоянии  $(0^*, 1)$ , а время, затраченное в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равно  $\theta\Delta$ , есть вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(1^*, 1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , от 0 до  $t$ , и за время  $\Delta$  элемент будет отремонтирован.

Уравнение 43: (граничное условие): вероятность того, что в момент времени  $t + \Delta$  система находится в состоянии  $(1^*, 1)$ , а время, затраченное в

момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равно  $\theta\Delta$ , есть вероятность множества таких событий: в момент времени  $t$  система находилась в состоянии  $(0^*, 1)$  со временем, затраченным в момент  $t$  на ремонт отказавшего элемента, равным  $x$ , от 0 до  $t$ , и за время  $\Delta$  элемент будет отремонтирован.

С предельным переходом при  $\Delta \rightarrow 0$ , перейдем к выводу системы дифференциальных уравнений Колмогорова, позволяющей найти стационарные вероятности состояний рассматриваемой системы [22]:

$$\frac{dp_{0^*,0}(t)}{dt} = -\lambda_1 p_{0^*,0}(t) + \int_0^t p_{1^*,0}(t,x)\beta(x)dx + \int_0^t p_{0^*,1}(t,x)\beta(x)dx \quad (44)$$

$$\frac{\partial p_{1^*,0}(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial p_{1^*,0}(t,x)}{\partial t} = -(\lambda_2 + \beta(x)) p_{1^*,0}(t,x) \quad (45)$$

$$\frac{\partial p_{1^*,1}(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial p_{1^*,1}(t,x)}{\partial t} = -\beta(x) p_{1^*,1}(t,x) + \lambda_2 p_{1^*,0}(t,x) \quad (46)$$

$$\frac{\partial p_{0^*,1}(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial p_{0^*,1}(t,x)}{\partial t} = -(\lambda_1 + \beta(x)) p_{0^*,1}(t,x) \quad (47)$$

Граничные условия:

$$p_{1^*,0}(t,0) = p_{0^*,0}(t)\lambda_1 \quad (48)$$

$$p_{0^*,1}(t,0) = \int_0^t p_{1^*,1}(t,x)\beta(x)dx \quad (49)$$

$$p_{1^*,1}(t,0) = \int_0^t p_{0^*,1}(t,x)\lambda_1 dx \quad (50)$$

В предположении что процесс имеет стационарное распределение при  $t \rightarrow \infty$ , получаем систему уравнений баланса:

$$\lambda_1 p_{0^*,0} = \int_0^\infty p_{1^*,0}(x)\beta(x)dx + \int_0^\infty p_{0^*,1}(x)\beta(x)dx \quad (51)$$

$$\frac{dp_{1^*,0}(x)}{dx} = -(\lambda_2 + \beta(x)) p_{1^*,0}(x) \quad (52)$$

$$\frac{dp_{1^*,1}^*(x)}{dx} = -\beta(x)p_{1^*,1}^*(x) + \lambda_2 p_{1^*,0}^*(x) \quad (53)$$

$$\frac{dp_{0^*,1}^*(x)}{dx} = -(\lambda_1 + \beta(x))p_{0^*,1}^*(x) \quad (54)$$

Граничные условия:

$$p_{1^*,0}^*(0) = p_{0^*,0}^* \lambda_1 \quad (55)$$

$$p_{0^*,1}^*(0) = \int_0^{\infty} p_{1^*,1}^*(x) \beta(x) dx \quad (56)$$

$$p_{1^*,1}^*(0) = \int_0^{\infty} p_{0^*,1}^*(x) \lambda_1 dx \quad (57)$$

$$\text{Из (52)} \Rightarrow p_{1^*,0}^*(x) = C_{1^*,0} e^{-\lambda_2 x} (1 - B(x))$$

$$\text{Из (53)} \Rightarrow p_{1^*,1}^*(x) = (C_{1^*,1} - C_{1^*,0} e^{-\lambda_2 x}) (1 - B(x))$$

$$\text{Из (54)} \Rightarrow p_{0^*,1}^*(x) = C_{0^*,1} e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x))$$

$$\text{Из (51)} \Rightarrow p_{0^*,0}^* = C_{1^*,0} \frac{\beta(\lambda_2)}{\lambda_1} + C_{0^*,1} \frac{\beta(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

$$\text{Из (55)} \Rightarrow C_{1^*,0} = \left( C_{1^*,0} \frac{\beta(\lambda_2)}{\lambda_1} + C_{0^*,1} \frac{\beta(\lambda_1)}{\lambda_1} \right) \lambda_1$$

$$C_{1^*,0} (1 - \beta(\lambda_2)) = C_{0^*,1} \beta(\lambda_1) \Rightarrow C_{0^*,1} = C_{1^*,0} \frac{(1 - \beta(\lambda_2))}{\beta(\lambda_1)}$$

$$\text{Из (56)} \Rightarrow C_{0^*,1} = \int_0^{\infty} (C_{1^*,1} - C_{1^*,0} e^{-\lambda_2 x}) (1 - B(x)) \beta(x) dx$$

$$C_{0^*,1} = \int_0^{\infty} (C_{1^*,1} - C_{1^*,0} e^{-\lambda_2 x}) b(x) dx = C_{1^*,1} - C_{1^*,0} \beta(\lambda_2)$$

$$C_{1^*,1} = C_{0^*,1} + C_{1^*,0} \beta(\lambda_2) = C_{1^*,0} \frac{(1 - \beta(\lambda_2))}{\beta(\lambda_1)} + C_{1^*,0} \beta(\lambda_2)$$

$$C_{1^*,1} = C_{1^*,0} \left( \frac{(1 - \mathcal{B}(\lambda_2))}{\mathcal{B}(\lambda_1)} + \mathcal{B}(\lambda_2) \right) = C_{1^*,0} \left( \frac{(1 + (\mathcal{B}(\lambda_1) - 1)\mathcal{B}(\lambda_2))}{\mathcal{B}(\lambda_1)} \right)$$

$$\text{Из (57)} \Rightarrow C_{1^*,1} - C_{1^*,0} = \int_0^{\infty} C_{0^*,1} e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x)) \lambda_1 dx = C_{0^*,1} \lambda_1 \frac{1 - \mathcal{B}(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

$$C_{1^*,1} = C_{1^*,0} + C_{1^*,0} \frac{1 - \mathcal{B}(\lambda_2)}{\mathcal{B}(\lambda_1)} (1 - \mathcal{B}(\lambda_1)) = C_{1^*,0} \left( \frac{(1 + (\mathcal{B}(\lambda_1) - 1)\mathcal{B}(\lambda_2))}{\mathcal{B}(\lambda_1)} \right)$$

Отсюда находим вероятности макро-состояний

$$p_{0^*,0} = C_{1^*,0} \frac{1}{\lambda_1} \tag{58}$$

$$p_{1^*,0} = C_{1^*,0} \frac{1 - \mathcal{B}(\lambda_2)}{\lambda_2} \tag{59}$$

$$p_{0^*,1} = C_{1^*,0} \frac{(1 - \mathcal{B}(\lambda_2)) (1 - \mathcal{B}(\lambda_1))}{\mathcal{B}(\lambda_1) \lambda_1} \tag{60}$$

$$p_{1^*,1} = C_{1^*,0} \left( \frac{(1 + (\mathcal{B}(\lambda_1) - 1)\mathcal{B}(\lambda_2))}{\mathcal{B}(\lambda_1)} b - \frac{(1 - \mathcal{B}(\lambda_2))}{\lambda_2} \right), \tag{61}$$

$$\text{где } C_{1^*,0} = \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{(1 - \mathcal{B}(\lambda_2)) (1 - \mathcal{B}(\lambda_1))}{\mathcal{B}(\lambda_1) \lambda_1} + \frac{(1 + (\mathcal{B}(\lambda_1) - 1)\mathcal{B}(\lambda_2))}{\mathcal{B}(\lambda_1)} b \right)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Как видно из приведенных выражений, имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида преобразования Лапласа ПР времени ремонта. Однако эта зависимость становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов или, что представляет собой ту же самую асимптотику, при редких отказах работающих элементов, т.е. с ростом относительной скорости восстановления  $\rho$  [64].

## Глава 2. Комплекс имитационных моделей однородной и неоднородной резервированной системы

Представленные в главе 1 аналитические результаты были получены в предположении об экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы элементов системы. В реальных приложениях это предположение не всегда выполнимо. Поскольку не всегда представляется возможным получить явные аналитические выражения для стационарного распределения вероятностей состояний рассматриваемой системы особенно в случае, когда распределение времени безотказной работы элементов системы не является экспоненциальным, то возникает необходимость применять методы имитационного моделирования для исследования надёжности. Поэтому во второй главе рассматривается дискретно-событийная имитационная модель восстанавливаемой резервированной системы передачи данных как модель замкнутой резервированной системы холодного, горячего и облегчённого резервирования с одним ремонтным устройством. Система состоит из  $n$  однотипных элементов с произвольными функциями распределения времени безотказной работы и времени ремонта её элементов.

Для описания алгоритма имитационного моделирования надёжности системы вводятся следующие переменные:

*double t* – часы модельного времени, меняются при отказе или восстановлении элементов системы;

*int i, j* – переменные состояния системы; при наступлении события осуществляется переход из  $i$  в  $j$ ;

*double t<sub>nextfail</sub>* – служебная переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента;

*double t<sub>nextrepair</sub>* – служебная переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта отказавшего элемента;

*int k* – счетчик числа итераций основного цикла.

Все алгоритмы были программно реализованы на языке программирования R.

## **2.1. Имитационная модель однородной системы холодного резервирования**

### **2.1.1. Модель расчета стационарных вероятностей состояний системы холодного резервирования**

На рисунке 2.1 представлена блок-схема имитационной модели системы холодного резервирования для оценки стационарных вероятностей состояний системы. Критерием останова основного цикла модели является достижение максимального модельного времени выполнения  $T$ .



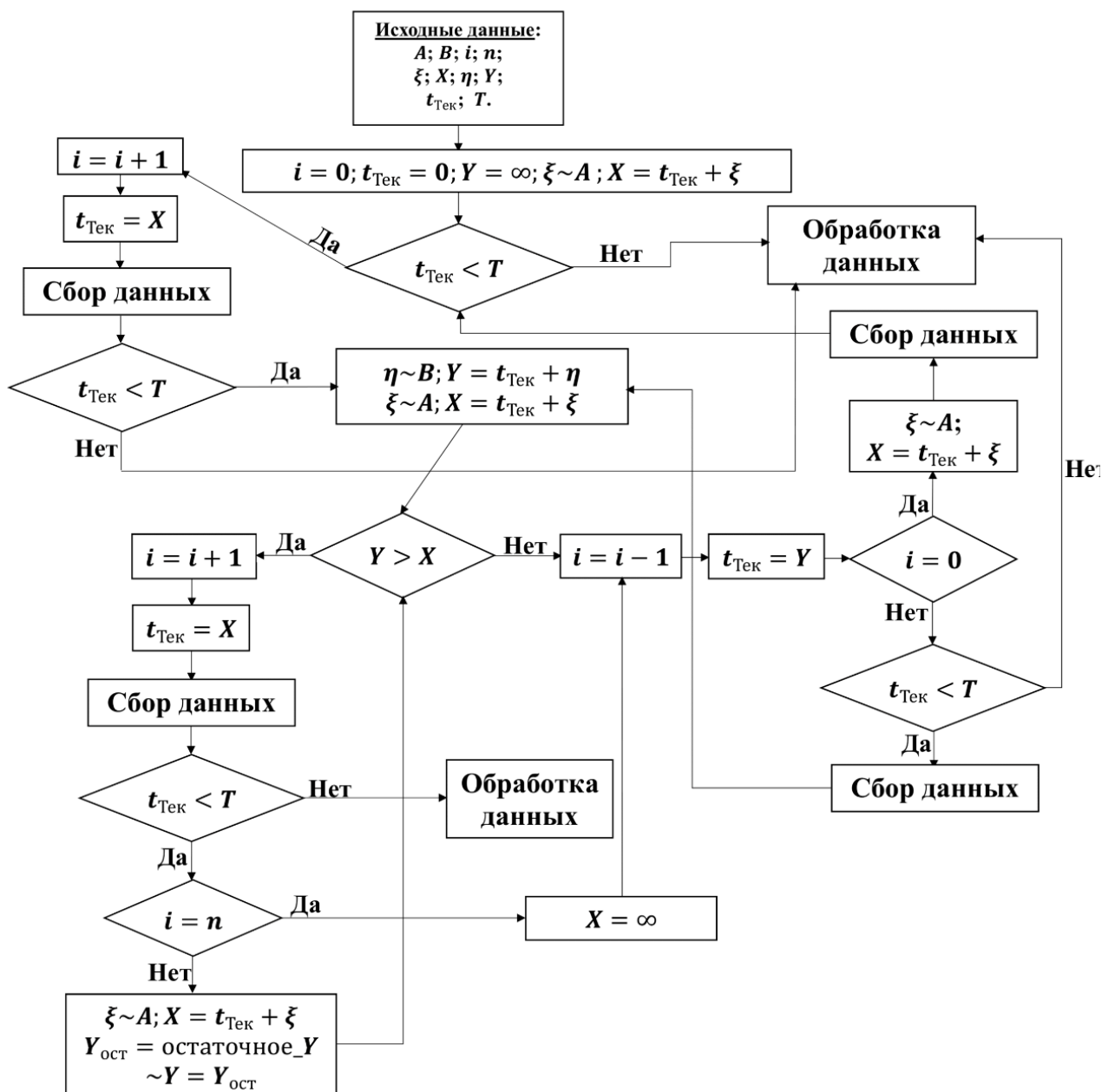


Рисунок. 2.1. Блок-схема имитационной модели для оценки стационарных вероятностей состояний системы холодного резервирования

Для лучшего понимания и воспроизводимости имитационной модели, помимо блок-схемы ниже приводится разработанный алгоритм дискретно-событийного имитационного моделирования в виде псевдокода с комментариями (Алгоритм 1).

**Алгоритм 1.** Псевдокод алгоритма имитационного моделирования для вычисления стационарных вероятностей состояний системы приведён в Приложении А.

**Исходные данные:**

$A$  – случайная величина, время до отказа основного элемента;

$B$  – случайная величина, время восстановления отказавшего элемента;

$i$  – число отказавших элементов;

$n$  – число элементов в системе;

$\xi$  – время отказа элемента;

$X$  – момент отказа элемента в системе;

$\eta$  – время ремонта отказавшего элемента;

$Y$  – момент окончания ремонта элемента в системе;

$t_{\text{Тек}}$  – текущее время;

$T$  – максимальное модельное время;

**Ввод:**  $a_1, b_1, n, T, NG, "GI"$ .

$a_1$  – среднее время между отказами элементов,

$b_1$  – среднее время ремонта,

$NG$  – число графиков траекторий процесса, описывающего функционирование системы,

"GI" – произвольный закон распределения.

**Вывод:** стационарные вероятности состояний  $P_0; P_1; P_2; \dots; P_n$ .

### 2.1.2. Модель расчета среднего времени жизни и функции надежности системы холодного резервирования

Далее, рассмотрим имитационную модель для оценки среднего времени жизни и функции надежности системы. Здесь и далее

эмпирическую функцию надежности системы будем вычислять как  $R^*(t) = 1 - F^*(t)$ , где  $F^*(t)$  – эмпирическая функция распределения времени безотказной работы системы. Здесь состояние  $n$  является поглощающим состоянием. На рисунке 2.2. представлен граф переходов модифицированного процесса (с поглощающим состоянием  $n$ ), описывающего функционирование системы холодного резервирования.

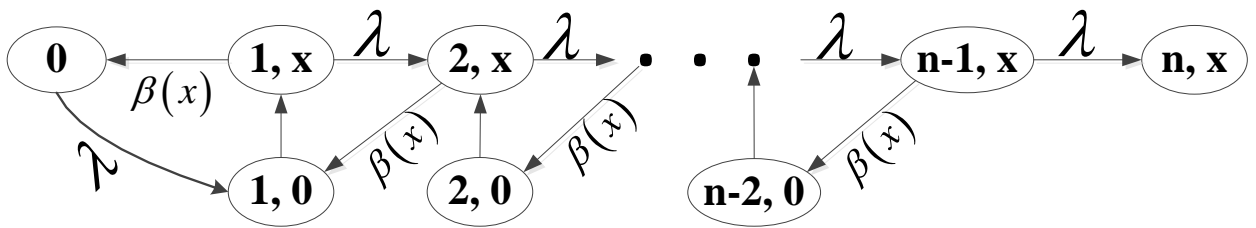


Рисунок. 2.2. Граф переходов модифицированного процесса, описывающего функционирование системы холодного резервирования.

**Алгоритм 2.** Псевдокод алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надежности системы приведён в Приложении Б.

В этом разделе система выходит из строя после отказа  $n$  элементов, а максимальное модельное время  $T = \infty$ .

**Ввод:**  $a_1, b_1, n, NG, "GI"$ .

**Вывод:** Оценка среднего времени жизни  $\bar{E}T$  и функции надежности системы  $R^*(t)$



## 2.2. Имитационная модель системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$

### 2.2.1. Модель расчета стационарных вероятностей состояний системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$

В этой системе все  $n$  элементов работают одновременно, но всего достаточно  $k, k = \overline{2, n}$  элементов, обеспечивающих оперативное функционирование системы.

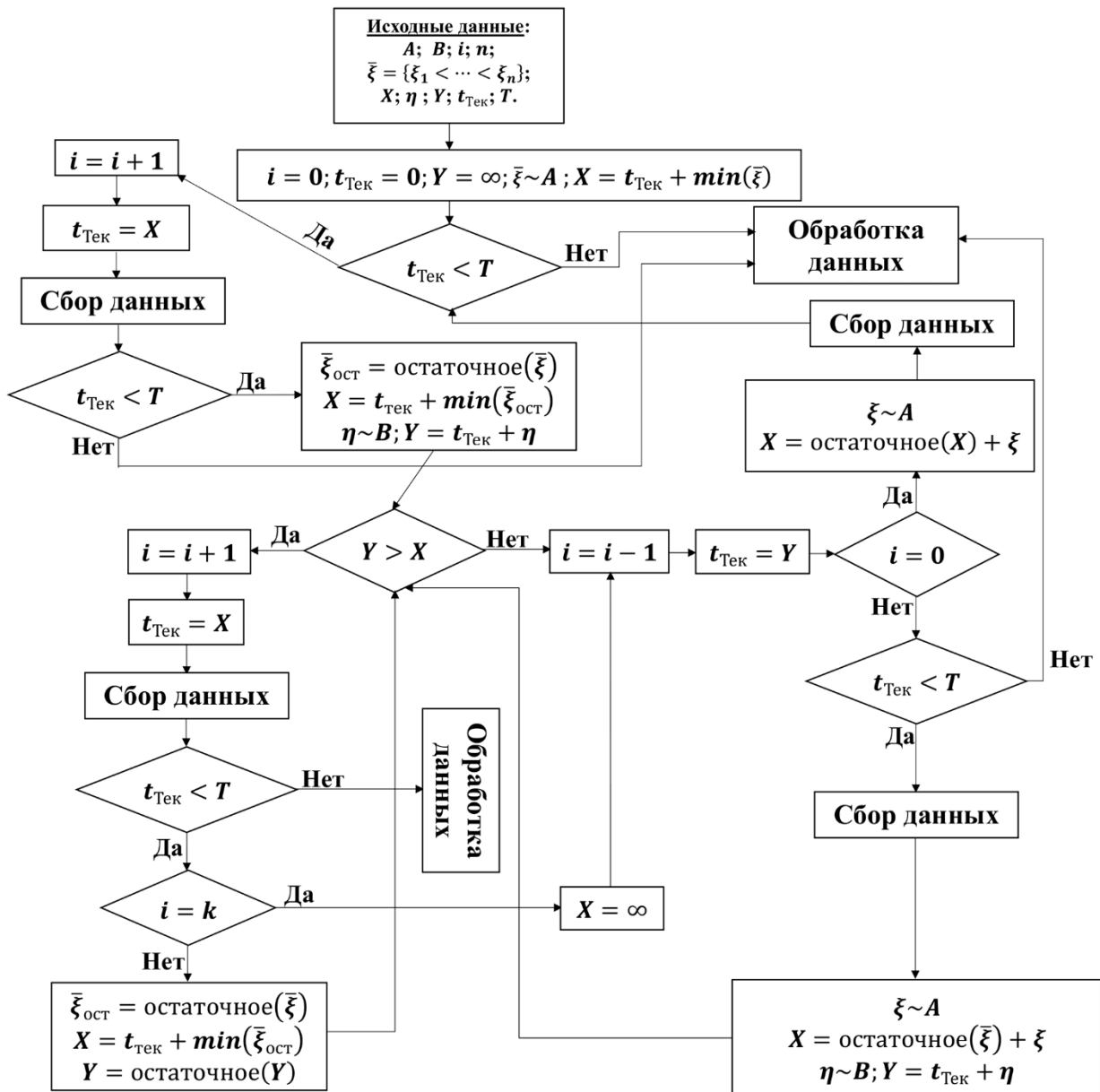


Рисунок. 2.4. Блок-схема для оценки стационарных вероятностей состояний системы типа  $k$ -из- $n$  горячего резерва

**Алгоритм 3.** Псевдокод алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки стационарных вероятностей состояний системы приведён в Приложении В.

**Исходные данные:**

$A$  – случайная величина, время до отказа элемента;

$B$  – случайная величина, время восстановления отказавшего элемента;

$i$  – число отказавших элементов;

$k$  – число элементов, обеспечивающих оперативное функционирование системы;

$n$  – число элементов в системе;

$\xi$  – время отказа элемента;

$X$  – момент отказа элемента в системе;

$\eta$  – время ремонта отказавшего элемента;

$Y$  – момент окончания ремонта элемента в системе;

$t_{\text{Тек}}$  – текущее время;

$T$  – максимальное модельное время.

**Ввод:**  $a_1, b_1, k, n, T, NG, "GI"$  .

$a_1$  – среднее время между отказами элементов,

$b_1$  – среднее время ремонта,

$NG$  – число траекторий случайного процесса, описывающего функционирование системы,

"GI" – произвольный закон распределения

**Вывод:** стационарные вероятности состояний  $P_0; P_1; P_2; \dots; P_k$  .

### 2.2.2. Модель расчета среднего времени жизни системы горячего резервирования типа $k$ -из- $n$

Здесь состояние  $k$  является поглощающим состоянием.

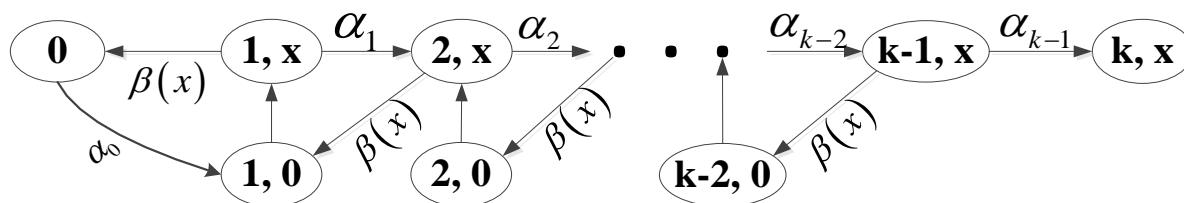


Рисунок 2.5. Граф переходов модифицированного процесса, описывающего функционирование системы горячего резервирования типа  $k$ -из- $n$ .

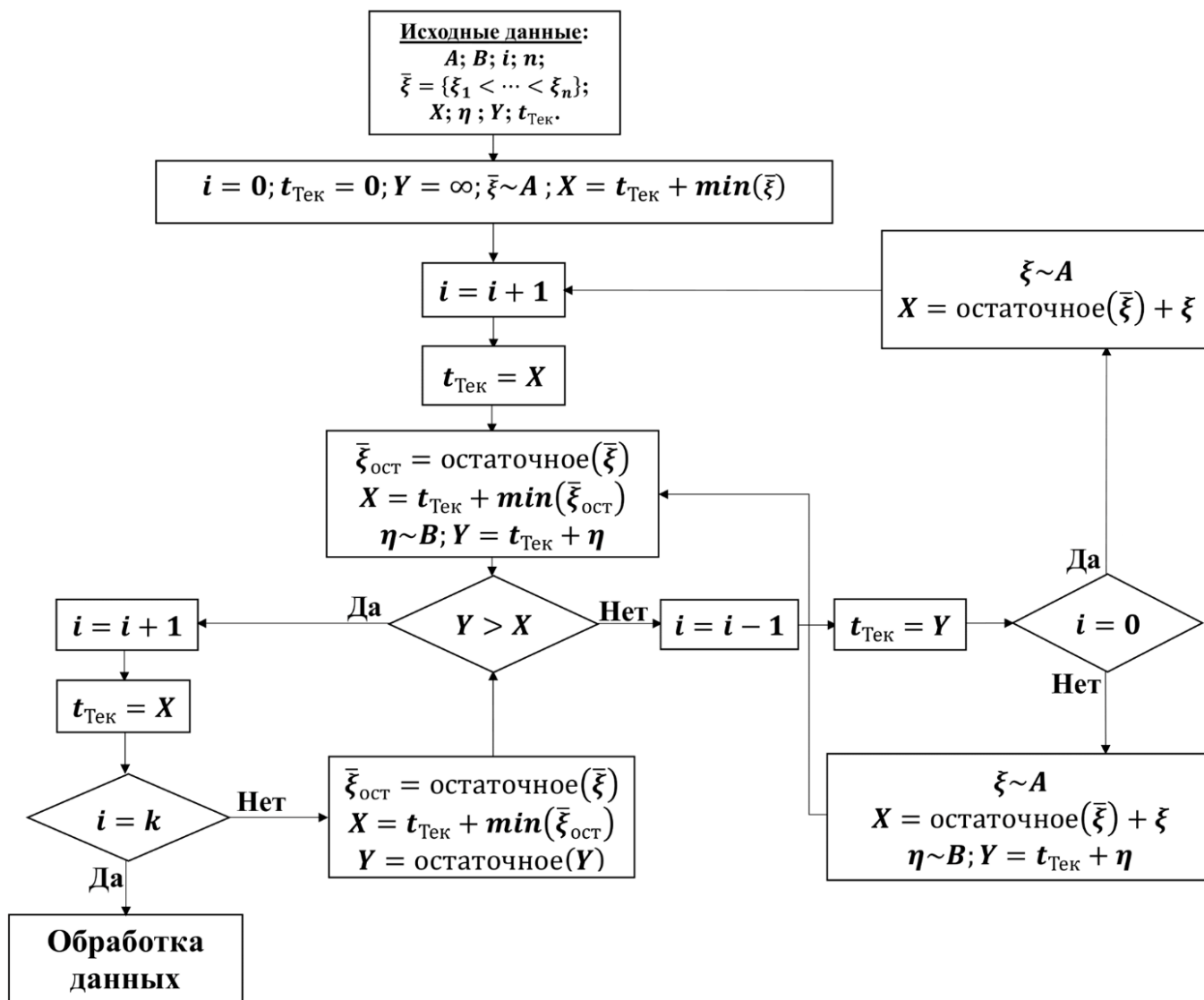


Рисунок. 2.6. Блок-схема имитационной модели для оценки среднего времени жизни и функции надежности системы горячего резерва.

**Алгоритм 4.** Псевдокод алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надежности системы приведён в Приложении Г.

В этом разделе система выходит из строя после отказа  $n$  элементов, а максимальное модельное время  $T = \infty$ .

**Ввод:**  $a_1, b_1, k, n, NG, "GI"$ .

**Вывод:** Оценка среднего времени жизни  $\bar{A}_T$  и функции надежности системы  $R^*(t)$ .

### 2.3. Имитационная модель неоднородной дублированной системы холодного резервирования

#### 2.3.1. Модель расчета стационарных вероятностей состояний неоднородной дублированной системы холодного резервирования

В этой системе все  $n$  элементов работают одновременно, но всего  $k, k = \overline{2, n}$  элементов, обеспечивающих оперативное функционирование системы.

**Алгоритм 5.** Псевдокод алгоритма имитационного моделирования для вычисления стационарных вероятностей состояний системы приведён в Приложении Д.

#### Исходные данные:

$A$  – случайная величина, время до отказа основного элемента;

$B$  – случайная величина, время восстановления отказавшего элемента;

$i_0; i_1; i_2$  – число отказавших элементов;

$n = 2$  – число элементов в системе;

$\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$  – время отказа элемента;

$X$  – момент отказа элемента в системе;

$\eta = \{\eta_1, \eta_2\}$  – время ремонта отказавшего элемента;



$Y$  – момент окончания ремонта элемента в системе;

$t_{\text{Тек}}$  – текущее время;

$T$  – максимальное модельное время.

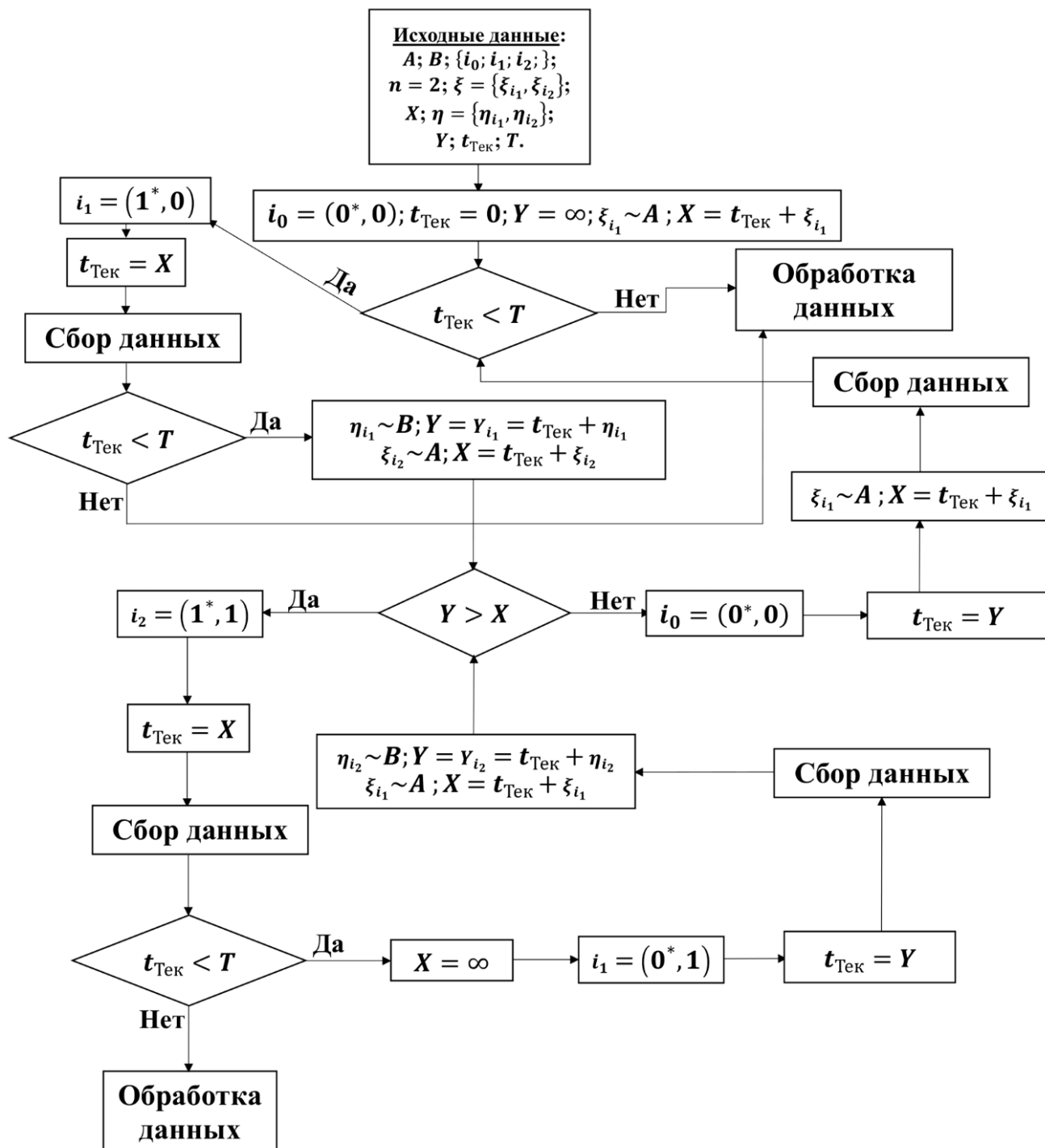


Рисунок. 2.7. Блок-схема имитационной модели для оценки стационарных вероятностей состояния неоднородной системы

**Ввод:**  $a_1, a_2, b_1, n, T, NG, "GI"$ .

$a_1$  – среднее время отказа основного элемента,

$a_2$  – среднее время отказа второго элемента,

$b_1$  – среднее время ремонта,

$NG$  – число траекторий случайного процесса, описывающего функционирование системы,

" $GI$ " – произвольный закон распределения.

**Вывод:** стационарные вероятности состояний  $P_0; P_1; P_2$ .

### 2.3.2. Модель расчета среднего времени жизни и функции надежности неоднородной дублированной системы холодного резервирования

Здесь состояние  $2$  является поглощающим состоянием. На рисунке 2.7 представлен граф переходов модифицированного процесса (с поглощающим состоянием 2), описывающего функционирование неоднородной системы холодного резервирования.

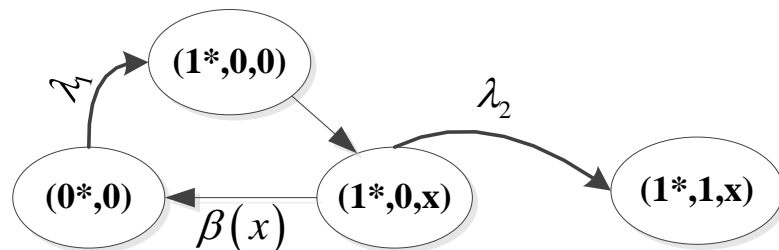


Рисунок 2.7. Граф переходов модифицированного процесса, описывающего функционирование неоднородной системы холодного резервирования

**Алгоритм 6.** Псевдокод алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надежности системы приведён в Приложении Е.

**Исходные данные:**

В этом разделе система выходит из строя после отказа 2 элементов, а максимальное модельное время  $T = \infty$ .

**Ввод:**  $a_1, a_2, b_1, n, NG, "GI"$ .

**Вывод:** Оценка среднего времени жизни  $\overline{VT}$  и функции надежности системы  $R^*(t)$ .

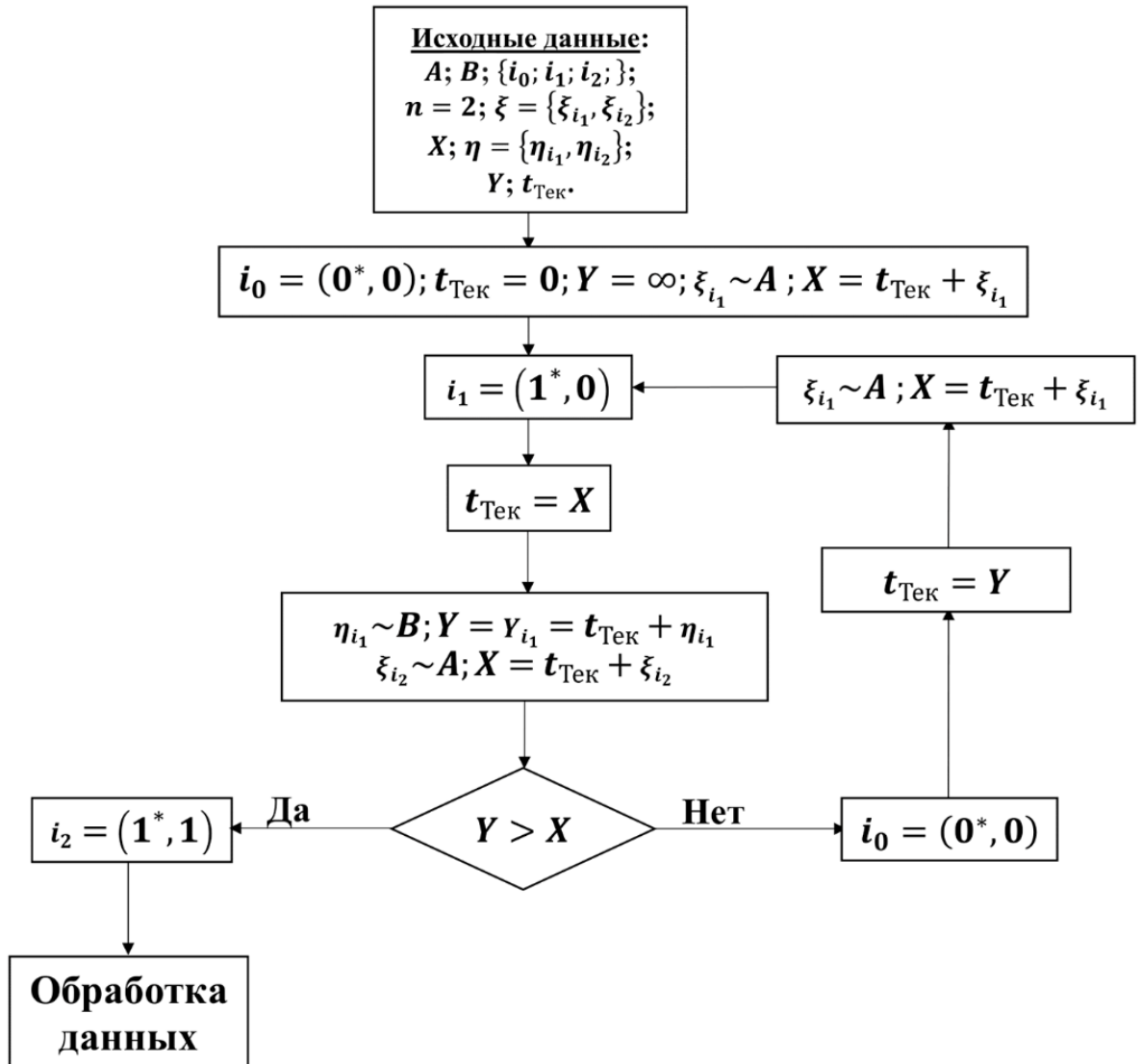


Рисунок. 2.8. Блок-схема имитационной модели для оценки среднего времени жизни неоднородной системы холодного дублирования.

### Глава 3. Численный анализ зависимости характеристик надёжности системы от параметров модели

В настоящей главе на основании аналитических и имитационных результатов, полученных в главах 1 и 2, проводится численный анализ зависимости характеристик надёжности системы от параметров модели. Для численного и графического анализа и сравнения результатов были выбраны следующие распределения времени безотказной работы и времени ремонта элементов:

- Экспоненциальное  $M(\lambda)$ , где  $\lambda = \frac{1}{b}$ ;
- Вейбулла-Гнеденко ( $WG(\lambda, k)$ ), где коэффициент вариации  $\chi = \sqrt{\frac{\Gamma(1+2/k)}{\Gamma(1+1/k)} - 1}$  и математическое ожидание  $b = \lambda \cdot \Gamma(1 + 1/k)$ . Далее можно найти коэффициент формы  $k$  и коэффициент масштаба  $\lambda$  с помощью статистического пакета программирования R;
- Парето ( $PAR(x_m, \alpha)$ ), где коэффициент формы  $\alpha = 1 + \sqrt{\frac{1}{\chi^2} + 1}$  и коэффициент масштаба  $x_m = \frac{b \cdot (\alpha - 1)}{\alpha}$ ;
- Гамма ( $G(\theta, k)$ ), где коэффициент формы  $k = \frac{1}{\chi^2}$  и коэффициент масштаба  $\theta = \frac{b}{k}$ ;
- Логнормальное ( $ln(\mu, \sigma^2)$ ), где параметры  $\sigma = \sqrt{\ln(\chi^2 + 1)}$  и  $\mu = \ln(b) - \sigma^2/2$ .

Зафиксируем среднее время ремонта отказавшего элемента  $EB = b = 1$ , число элементов в системе в случае холодного резервирования  $n = 3$  и параметр  $\gamma = 0,01$ ; а также число элементов, обеспечивающих оперативное функционирование системы в случае горячего резервирования  $k = n = 3$ . Для приведения стационарных вероятностей состояний системы и графиков зависимости безотказной работы системы от относительной скорости восстановления рассмотрим следующие фиксированные значения среднего времени безотказной работы основного элемента:  $EA = 10$  и  $EA = 100$ .

### 3.1. Анализ стационарных характеристик надежности однородной резервированной системы типа $\langle M_n / GI/1 \rangle$ с помощью аналитического моделирования

Рассмотрим частные случаи модели восстанавливаемой однородной системы  $\langle M_n / GI/1 \rangle$  при  $n=3$  с экспоненциальным законом распределения в.б.р. и различными законами распределения времени ремонта отказавших элементов, и приведем полученные по аналитическим формулам из главы 1 значения стационарных вероятностей состояний системы при разных значениях коэффициента вариации для разных типов резерва (холодного, облегченного и горячего).

В таблице 3.1, в таблицах 3.2.а, 3.2.б, 3.2.в, в таблицах 3.3.а, 3.3.б, 3.3.в, в таблицах 3.4.а, 3.4.б, 3.4.в, и в таблицах 3.5.а, 3.5.б, 3.5.в приведены значения стационарных вероятностей состояний  $p_i$  восстанавливаемой системы  $\langle M_n / M / 1 \rangle$ ;  $\langle M_n / WG / 1 \rangle$ ;  $\langle M_n / PAR / 1 \rangle$ ;  $\langle M_n / G / 1 \rangle$  и  $\langle M_n / LN / 1 \rangle$ , соответственно.

Таблица 3.1. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / M / 1 \rangle$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,90009	0,8814300	0,7320644
$p_1$	0,0900090	0,1057716	0,2196193
$p_2$	0,0090009	0,01163488	0,04392386
$p_3$	0,00090009	0,001163488	0,004392388

Таблица 3.2.а. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / WG / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9000408	0,8105807	0,7307959
$p_1$	0,09272653	0,1694790	0,2325272
$p_2$	0,006825045	0,01881328	0,034598351
$p_3$	0,0004076527	0,001127057	0,002078529

Таблица 3.2.б. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / WG / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,90009	0,8110300	0,7320644
$p_1$	0,0900090	0,1622060	0,2196193
$p_2$	0,0090009	0,02433090	0,04392386
$p_3$	0,00090009	0,002433091	0,004392388

Таблица 3.2.в. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / WG / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9002812	0,8121429	0,7348039
$p_1$	0,0839737	0,1472166	0,19469054
$p_2$	0,01293352	0,03346053	0,05816863
$p_3$	0,00281153	0,007180016	0,01233696

Таблица 3.3.а. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / PAR / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9000389	0,8104609	0,7303847
$p_1$	0,09358215	0,1719743	0,2372949
$p_2$	0,005985843	0,01650778	0,03040909
$p_3$	0,0003930672	0,001057005	0,001911274

Таблица 3.3.б. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / PAR / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9001056	0,8107895	0,7311686
$p_1$	0,0918723	0,1678053	0,2303702
$p_2$	0,006974047	0,01881811	0,03406833

$p_3$	0,001048004	0,002587073	0,00439295
-------	-------------	-------------	------------

Таблица 3.3.в. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / PAR / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9001898	0,811130	0,7319072
$p_1$	0,09023795	0,1640611	0,2244219
$p_2$	0,007671127	0,02034779	0,0363624
$p_3$	0,001901073	0,004461084	0,007308473

Таблица 3.4.а. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / G / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9000322	0,8104702	0,7304605
$p_1$	0,09343494	0,1714419	0,2361282
$p_2$	0,006211072	0,01719461	0,03175721
$p_3$	0,0003218049	0,0008932649	0,001654105

Таблица 3.4.б. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / G / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячего резерв
$p_0$	0,9000900	0,8110300	0,7320644
$p_1$	0,090009	0,1622060	0,2196193
$p_2$	0,0090009	0,02433090	0,04392386
$p_3$	0,00090009	0,002433091	0,004392388

Таблица 3.4.в. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / G / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
-------	-----------------	--------------------	----------------

$p_0$	0,9004533	0,8130704	0,7370167
$p_1$	0,07902131	0,1351677	0,1749961
$p_2$	0,01599352	0,04040374	0,06879055
$p_3$	0,004531845	0,01135819	0,0191966

Таблица 3.5.а. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / LN / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9000331	0,8104701	0,7304539
$p_1$	0,09344711	0,1714916	0,23624732
$p_2$	0,00618907	0,01712200	0,03160472
$p_3$	0,0003307431	0,0009163831	0,001694061

Таблица 3.5.б. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / LN / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9001027	0,8110168	0,7319434
$p_1$	0,09024617	0,1630747	0,2215145
$p_2$	0,008623633	0,02318657	0,04170696
$p_3$	0,00102745	0,002721951	0,004835142

Таблица 3.5.в. Стационарные вероятности состояний восстанавливаемой системы  $\langle M_n / LN / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$

$p_i$	Холодный резерв	Облегченный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9004675	0,8126490	0,7356058
$p_1$	0,0820808	0,1439501	0,1909169
$p_2$	0,01277691	0,03228708	0,05529029
$p_3$	0,004674812	0,01111384	0,01818701

При анализе численных значений, приведенных в таблицах, видно, что для всех рассматриваемых распределений чем меньше коэффициент



вариации, тем меньше стационарная вероятность отказа восстанавливаемой системы  $\langle M_n / GI \rangle$ . Также очевидно, что холодный резерв является самым надежным резервом.

На рисунке 3.1 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы  $1 - p_n$  восстанавливаемой системы  $\langle M_n / M \rangle$  холодного и горячего резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho = \frac{EA}{EB}$  для различных ФР времени ремонта при разных значениях коэффициента вариации. Все графики приведены в разном масштабе по оси ординат для более наглядной демонстрации различий кривых.

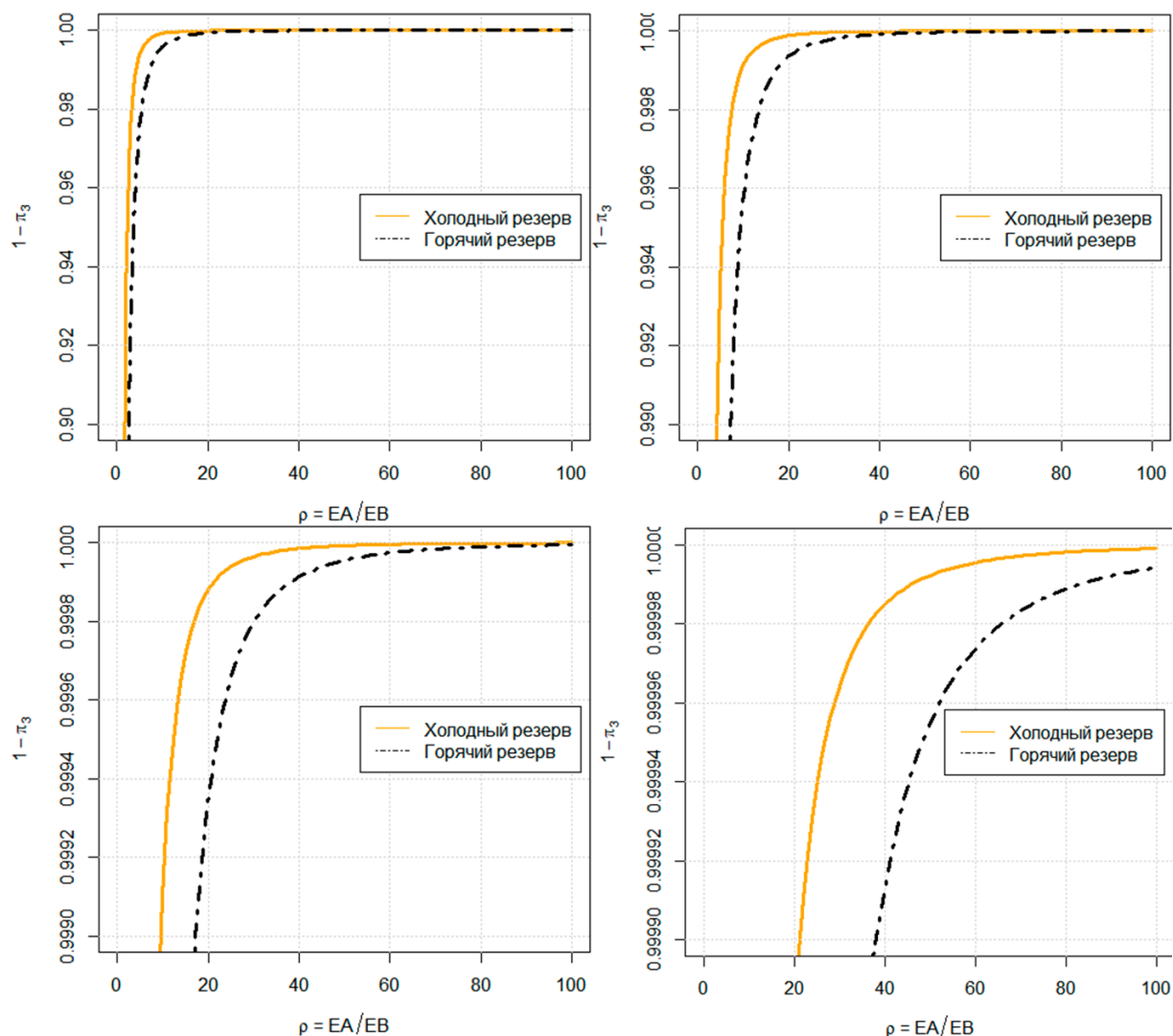


Рис. 3.1. Графики зависимости вероятности безотказной работы  $1 - p_3$  восстанавливаемой системы  $\langle M_3 / M / 1 \rangle$  холодного и горячего резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho$

Анализ графических результатов из рисунка 3.1 подтверждает вывод о том, что холодный резерв является самым надежным резервом.

На рисунках 3.2–3.5 представлены графики зависимости вероятности безотказной работы  $1 - p_n$  восстанавливаемой системы холодного резервирования  $\langle M_n / WG / 1 \rangle$ ,  $\langle M_n / PAR / 1 \rangle$ ,  $\langle M_n / G / 1 \rangle$  и  $\langle M_n / LN / 1 \rangle$ , соответственно, от относительной скорости восстановления для разных значений коэффициента вариации.

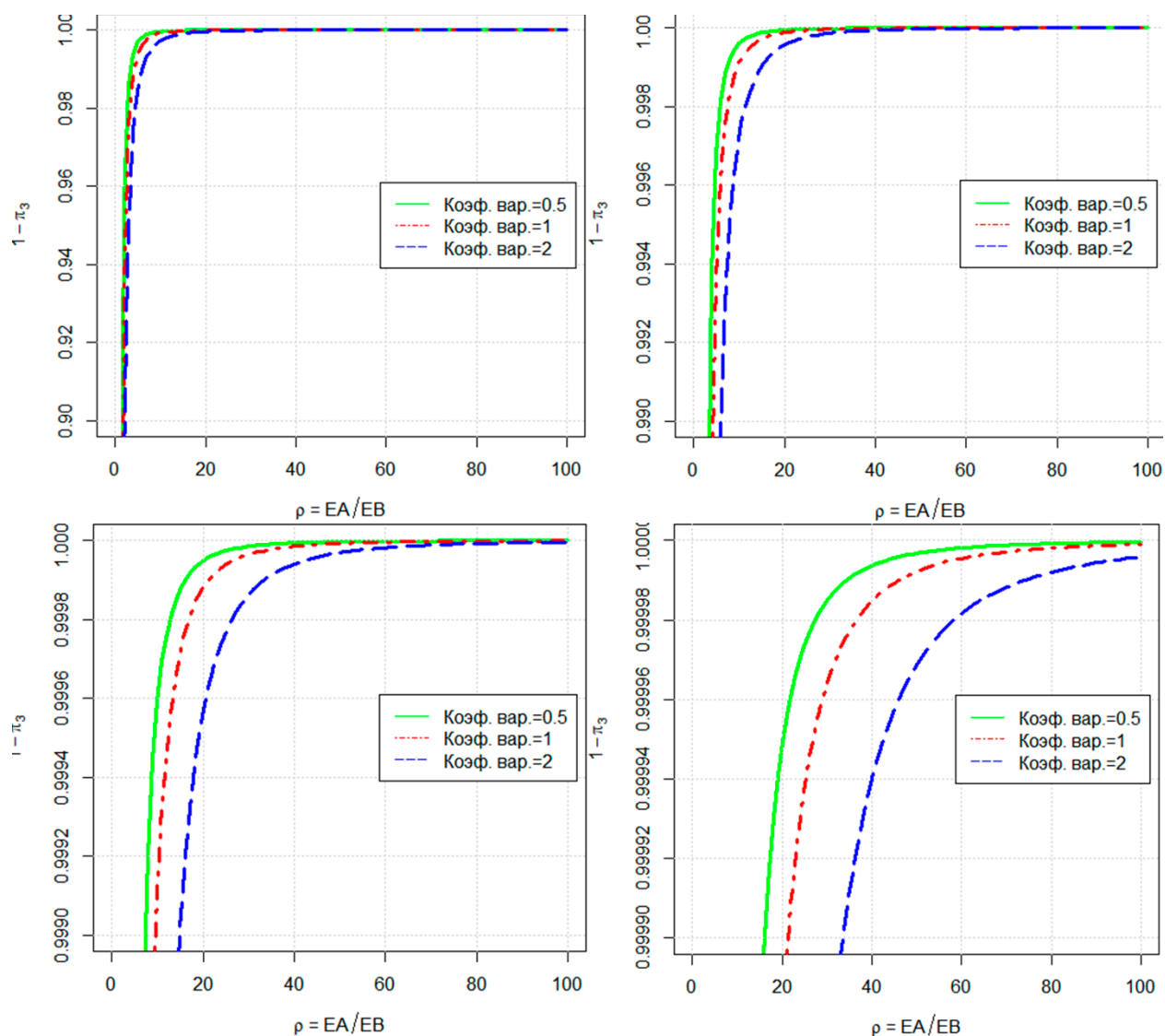


Рис. 3.2. Графики зависимости вероятности безотказной работы  $1-p_3$  восстанавливаемой системы  $\langle M_3/WG/1 \rangle$  холодного резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho$

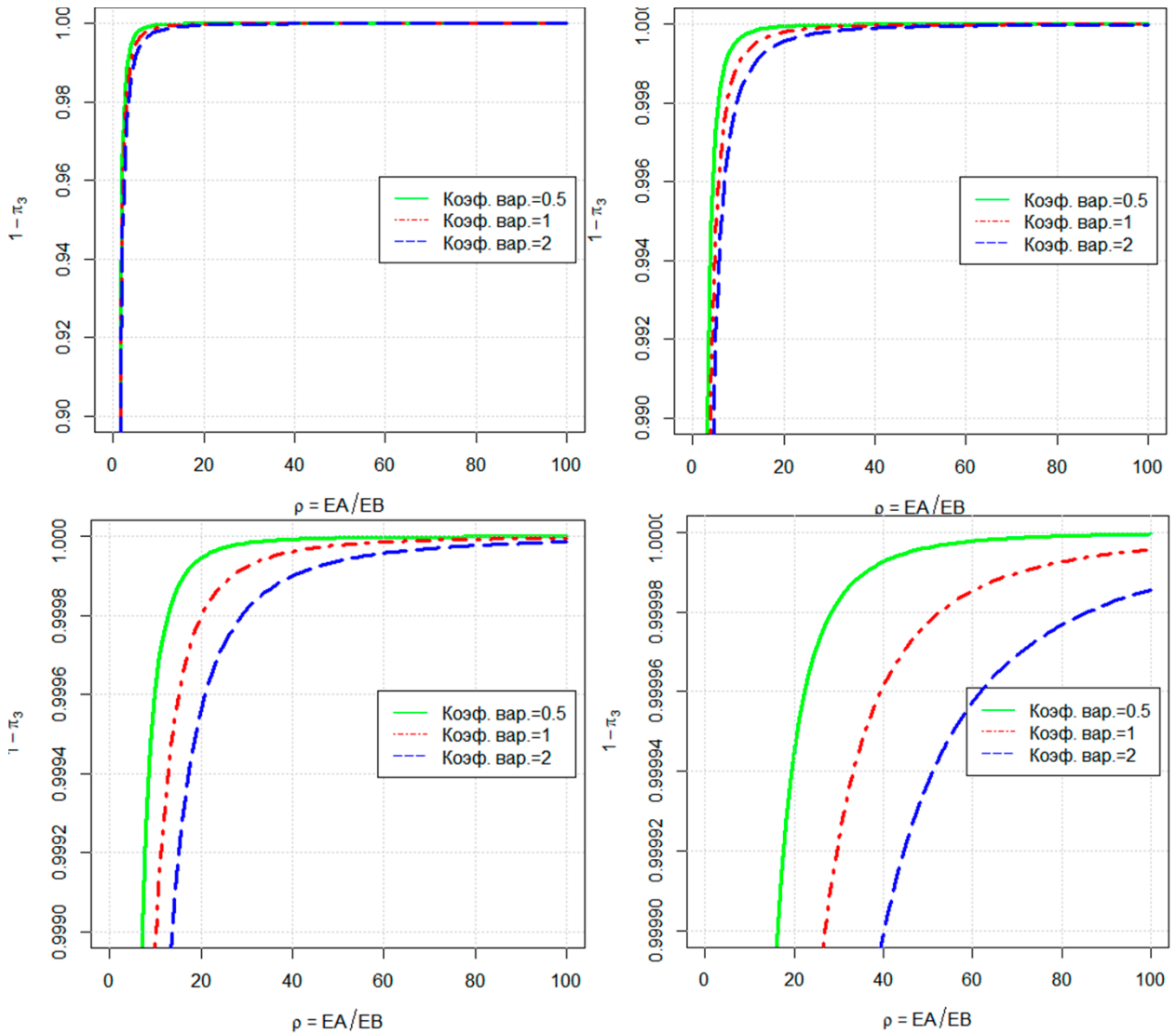


Рис. 3.3. Графики зависимости вероятности безотказной работы  $1-p_3$  восстанавливаемой системы  $\langle M_3/PAR/1 \rangle$  холодного резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho$

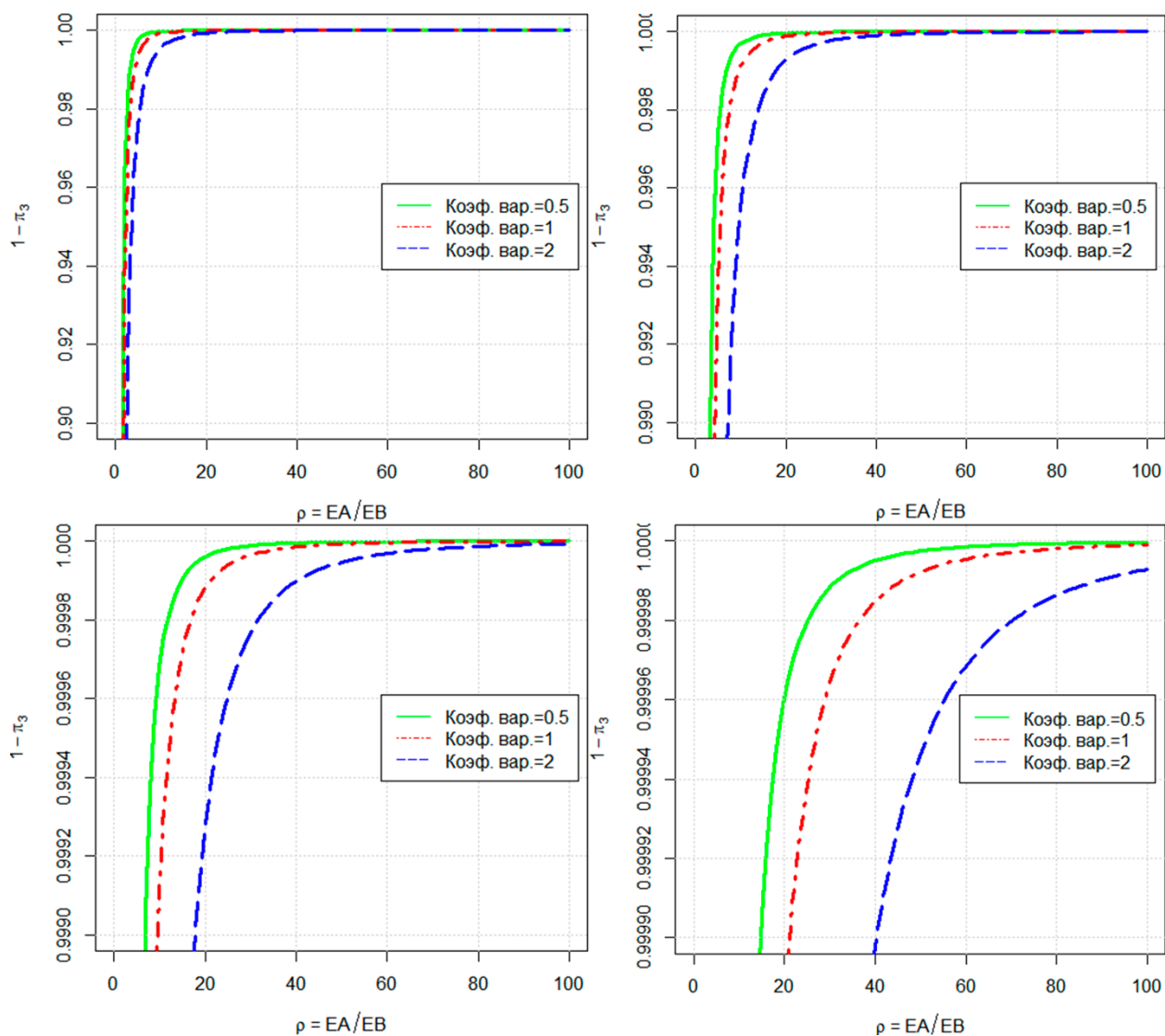


Рис. 3.4. Графики зависимости вероятности безотказной работы  $1 - p_3$  восстанавливаемой системы  $\langle M_3 / G / 1 \rangle$  холодного резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho$

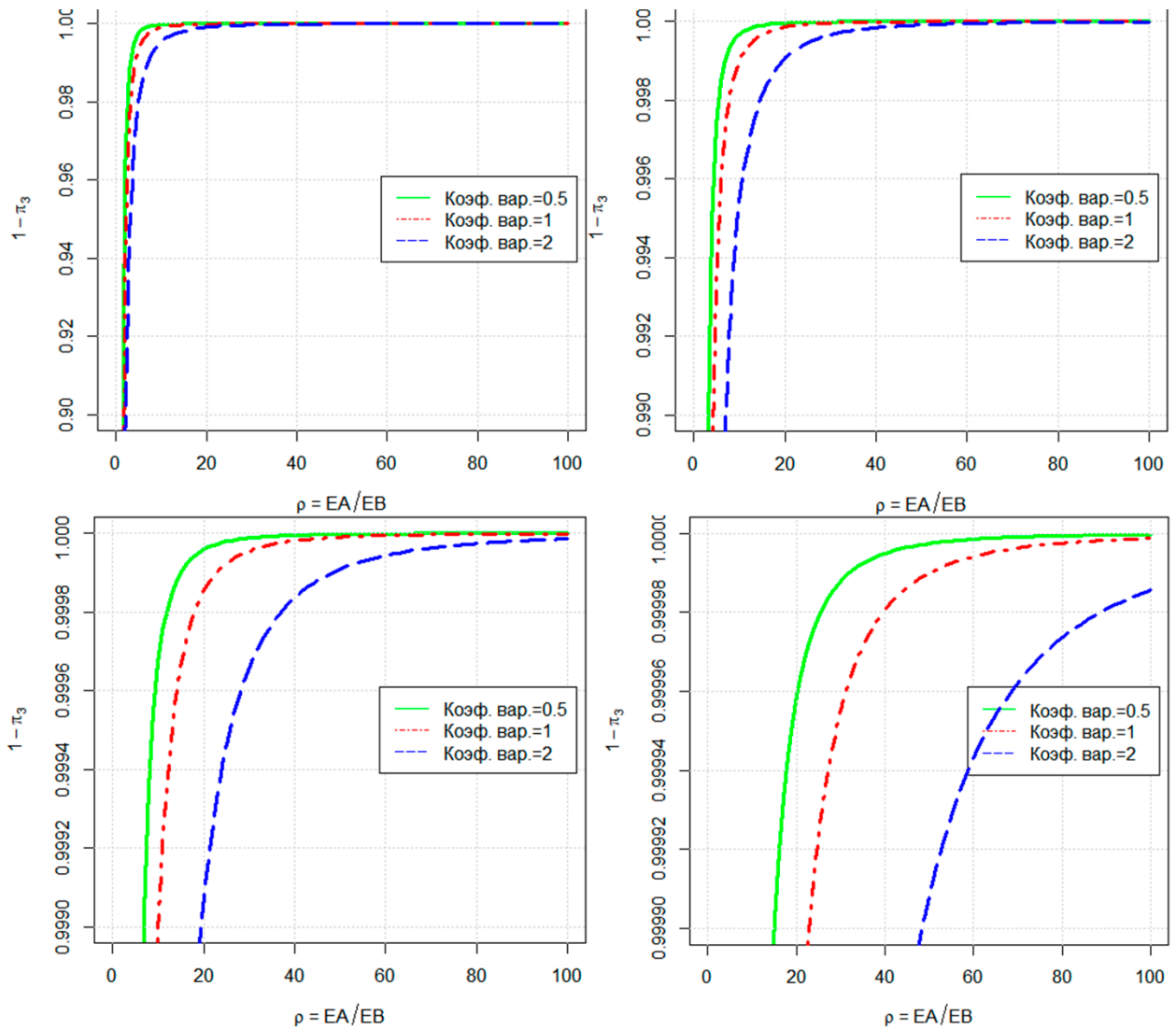


Рис. 3.5. Графики зависимости вероятности безотказной работы  $1 - p_3$  восстанавливаемой системы  $\langle M_3 / LN / 1 \rangle$  холодного резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho$

Анализ графических результатов из рисунков 3.2–3.5 подтверждает вывод о том, что чем меньше коэффициент вариации, тем меньше стационарная вероятность отказа системы, и холодный резерв является самым надежным резервом.

### 3.2. Анализ стационарных характеристик надежности однородной резервированной системы типа $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ с помощью имитационного моделирования

Рассмотрим имитационную модель однородной резервированной системы типа  $\langle M_n / GI / 1 \rangle$  с разными коэффициентами вариации, с

экспоненциальным законом распределения времени безотказной работы.

В таблице 3.6; в таблицах 3.7.а, 3.7.б, 3.7.в, в таблицах 3.8.а, 3.8.б, 3.8.в, в таблицах 3.9.а, 3.9.б, 3.9.в и в таблицах 3.10.а, 3.10.б, 3.10.в приведены значения стационарных вероятностей состояний  $P_i$  восстанавливаемой системы  $\langle M_n / GI / 1 \rangle$ ;  $\langle M_n / WG / 1 \rangle$ ;  $\langle M_n / PAR / 1 \rangle$ ;  $\langle M_n / G / 1 \rangle$  и  $\langle M_n / LN / 1 \rangle$ , соответственно.

Таблица 3.6. Стационарные вероятности состояний  $\langle M_n / M / 1 \rangle$

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9004015	0,7320375
$p_1$	0,08987053	0,2196861
$p_2$	0,009069777	0,04390234
$p_3$	0,0008932429	0,004397997

Таблица 3.7.а. Значения  $p_i \langle M_n / WG / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,8999980	0,7306454
$p_1$	0,09270812	0,2326026
$p_2$	0,006809510	0,03458021
$p_3$	0,0004069830	0,002067684

Таблица 3.7.б. Значения  $p_i \langle M_n / WG / 1 \rangle$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9002723	0,7317197
$p_1$	0,09014544	0,2195763
$p_2$	0,008996562	0,04398201
$p_3$	0,0008906469	0,004328322

Таблица 3.7.в. Значения  $p_i < M_n / WG / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9006116	0,7349822
$p_1$	0,08388265	0,1947575
$p_2$	0,01290878	0,05818140
$p_3$	0,002946221	0,01236757

Таблица 3.8.а. Значения  $p_i < M_n / PAR / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,8998977	0,7304877
$p_1$	0,09369787	0,2374223
$p_2$	0,005968493	0,03039807
$p_3$	0,0004042285	0,001888635

Таблица 3.8.б. Значения  $p_i < M_n / PAR / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,8999527	0,7312992
$p_1$	0,09179325	0,2304236
$p_2$	0,006903860	0,03387086
$p_3$	0,001123684	0,004260042

Таблица 3.8.в. Значения  $p_i < M_n / PAR / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9001544	0,7316736
$p_1$	0,09051817	0,2244340
$p_2$	0,007692908	0,03638337
$p_3$	0,001953185	0,007198652

Таблица 3.9.а. Значения  $p_i < M_n / G / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0,5$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9000782	0,7304204
$p_1$	0,09352504	0,2359244
$p_2$	0,006243602	0,03172713
$p_3$	0,0003157376	0,001670021

Таблица 3.9.б. Значения  $p_i < M_n / G / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9001921	0,7321159
$p_1$	0,08999021	0,2194551
$p_2$	0,00903327	0,04391759
$p_3$	0,0009264406	0,004413286

Таблица 3.9.в. Значения  $p_i < M_n / G / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9006239	0,7367516
$p_1$	0,07900911	0,1748437
$p_2$	0,01595549	0,06857178
$p_3$	0,004446959	0,01925085

Таблица 3.10.а. Значения  $p_i < M_n / LN / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 0.5$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,8999775	0,7303048
$p_1$	0,09351034	0,2361584
$p_2$	0,006189071	0,03169463
$p_3$	0,0003189706	0,001694712



Таблица 3.10.б. Значения  $p_i < M_n / LN / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 1$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,8999571	0,7319372
$p_1$	0,09026359	0,2214305
$p_2$	0,008603328	0,04172252
$p_3$	0,001043573	0,004871132

Таблица 3.10.в. Значения  $p_i < M_n / LN / 1 >$  с коэффициентом вариации  $\chi = 2$ 

$p_i$	Холодный резерв	Горячий резерв
$p_0$	0,9002510	0,7357976
$p_1$	0,08217263	0,1908853
$p_2$	0,01274521	0,05537689
$p_3$	0,004695356	0,01834329

Результаты, полученные методом имитационного моделирования (таблицы 3.6–3.10.в), отлично согласуются с результатами, полученными по аналитическим моделям (таблицы 3.1–3.5.в), и видно, что для всех рассматриваемых распределений стационарная вероятность отказа системы  $p_3$  при горячем резервировании больше, чем при холодном, то есть самой надежной моделью является модель с холодным типом резерва.

В дальнейших разделах зафиксируем коэффициент вариации  $\chi = 0,5$ .

На рисунке 3.6 представлены графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы  $1 - p_n$  восстанавливаемой системы  $< M_n / GI / 1 >$  холодного и горячего резервирования от относительной скорости восстановления  $\rho$ , построенные как по явным аналитическим выражениям, так и с помощью разработанной имитационной модели.

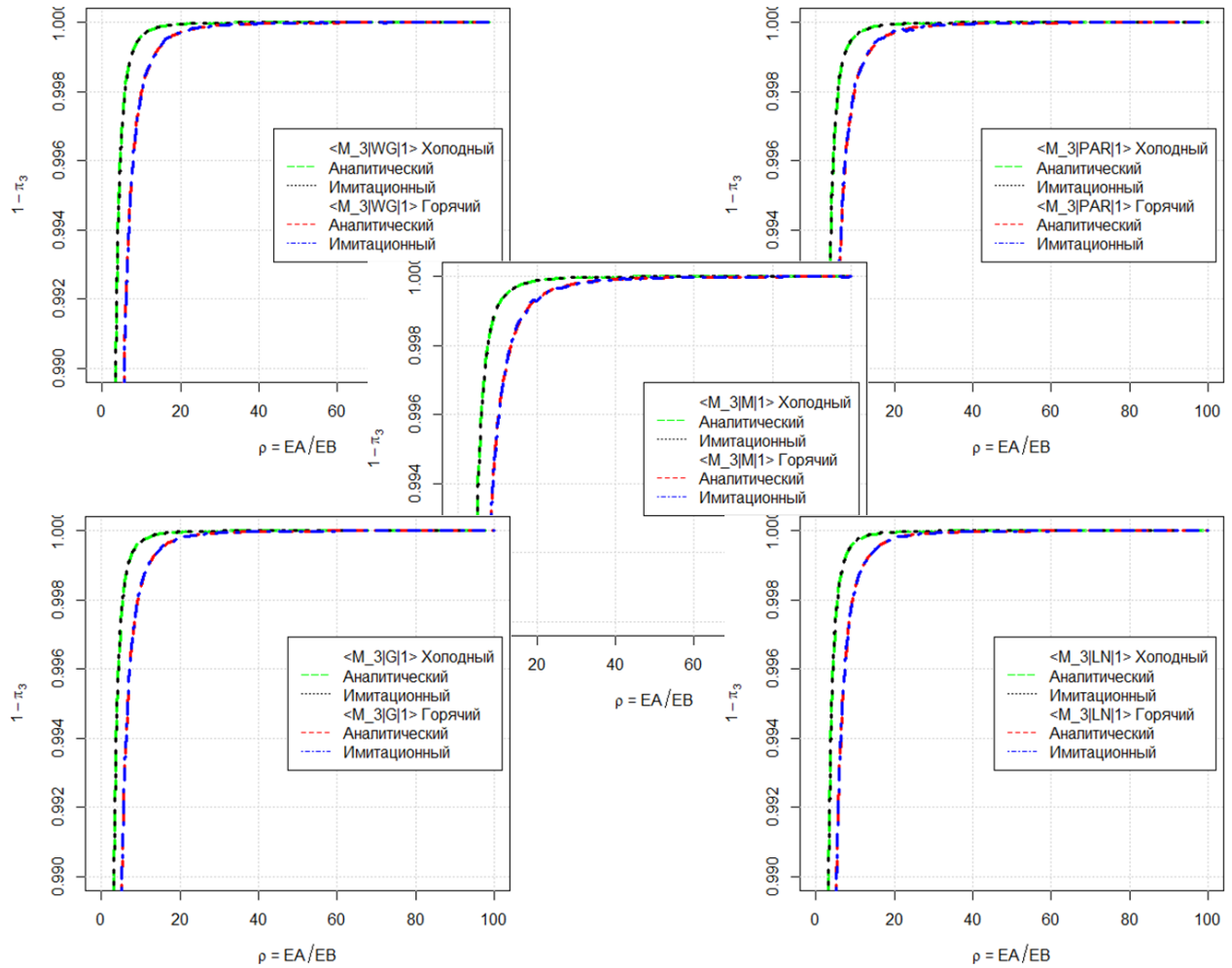


Рис. 3.6. Графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы системы  $\langle M_3 / GI / 1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$ , построенные как по явным аналитическим выражениям, так имитационно

В таблице 3.11 приведены значения относительной погрешности при вычислении стационарной вероятности безотказной работы системы с помощью имитационной модели по сравнению со значениями, полученными по точным аналитическим формулам. Для сравнения результатов, полученных с помощью явных аналитических выражений и имитационной модели, используется следующая формула относительной погрешности, которая определяется как отношение абсолютной погрешности к истинному значению:

$$\varepsilon_{BOP} = \frac{\left| (1 - p_3^{\text{аналит}}) - (1 - p_3^{\text{имит}}) \right|}{(1 - p_3^{\text{аналит}})} \quad (62)$$

Таблица 3.11 Относительная погрешность имитационного моделирования системы  $\langle M_3 / GI / 1 \rangle$  холодного ( $\varepsilon_{BOP}$  -Хол.) и горячего ( $\varepsilon_{BOP}$  -Гор.) резервирования.

$GI$	$M$	$WG$	$PAR$	$G$	$LN$
$\varepsilon_{BOP}$ -Хол.	6,8533E-06	6,6997E-07	1,1166E-05	6,0693E-06	1,1776E-05
$\varepsilon_{BOP}$ -Гор.	5,6338E-06	1,0866E-05	2,2682E-05	1,5942E-05	6,5211E-07

Сравнение графических результатов, полученных по имитационной модели и по явным выражениям, а также анализ относительной погрешности имитационного моделирования показывают, что разработанная имитационная модель хорошо аппроксимирует аналитическую модель, и может быть использована в случаях, когда не представляется возможным получить выражения для характеристик надежности исследуемой системы в явном аналитическом виде, когда распределение в.б.р. элементов не является экспоненциальным.

### 3.3. Анализ стационарных характеристик надежности однородной резервированной системы типа $\langle GI_n / GI / 1 \rangle$ с помощью имитационного моделирования

Рассмотрим имитационную модель и исследуем надежность однородной резервированной системы типа  $\langle GI_n / GI / 1 \rangle$  в самом общем случае, когда произвольным является как закон распределения времени безотказной работы элемента  $T1$ , так и закон распределения времени ремонта  $T2$  отказавшего элемента.

Таблица 3.12. Вероятность безотказной работы системы  $\langle GI_3 / GI / 1 \rangle$  в случае холодного (Хол.) и горячего (Гор.) резерва при  $\rho = 10$

$T1$	$T2$	$M$	$WG$	$PAR$	$G$	$LN$
M	Хол	0,9991068	0,999593	0,9995958	0,9996843	0,999681
	Гор.	0,9956020	0,997912 7	0,9980849	0,9983625	0,9983053
WG	Хол	0,9999343	0,998568	0,9987632	0,9988427	0,9988222

	.		1			
	Гор.	0,9562182	0,9662800	0,9706439	0,9691687	0,9692991
PAR	Хол	1	1	0,9999162	1	1
	Гор.	0,9561302	0,9672525	0,9718829	0,9704578	0,9706023
G	Хол	0,9999967	0,999876	0,9997565	0,9999186	0,9999004
	Гор.	0,9354252	0,9373337	0,9381192	0,9379434	0,938171
LN	Хол	0,9999992	0,9999844	0,9998337	0,9999938	0,9999841
	Гор.	0,8261992	0,8191771	0,9514364	0,8180032	0,8183283

Полученные численные результаты показывают, что более надежной моделью системы при  $\rho = 10$  является система холодного резервирования с распределением Парето времени безотказной работы элементов.

Анализ графических результатов исследования надежности системы  $\langle GI_3 / GI / 1 \rangle$  помогает определить наглядно какая модель системы имеет наибольшую стационарную надежность при изменении параметра относительной скорости восстановления.

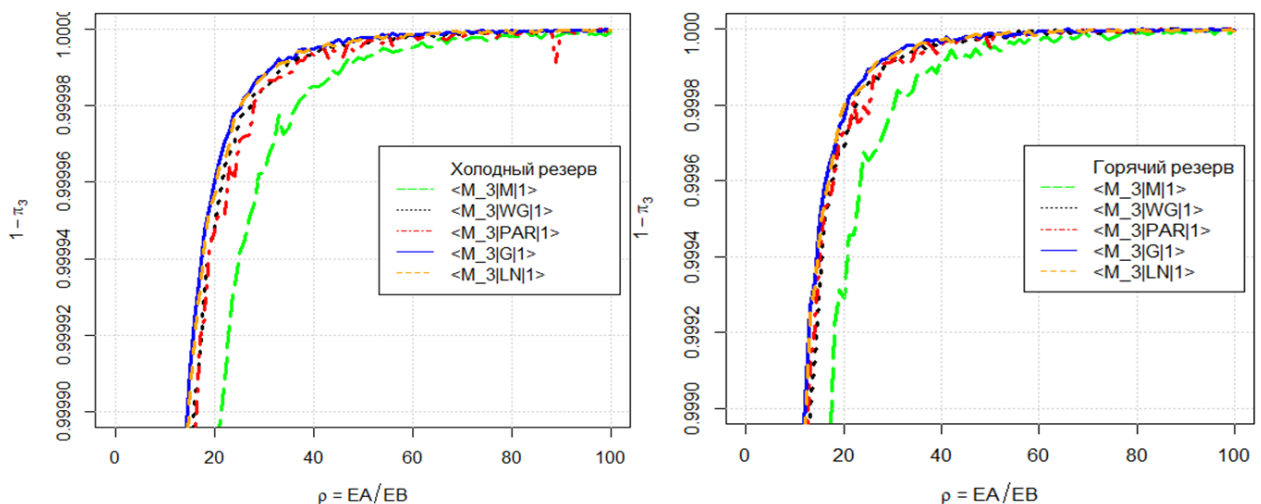


Рис. 3.7. Графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы системы  $\langle M_3 / GI / 1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

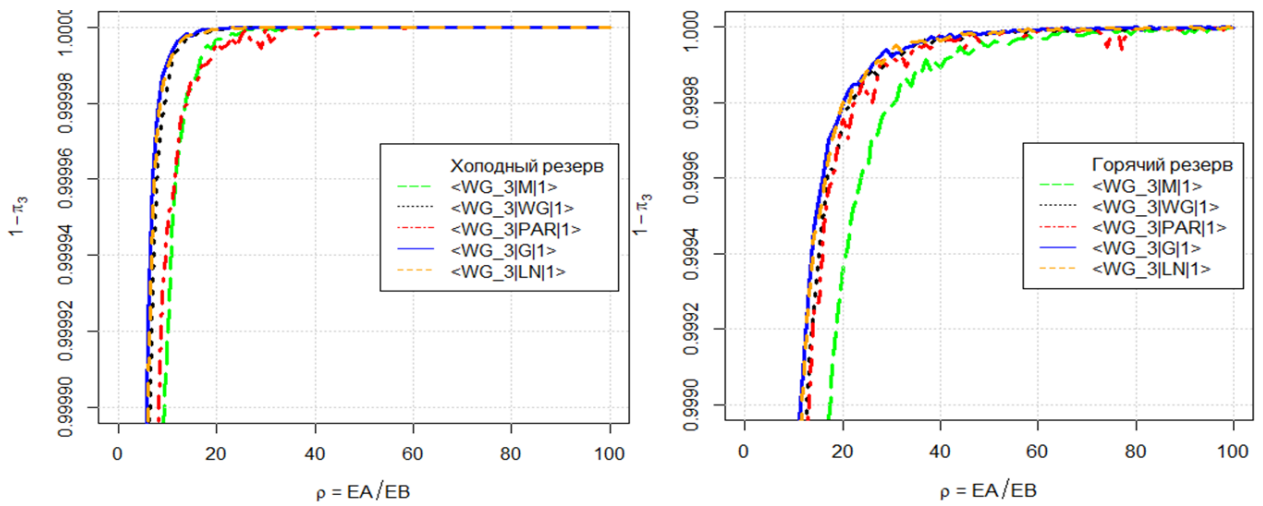


Рис. 3.8. Графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы системы  $\langle WG_3 / GI / 1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

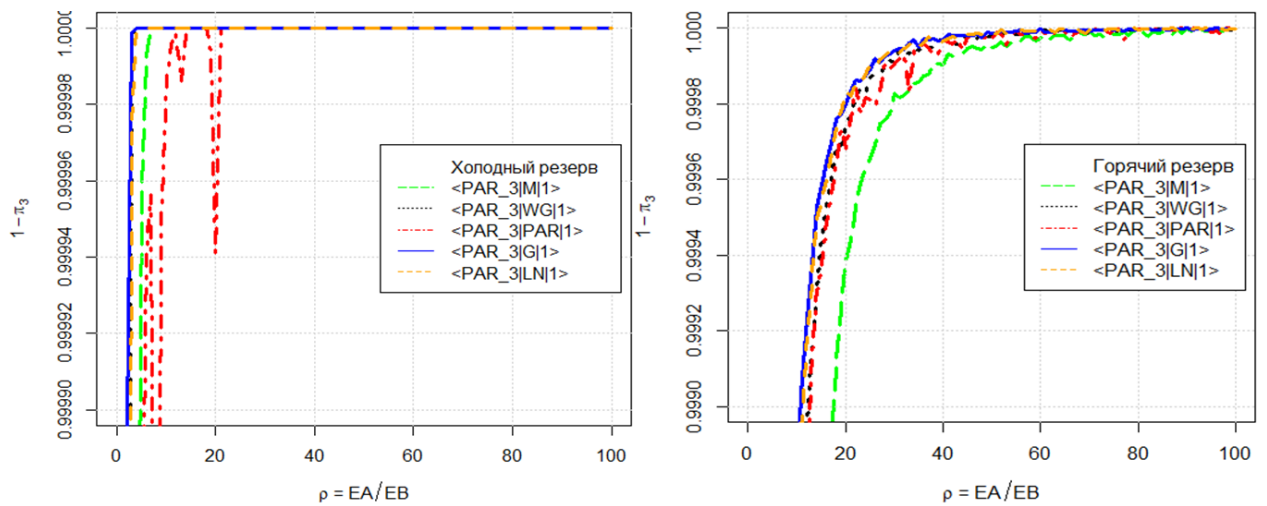


Рис. 3.9. Графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы системы  $\langle PAR_3 / GI / 1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

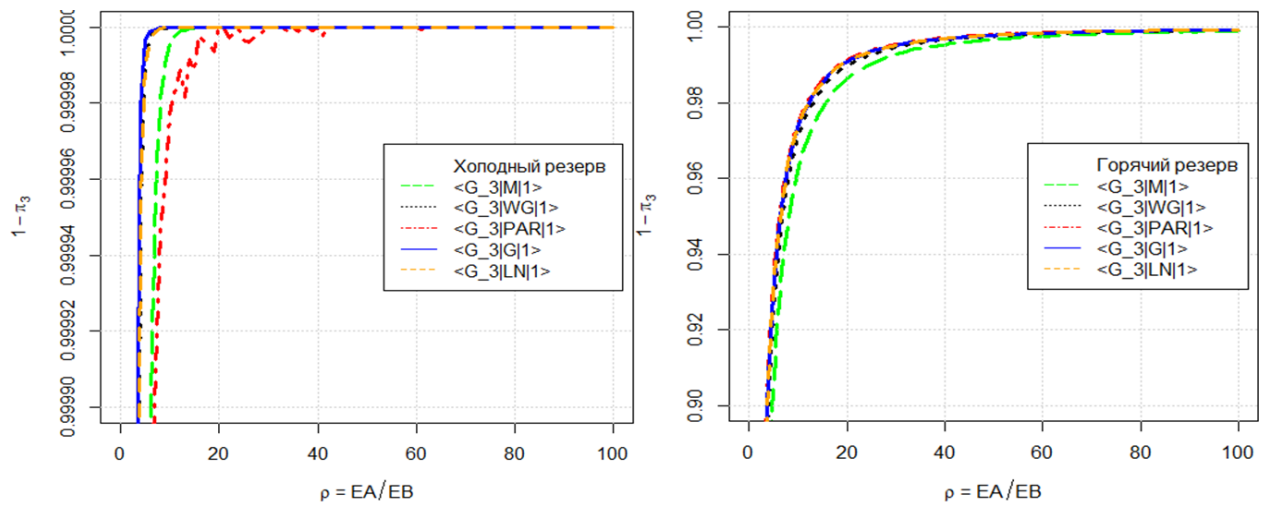


Рис. 3.10. Графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы системы  $\langle G_3 / GI / 1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

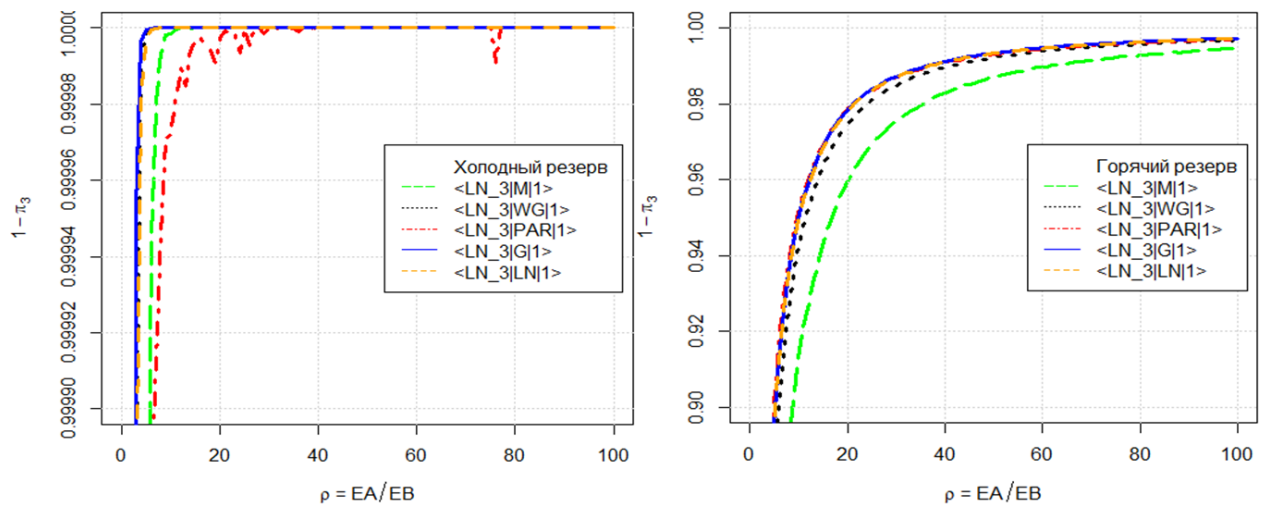


Рис. 3.11. Графики зависимости стационарной вероятности безотказной работы системы  $\langle LN_3 / GI / 1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

Из рисунков 3.7-3.11 видно, что наиболее надежной моделью системы является система холодного резервирования с Гамма распределением времени ремонта отказавших элементов.

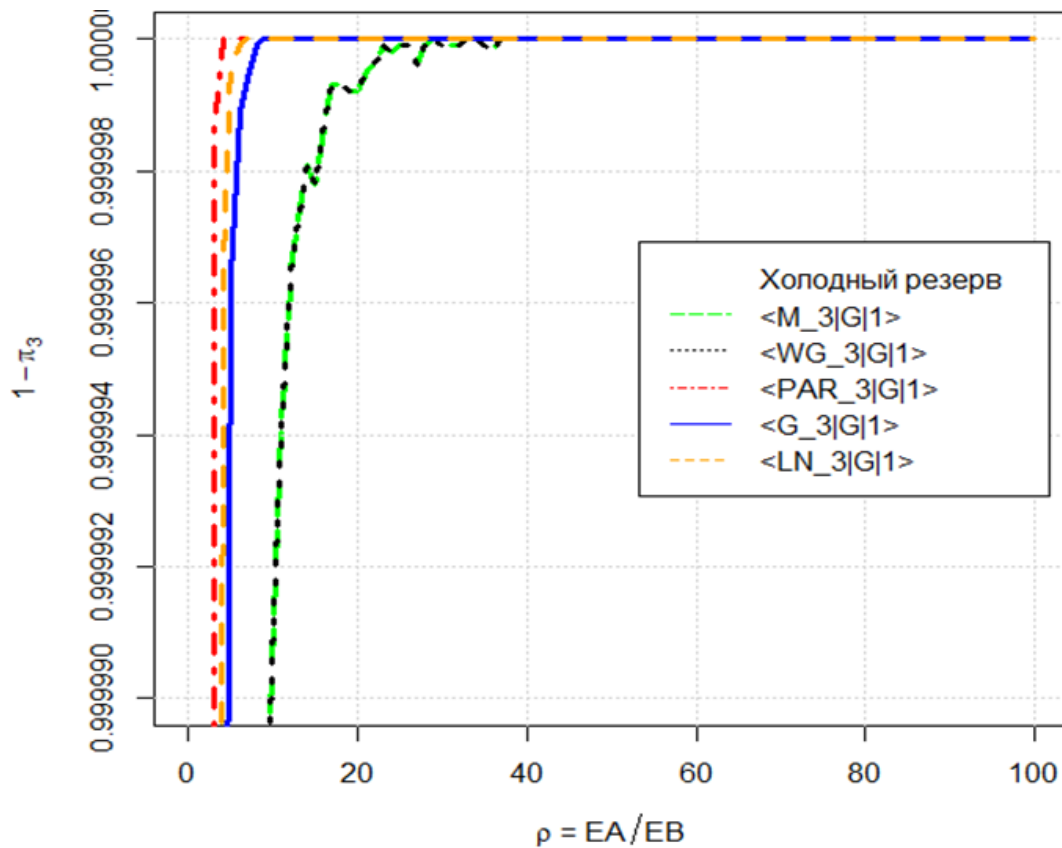


Рис. 3.12. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы  $\langle G_3/G/1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

Достаточно высокий уровень надежности системы достигается при сравнительно небольшом превышении единичного значения относительной скорости восстановления для модели  $\langle PAR_3/G/1 \rangle$ . Следовательно, самой надежной моделью системы является модель системы с распределением Парето времени безотказной работы элементов и с Гамма распределением времени ремонта отказавших элементов. А также графические результаты демонстрируют высокую асимптотическую нечувствительность стационарной надежности системы – хорошо видно, что различия между кривыми при редких отказах элементов системы (т.е. с ростом  $\rho$ ) становятся исчезающе малыми для всех рассматриваемых распределений времени ремонта элементов системы [86].

### 3.4. Анализ нестационарных характеристик надёжности однородной резервированной системы типа $\langle GI_n / GI / 1 \rangle$ с помощью имитационного моделирования

В таблице 3.13 приведены значения оценки среднего времени жизни системы  $\langle GI_3 / GI / 1 \rangle$  холодного и горячего резервирования, полученные методом имитационного моделирования при  $EA = 2; EB = 1; \chi = 0,5$ .

Таблица 3.13 Оценка среднего времени жизни системы  $\langle GI_3 / GI / 1 \rangle$  холодного (Хол.) и горячего (Гор.) резервирования

T1	T2	M	WG	PAR	G	LN
M	Хол.	22,72177	23,76881	27,91936	25,27162	23,00732
	Гор.	6,494617	7,161341	8,395532	7,107263	7,099581
WG	Хол.	38,40447	74,73501	87,83327	71,44818	87,27522
	Гор.	6,509034	7,01305	7,248571	6,710071	6,399708
PAR	Хол.	73,38551	698,156	426,0609	<b>3400,311</b>	982,4501
	Гор.	5,020196	5,16995	5,829005	5,403815	6,35952
G	Хол.	63,61766	131,2072	214,2496	207,8197	224,5246
	Гор.	4,18813	3,770588	3,795211	3,825651	3,808868
LN	Хол.	58,03609	230,4098	280,2592	385,979	286,5799
	Гор.	3,19705	3,216988	3,290699	3,235358	3,263019

На рисунках 3.13–3.18 представлены графики функции надёжности  $R^*(t)$  однородной системы холодного и горячего резервирования, построенной с помощью имитационной модели, при  $\rho = 2; k = n = 3; \chi = 0,5$ .

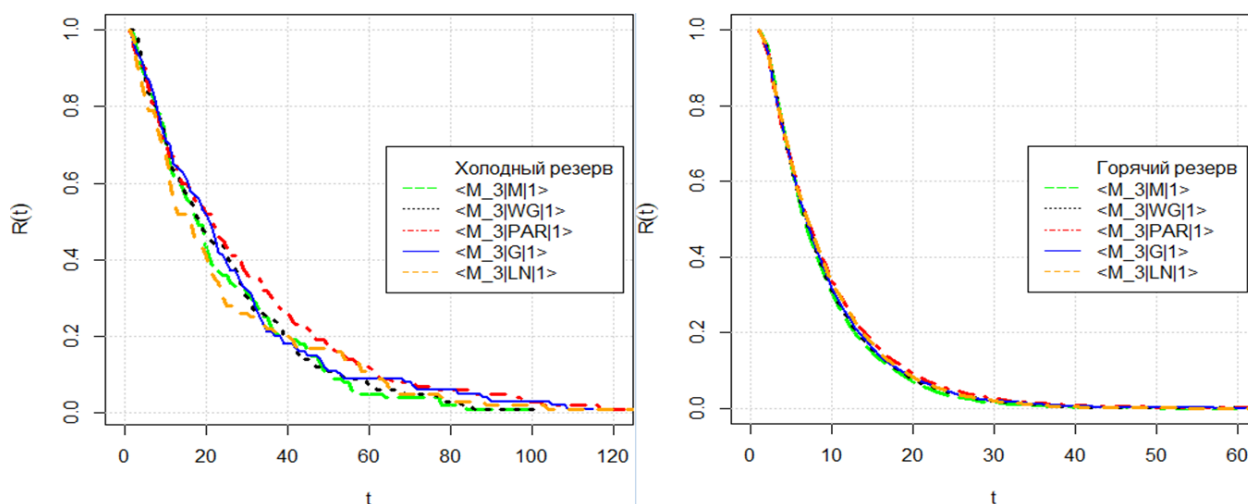




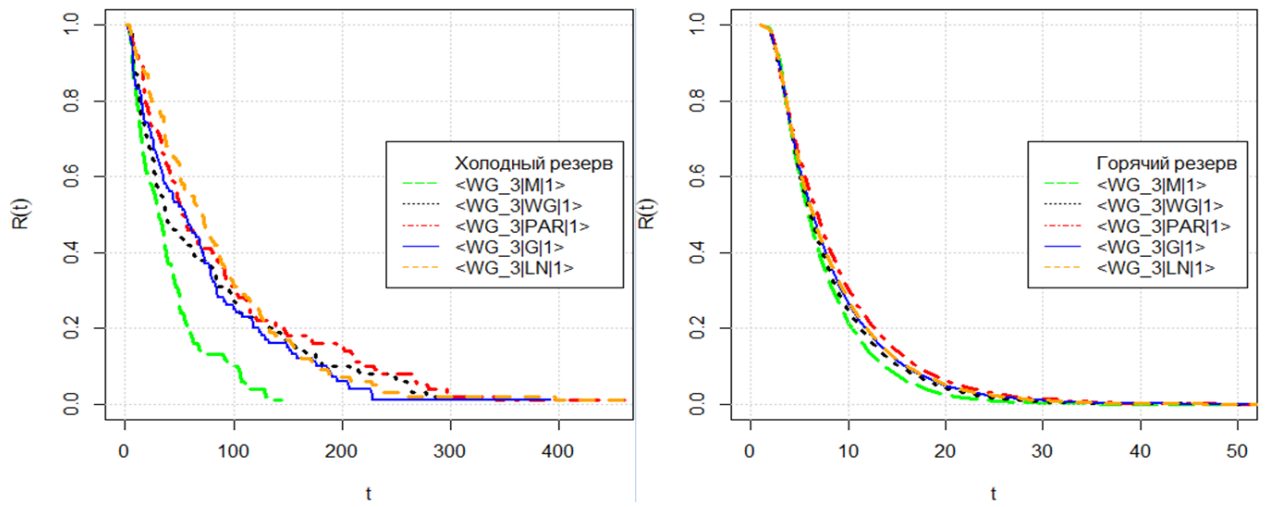
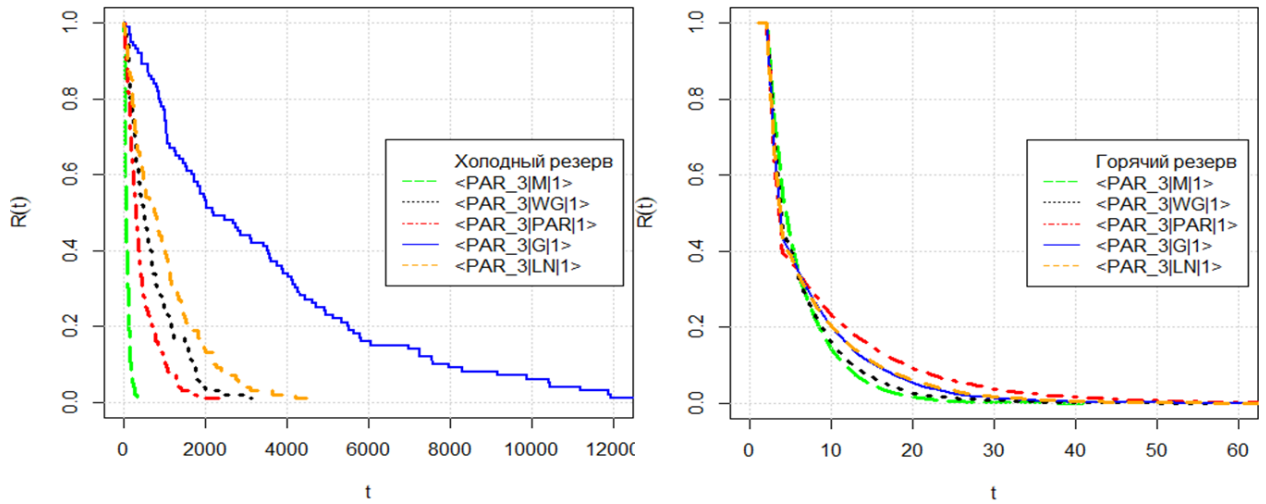
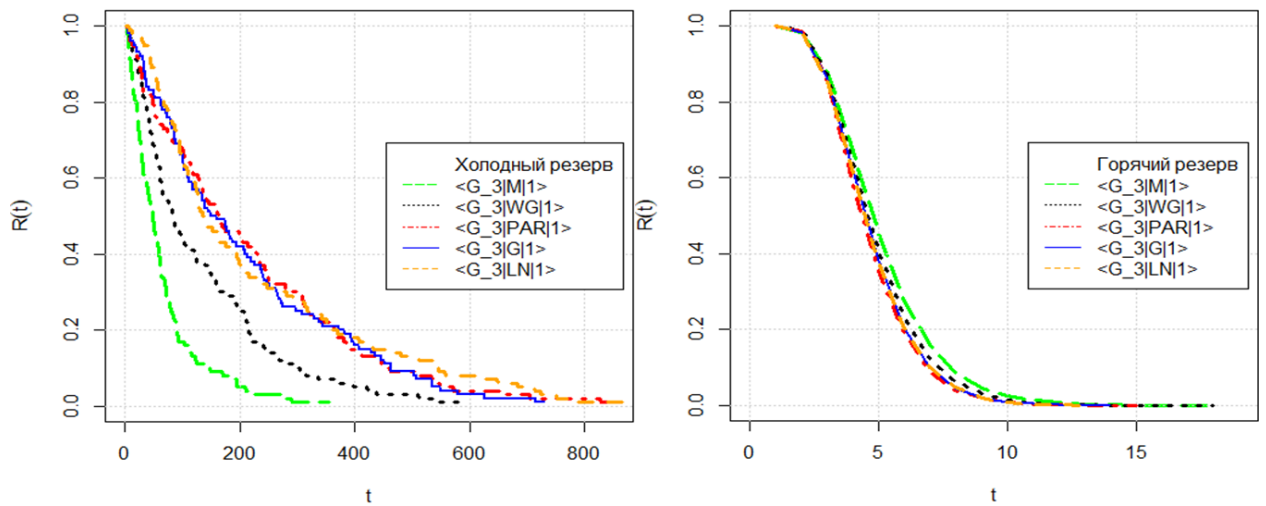
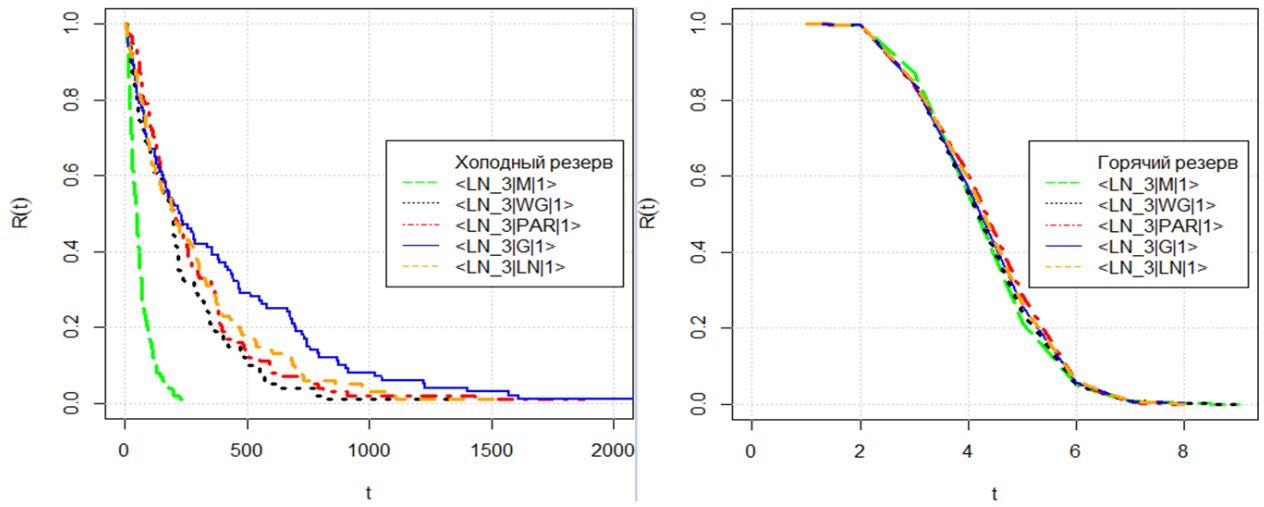
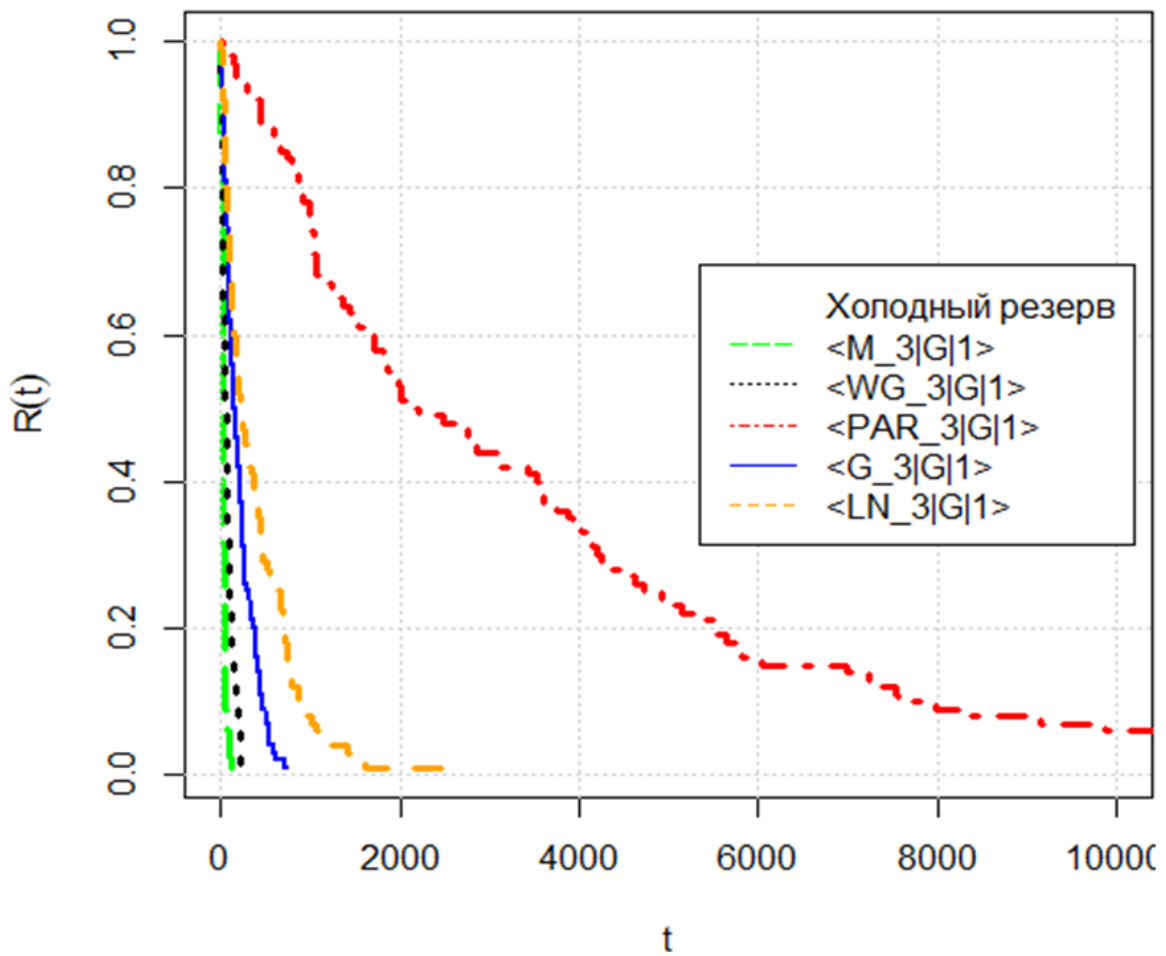
Рис. 3.13. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle M_3 / GI / 1 \rangle$ Рис. 3.14. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle WG_3 / GI / 1 \rangle$ Рис. 3.15. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle PAR_3 / GI / 1 \rangle$ 

Рис. 3.16. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle G_3 / GI / 1 \rangle$ Рис. 3.17. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle LN_3 / GI / 1 \rangle$ Рис. 3.18. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle GI_3 / G / 1 \rangle$ 

Полученные результаты (таблица 3.13) и графические результаты

(рисунки 3.13–3.18) подтверждают вывод о том, что наиболее надежной моделью резервированной системы является модель системы холодного резервирования с распределением Парето времени безотказной работы элемента и с Гамма распределением времени ремонта отказавших элементов.

### 3.5. Анализ стационарных характеристик надежности неоднородной дублированной системы типа $\langle M_2 / GI / 1 \rangle$ с помощью аналитического моделирования

Рассмотрим частные случаи модели восстанавливаемой неоднородной системы холодного резервирования  $\langle M_2 / GI / 1 \rangle$  и приведем полученные по аналитическим формулам из главы 1 значения стационарных вероятностей состояний системы при разных распределениях времени ремонта и значении коэффициента вариации  $\chi = 0,5$ .

Таблица 3.14. Точные значения (Т.з.) и приближенные значения (П.з.)

стационарных вероятностей состояний  $P_i$  восстанавливаемой системы  $\langle M_2 / GI / 1 \rangle$  при значении порядка разложения  $nr = 2$ .

		$EA_1 = 25; EA_2 = 10$			$EA_1 = 10; EA_2 = 25$		
		$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
M	Т.з.	0,9580546	0,03832219	0,00362319	0,9056078	0,09056078	0,00383142
	П.з.	0,9580951	0,03793483	0,00397012	0,90565142	0,09038202	0,00396655
WG	Т.з.	0,9579164	0,03941064	0,00267299	0,90546136	0,09170419	0,00283445
	П.з.	0,9579336	0,03924684	0,00281952	0,9054801	0,09162984	0,00289006
PAR	Т.з.	0,9578748	0,03974833	0,00237692	0,90541699	0,09201407	0,00256894
	П.з.	0,9578946	0,03956337	0,00254204	0,9054385	0,09192314	0,00263836
G	Т.з.	0,9578805	0,03969315	0,00242632	0,90542327	0,0919909	0,00258583
	П.з.	0,9578940	0,03956546	0,00254051	0,90543794	0,09193317	0,00262889
LN	Т.з.	0,9578800	0,03969786	0,00242212	0,90542273	0,09199315	0,00258412
	П.з.	0,9578940	0,03956546	0,00254051	0,90543794	0,09193317	0,00262889

Видно, что для всех рассматриваемых распределений результаты, полученные по асимптотическим выражениям, с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора отлично согласуются с результатами, полученными по точным аналитическим выражениям.

На рисунках 3.19 и 3.20 представлены, соответственно, графики

зависимости вероятности безотказной работы системы, построенные по точным формулам и графики зависимости вероятности безотказной работы системы, построенные по точным и по асимптотическим формулам.

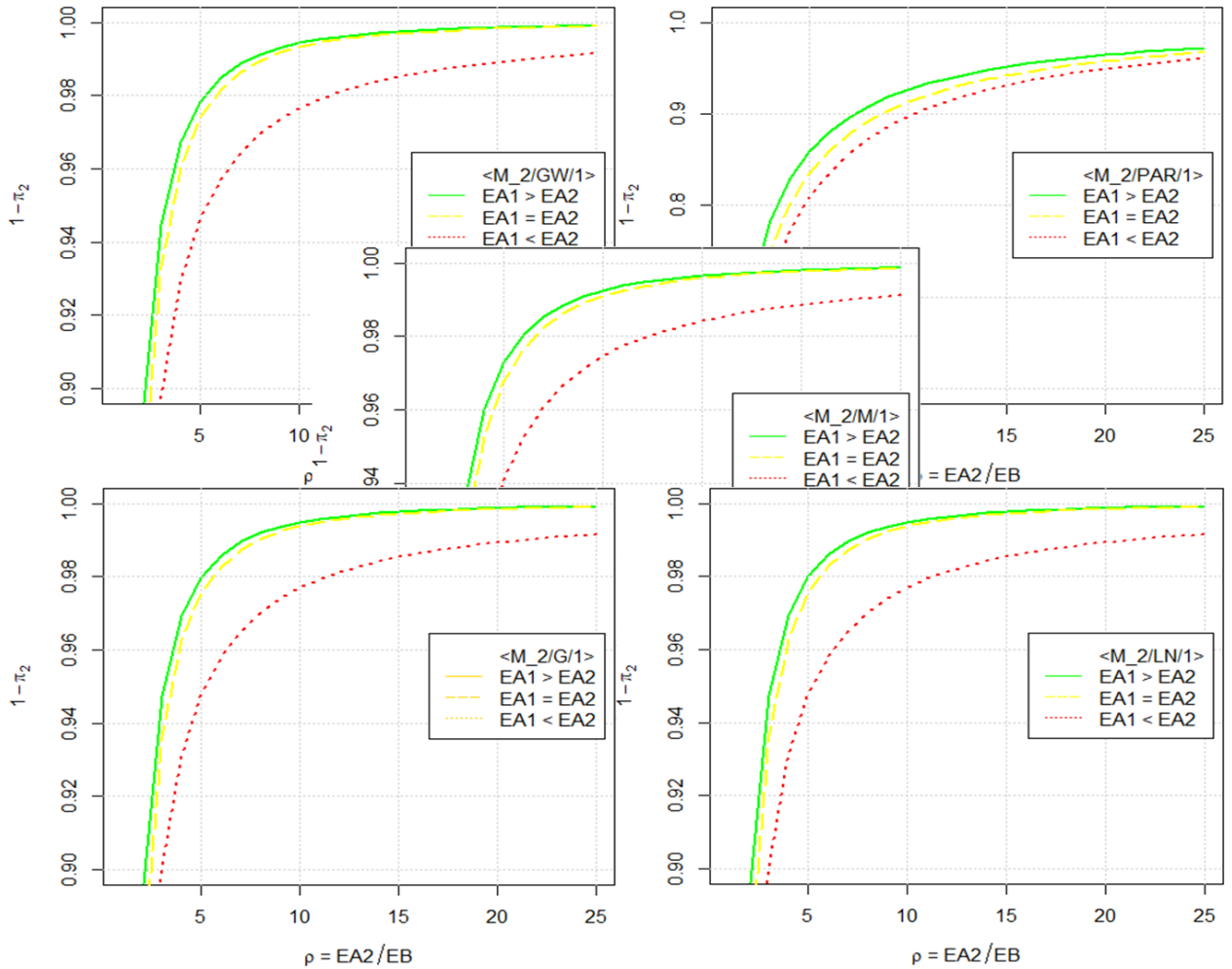


Рис. 3.19. Графики зависимости стационарной вероятности  $1 - p_2$  безотказной работы системы  $\langle M_2/GI/1 \rangle$  от относительной скорости восстановления  $\rho$

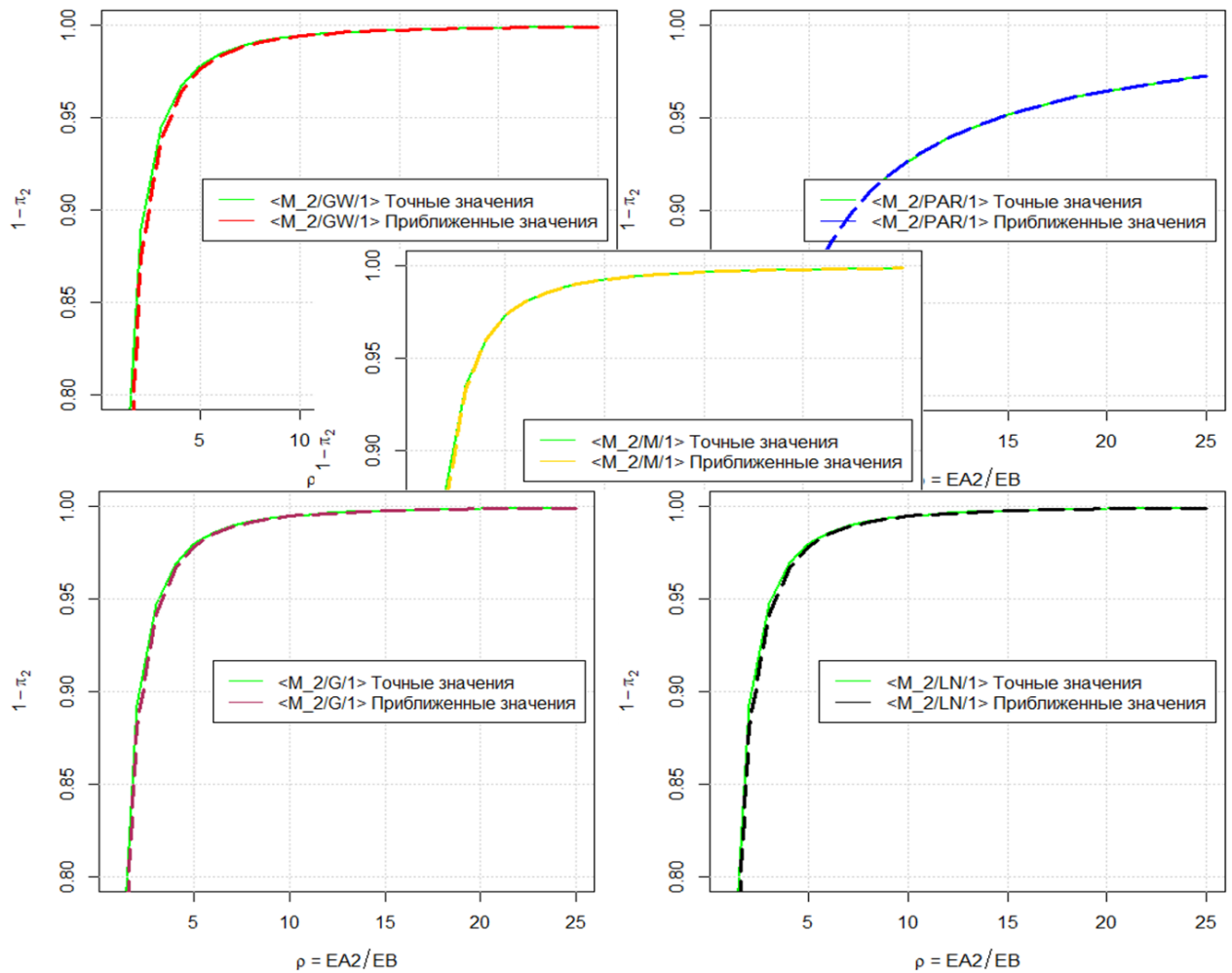


Рис. 3.20. Графики зависимости вероятности безотказной работы системы  $1 - p_2$  от относительной скорости восстановления  $\rho$ , построенные по точным и по асимптотическим формулам

Графические результаты демонстрируют, что чем больше среднее время безотказной работы основного элемента, тем выше надежность системы, а также подтверждают вывод о высокой асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы при редких отказах. Это значит, что можно использовать асимптотическое выражение в тех случаях, когда не удастся получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы по точным формулам.

### 3.6. Анализ нестационарных характеристик надёжности неоднородной дублированной системы типа $\langle GI_2 / GI/1 \rangle$ с помощью имитационного моделирования

В таблицах 3.15 приведены значения оценки среднего времени жизни

системы холодного резервирования при  $EA_1 = 10$ ;  $EA_2 = 5$ ;  $EB = 1$ ;  $\chi = 0,5$ .

Таблица 3.15 Оценка среднего времени жизни системы  $\langle GI_2 / GI / 1 \rangle$  холодного резервирования.

T2 T1	M	WG	PAR	G	LN
M	64,1869	64,76338	56,858	62,98926	62,49893
WG	137,4178	153,4375	190,8524	166,2484	203,6536
PAR	544,1671	42615,25	4087,669	<b>123440,4</b>	21133,71
G	683,5674	520,5019	617,3436	702,315	570,1963
LN	402,9108	873,7433	1554,445	1275,517	1463,264

На рисунках 3.21–3.25, представлены графики функции надёжности  $R^*(t)$  неоднородной системы холодного резервирования с приоритетом обслуживания и восстановления основного элемента  $\langle GI_2 / GI / 1 \rangle$ , построенной с помощью имитационной модели, при  $EA_1 = 10$ ;  $EA_2 = 5$ ;  $EB = 1$ ;  $\chi = 0,5$ .

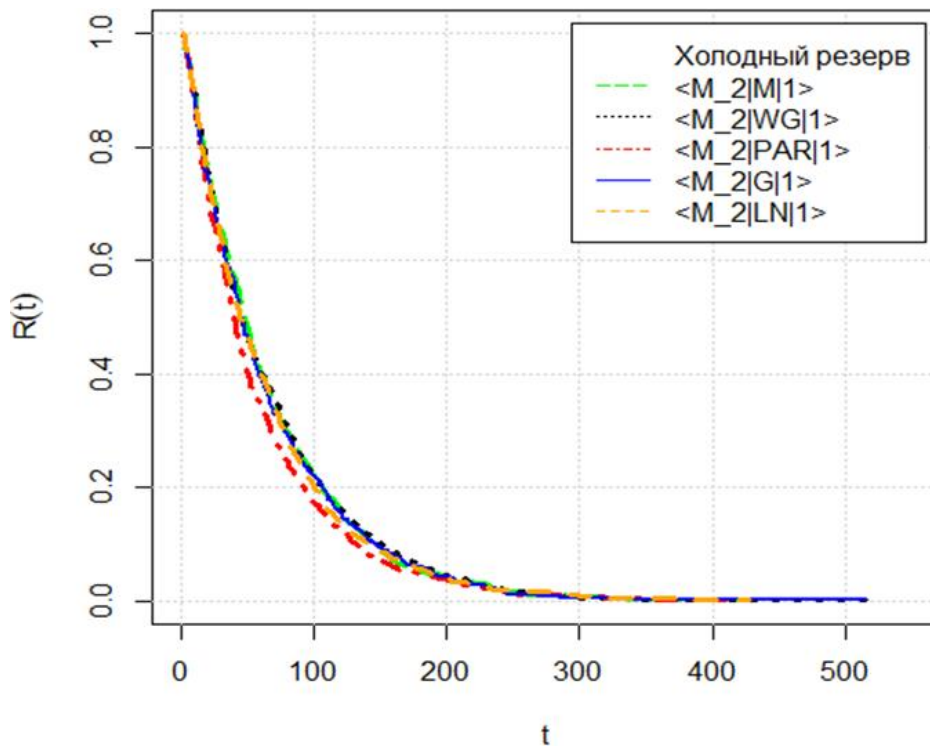


Рис. 3.21. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle M_2 / GI / 1 \rangle$

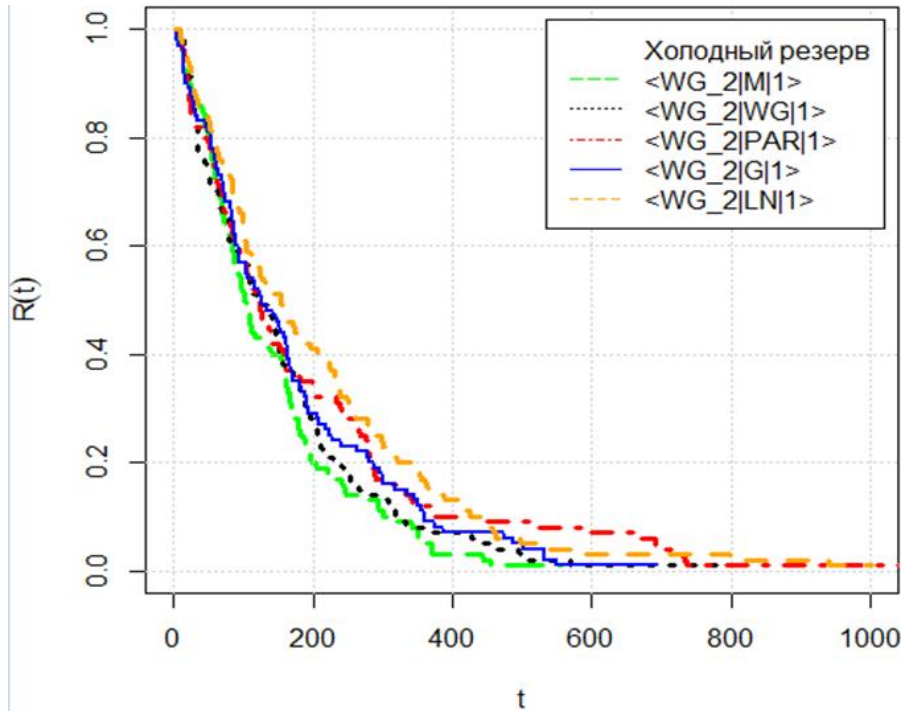


Рис. 3.22. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle WG_2 / GI / 1 \rangle$

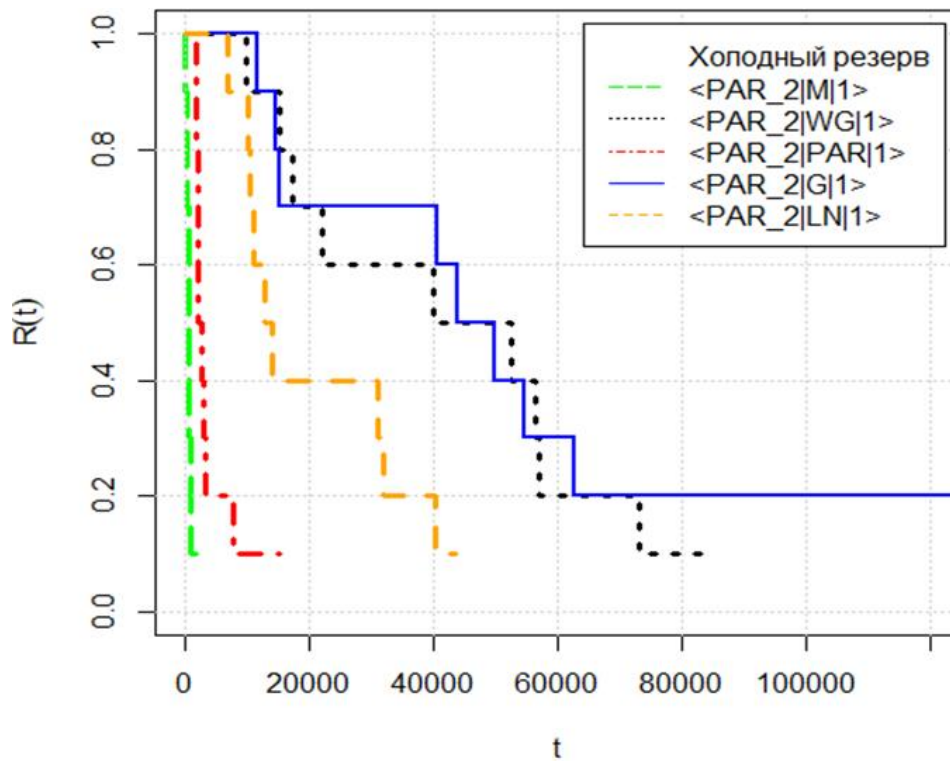


Рис. 3.23. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle PAR_2 / GI / 1 \rangle$

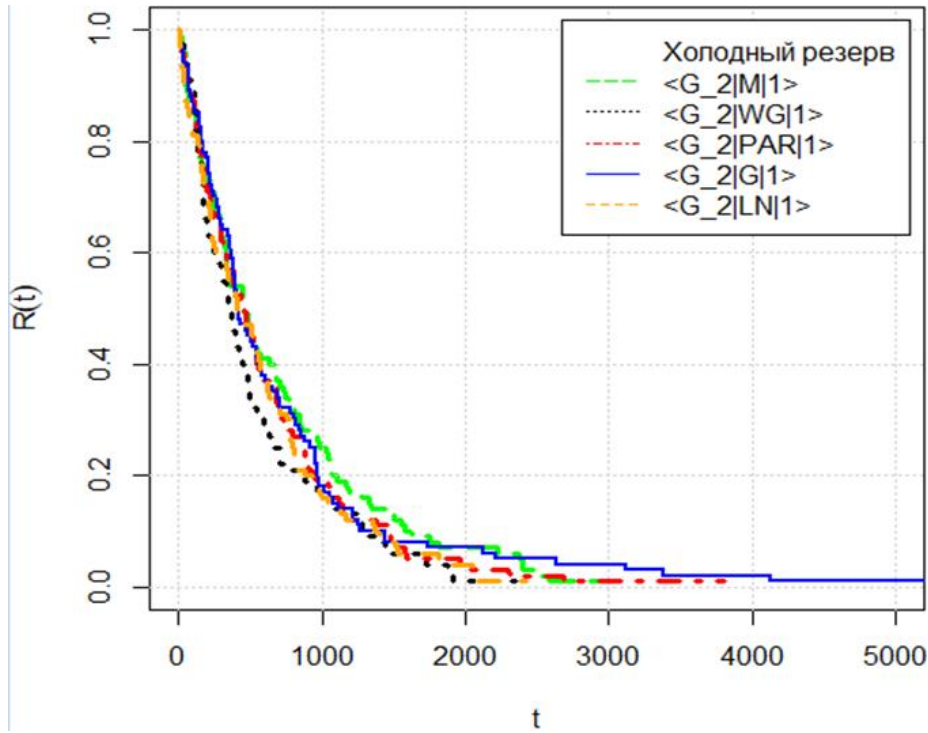


Рис. 3.24. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle G_2 / GI / 1 \rangle$

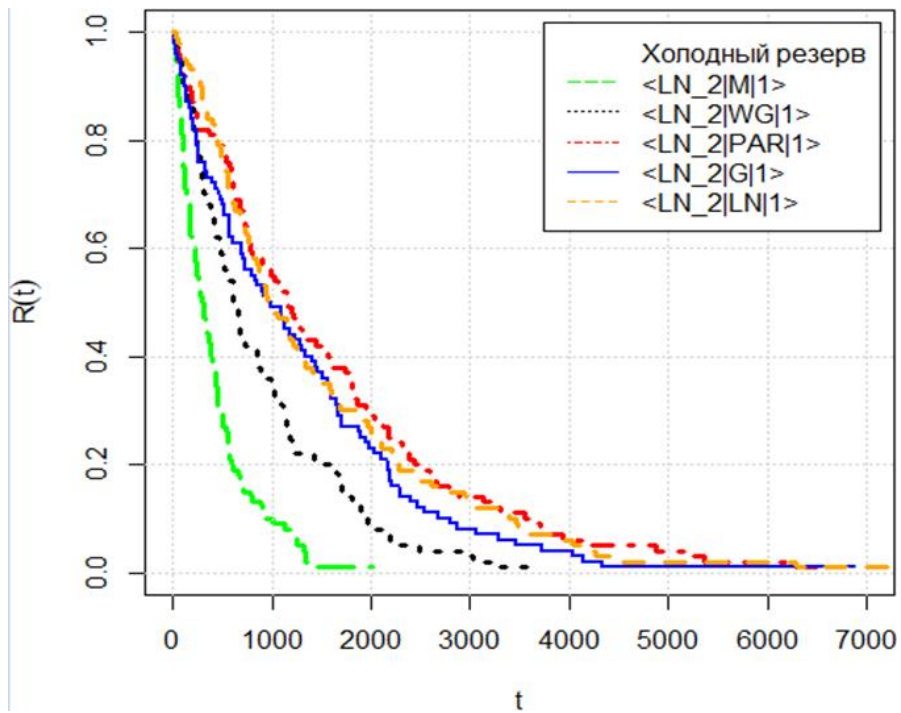


Рис. 3.25. Графики функции надёжности  $R^*(t)$  системы  $\langle LN_2 / GI / 1 \rangle$

Полученные результаты (таблица 3.15) и графические результаты (рисунки 3.21–3.25) согласуются с результатами, полученными в разделе 3.5.



для однородной системы, и также подтверждают вывод о том, что наиболее надежной моделью резервированной системы является модель системы холодного резервирования с распределением Парето времени безотказной работы элемента и с Гамма распределением времени ремонта отказавших элементов.

В главе 3 был проведен численный и графический анализ зависимости характеристик надёжности системы от параметров модели, а именно: типа резерва, значения коэффициента вариации времени ремонта, вида распределения времени ремонта. Численный анализ, проведённый для разных частных случаев, показал, что для всех рассматриваемых распределений результаты, полученные по асимптотическим выражениям при редких отказах, с увеличением числа порядка разложения в ряд Тейлора отлично согласуются с результатами, полученными по точным аналитическим выражениям. Графические и численные результаты показали, что разработанные имитационные модели хорошо аппроксимируют аналитическую модель системы, а значит могут быть использованы в тех случаях, когда не удастся получить выражения для стационарных вероятностей состояний системы в явном аналитическом виде. Также анализ показал, что чем меньше коэффициент вариации, тем больше вероятность безотказной работы системы. Достаточно высокий уровень надёжности системы достигается при сравнительно небольшом превышении единичного значения относительной скорости восстановления для модели  $\langle PAR_n / G / 1 \rangle$ . Следовательно, самой надёжной моделью системы является модель системы с распределением Парето времени безотказной работы элементов и с Гамма распределением времени ремонта отказавших элементов. Графические результаты демонстрируют высокую асимптотическую нечувствительность стационарной надёжности системы – различия между кривыми при «быстром» восстановлении (т.е. с ростом относительной скорости восстановления  $\rho$ ) становятся исчезающе малыми для всех рассматриваемых

распределений времени ремонта элементов системы. Наконец, результаты, полученные для неоднородной системы, демонстрируют, что чем больше среднее время безотказной работы основного элемента, тем выше надежность системы.

## Заключение

В диссертационной работе проведено исследование надежности замкнутой резервированной системы обслуживания с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки.

Основные результаты работы:

1. Разработана и исследована математическая модель замкнутой однородной системы облегченного, холодного и горячего  $n$ -кратного резервирования с экспоненциальной ФР в.б.р. её элементов и произвольным законом распределения времени их ремонта. Также исследована математическая модель замкнутой неоднородной системы холодного дублирования. Получены явные аналитические выражения для вычисления стационарного распределения вероятностей состояний рассмотренных систем как в общем случае, так и для некоторых частных случаев распределений. Получены асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний системы при редких отказах её элементов.
2. Разработан комплекс программ имитационного моделирования на основе дискретно-событийного подхода для численного и графического анализа зависимости от параметров модели характеристик надёжности однородной и неоднородной резервированных систем разных типов резерва. С помощью разработанных имитационных моделей проведено исследование надежности для самого общего случая, когда как распределение времени безотказной работы, так и распределение времени ремонта отказавших элементов являются произвольными.
3. На основе полученных аналитических и имитационных результатов с использованием экспертных исходных данных проведен численный и графический анализ зависимости характеристик надёжности системы от параметров модели.

## Список обозначений и сокращений

в.б.р.	– время безотказной работы
МП	– марковский процесс
ПЛ	– преобразование Лапласа
ПР	– плотность распределения
с.в.	– случайная величина
ФР	– функция распределения
$\nu(t)$	– число отказавших элементов в момент времени $t$
$\Delta$	– малый промежуток времени
$A$	– случайная величина (с.в.), время до отказа основного элемента
$B$	– случайная величина (с.в.), время восстановления отказавшего элемента
$A(x)$	– функция распределения (ФР) с.в. $A$
$B(x)$	– ФР с.в. $B$
$b(x)$	– плотность распределения (ПР) с.в. $B$
$\tilde{b}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} b(x) dx$	– ПЛ плотности распределения $b(x)$
$EA$	– среднее в.б.р. основного элемента,
$EB = b$	– среднее время ремонта отказавшего элемента
$\rho = \frac{EA}{EB}$	– относительная скорость восстановления
$\beta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$	– условная ПР остаточной длительности ремонта элемента, находящегося в ремонте время $t$

- $\chi$  – коэффициент вариации
- $\lambda$  – параметр экспоненциального распределения времени безотказной работы элемента
- $\alpha_i = \lambda + (n-1-i)\gamma$  – параметр интенсивностей переходов распределения времени безотказной работы элемента  $i = \overline{0, n-1}$ ;  $0 < \gamma \leq \lambda$ .
- $E[B^k] = \int_0^{\infty} x^k b(x) dx$  – моменты  $k$ -ого порядка время восстановления отказавшего элемента,  $np$  – номер порядка
- $A_i$  – случайная величина (с.в.), время до отказа основного элемента,  $i = \overline{1, 2}$
- $A_i(x)$  – функция распределения (ФР) с.в.  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$
- $EA_i$  – среднее время безотказной работы элемента
- $\rho_2 = EA_2 / EB$  – относительная скорость восстановления
- $\lambda_i$  – параметр экспоненциального распределения времени безотказной работы элемента,  $i = \overline{1, 2}$
- $\varepsilon_{B\bar{b}p}$  – относительная погрешность значений вероятности безотказной работы системы, полученных по имитационной модели в сравнении с аналитической.

## Список литературы

1. Waqar A. Reliability modeling and analysis of communication networks / A. Waqar, H. Osman, P. Usman, Q. Junaid // J. Netw. Comput. Appl. 78 C (January 2017), 191215. doi: 10.1016/j.jnca.2016.11.008.
2. Ometov A. Reliability-Centric Analysis of Offloaded Computation in Cooperative Wearable Applications / A. Ometov, D. V. Kozyrev, V. V. Rykov, [et al.] // Wireless Communications and Mobile Computing, Article ID 9625687, 15 pages, 2017. DOI:10.1155/2017/9625687.
3. Rykov V. V. Modeling and Simulation of Reliability Function of a Homogeneous Hot Double Redundant Repairable System / V. V. Rykov, D. V. Kozyrev, E. Zaripova // Proceedings of the 31st European Conference on Modelling and Simulation ECMS2017 (May 23-26, 2017, Budapest, Hungary). Edited by: Z. Z. Paprika, P. Hora'k, K. Va'radi, P. T. Zwierczyk, A. Vidovics-Dancs, J.P. R'adics, Germany, Digitaldruck Pirrot GmbH., 2017, Pp.701–705. doi:10.7148/2017-0701.
4. Houankpo H. G. K. Sensitivity Analysis of Steady State Reliability Characteristics of a Repairable Cold Standby Data Transmission System to the Shapes of Lifetime and Repair Time Distributions of its Elements / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev. In: K. E. Samouilov, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov (eds.): // Selected Papers of the VII Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems”, Moscow, Russia, 24-Apr-2017, CEUR Workshop Proceedings 1995, Pp.107-113. Published at <http://ceur-ws.org/> Vol-1995/.
5. Rykov V. V. On sensitivity of systems reliability characteristics to the shape of their elements life and repair time distributions/ V. V. Rykov, A. N. Tran // Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia. Series “Mathematics. Information sciences. Physics”, no. 3 (2014) 6577 (in Russian).

6. Efrosinin D. Sensitivity Analysis of Reliability Characteristics to the Shape of the Life and Repair Time Distributions / D. Efrosinin, V. V. Rykov // *Communication in Computer and Information Science* 487 (2014) Pp.101-112.
7. Efrosinin D. Sensitivity of Reliability Models to the Shape of Life and Repair Time Distributions / D. Efrosinin, V. V. Rykov, V. Vishnevskiy // 9-th International Conference on Availability Reliability and Security (ARES 2014) IEEE, 2014, Pp.430-437, Published in CD: 978-I-4799-4223-7/14, doi:10.1109/ARES.2014.65.
8. Rykov V. V. Analysis of renewable reliability systems by Markovization method / V. V. Rykov, D. V. Kozyrev // *Analytical and Computational Methods in Probability Theory (ACMPT 2017)*, Lecture Notes in Computer Science 10684 (2017) 210220. DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9 19.
9. Rykov V. V. On Sensitivity of Steady-State Probabilities of a Cold Redundant System to the Shapes of Life and Repair Time Distributions of Its Elements / V. V. Rykov, D. V. Kozyrev // *Statistics and Simulation, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 231, Chapter 28, 2018. Springer, Cham. Pp.391–402. DOI: 10.1007/978-3319-76035-3 28.
10. Parshutina S. A. Models to support design of highly reliable distributed computer systems with redundant processes of data transmission and handling / S. A. Parshutina, V. A. Bogatyrev // published in: 2017 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS), DOI: 10.1109/ITMQIS.2017.8085772.
11. Jiashen T. Impact of the Real-Time Thermal Loading on the Bulk Electric System Reliability / T. Jiashen, L. Ching-Ming, C. Yu-Huei // Published in: *IEEE Transactions on Reliability* (Volume: 66, Issue: 4, Dec. 2017), Pp.1110 – 1119, DOI: 10.1109/TR.2017.2740158.
12. Lisnianski A. Multi-state Markov Model for Reliability Analysis of a Combined Cycle Gas Turbine Power Plant / A. Lisnianski, D. Laredo, H. B. Haim // Published in:

2016 Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO), DOI: 10.1109/SMRLO.2016.31.

13. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains / D. G. Kendall // *Ann. Math. Stat.* 1953, 24, Pp.338–354.
14. Рыков В. В., Козырев Д. В. Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации). — М.: ИНФРА-М, 2015. — 223 с.
15. Sevastyanov B. A. An Ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals / B. A. Sevastyanov // *Theor. Probab. Appl.* 2(1), Pp.104–112 (1957).
16. Petrovsky I. G. Lectures on the theory of ordinary differential equations / I. G. Petrovsky // GITTL: Moscow, Russia, Pp.1-232. (1952). (In Russian).
17. Houankpo H. G. K. A Simulation Approach to Reliability Assessment of a Redundant System with Arbitrary Input Distributions / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev, E. Nibasumba, [et al.] In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds) // *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science*, vol 12563. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_29).
18. Houankpo H. G. K. Reliability Analysis of a Homogeneous Hot Standby Data Transmission System / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev, E. Nibasumba, M. N. B. Mouale // In: *Proceedings of the 30th European Safety and Reliability Conference and 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference (ESREL2020 PSAM15)*, 2020, Pp.1-8, ISBN: 978-981-14-8593-0; doi:10.3850/978-981-14-8593-0 5755-cd.
19. Houankpo H. G. K. Mathematical Model for Reliability Analysis of a Heterogeneous Redundant Data Transmission System / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev, E.



- Nibasumba, M. N. B. Mouale // 12th International Congress on Ultra-Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Brno, Czech Republic, 2020, Pp.189-194, <https://doi.org/10.1109/ICUMT51630.2020.9222431>.
20. Houankpo, H. G. K. Reliability Model of a Homogeneous Warm-Standby Data Transmission System with General Repair Time Distribution / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev. In: Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds) // Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2019, Lecture Notes in Computer Science, vol 11965, Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-36614-8\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36614-8_34).
  21. Cisco Global mobile data traffic forecast 2016–2021, White Paper, 2017.
  22. Ericsson E. mobility report: On the pulse of the Networked Society / E. Ericsson // <http://www.ericsson.com/mobility-report>, November 2017.
  23. Andrews J. G. What will 5G be? / J. G. Andrews, S. Buzzi, W. Choi // IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 32, no. 6, Pp.1065–1082, 2014.
  24. Orlosky J. Virtual and augmented reality on the 5G highway / J. Orlosky, K. Kiyokawa, H. Takemura // Journal of Information Processing, vol. 25, Pp.133–141, 2017.
  25. Kozyrev D. V. Reliability Calculation of a Redundant Heterogeneous System with General Repair Time Distribution / D. V. Kozyrev, V. Kimenchezhi, H. G. K. Houankpo // Прикладные проблемы в теории вероятностей и математической статистике в области телекоммуникаций = Applied problems in theory of probabilities and mathematical statistics into telecommunications. Труды XI Международного семинара. Под редакцией Д. Аранити, К.Е. Самуйлова, С.Я. Шоргина. М: РУДН, 2017. - С.12.
  26. Kozyrev D. V. Mobility-Centric Analysis of Communication Offloading for Heterogeneous Internet of Things Devices / D. V. Kozyrev, A. Ometov, D. Moltchanov [et al.] // Wireless Communications and Mobile Computing, vol. 2018, Article ID 3761075, 11 pages, 2018. <https://doi.org/10.1155/2018/3761075>.

27. Ometov A. Reliability-Centric Analysis of Offloaded Computation in Cooperative Wearable Applications / A. Ometov, D. V. Kozyrev, V. V. Rykov // *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 2017, Article ID 9625687, 15 pages, 2017. <https://doi.org/10.1155/2017/9625687>.
28. Orsino A. Effects of Heterogeneous Mobility on D2D- and Drone-Assisted Mission-Critical MTC in 5G / A. Orsino, A. Ometov, G. Fodor [et al.] // *IEEE Communications Magazine*, vol. 55, no. 2, Pp.79–87, 2017. DOI: 10.1109/MCOM.2017.1600443CM
29. Уанкпо Г. Ж. К. Анализ чувствительности характеристик надёжности модели резервирования системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев // *Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем (ИТТММ-2017)*. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. М.: РУДН, 2017. – С.55-58.
30. Уанкпо Г. Ж. К. Исследование чувствительности характеристик надёжности резервированной системы передачи данных к виду распределений времени между отказами и восстановлениями элементов системы / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев // *Молодежная научная школа по прикладной теории вероятностей и телекоммуникационным технологиям (АРТСТ–2017) = 2nd International School on Applied Probability Theory & Communications Technologies (АРТСТ–2017): материалы молодежной научной школы*. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г.; под общ. ред. К. Е. Самуйлова, Е. А. Кучерявого, А. Н. Дудина. – Москва: РУДН, 2017. С.299-303.
31. Уанкпо Г. Ж. К. Анализ чувствительности характеристик надёжности модели дублированной системы передачи данных к виду распределений времени безотказной работы и ремонта её элементов / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев // *Материалы 19-й Международной научной конференции "Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление,*

- связь" (DCCN-2016, Москва). М.: РУДН, 2016. Том 3. Под общей редакцией В. М. Вишневого и К. Е. Самуйлова. 2016. С.473-480.
32. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Коваленко И. Н. Математические вопросы теории надежности // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1964. — 1966. — 1(1). — с. 7—53.
33. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и её приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и её применение. — 1957. — т. 2, № 1. — с. 106—116.
34. Коваленко И. Н. Исследования по анализу надежности сложных систем. — Киев : Наукова думка, 1976. — 212 с.
35. Kalashnikov, V. V., Tsitsiashvili, G. S. Stability analysis of queueing systems. // J. Sov. Math. 1981, 17, 2238–2255
36. Ивницкий В. А. Об условии инвариантности стационарных вероятностей состояний для сетей однолинейных систем массового обслуживания // Теория вероятн. и ее примен. — 1989. — т. 34, вып. 3. — с. 576—580.
37. Gnedenko B. V. Mathematical Methods of Reliability Theory, translation edited by R.E. Barlow / B. V. Gnedenko, Y. K. Belyaev, A. D. Solovyev // Academic Press, New York, 1969.
38. Rykov V. V. Multidimensional Alternative Processes as Reliability Models / V. V. Rykov // Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. (BWWQT 2013) Proceedings. Eds: A.Dudin, V.Klimenok, G.Tsarenkov, S.Dudin. Series: CCIS 356. Springer, 2013. Pp.147-157.
39. Morozov E., Pagano M., Peshkova I., Rumyantsev A. Sensitivity Analysis and Simulation of a Multiserver Queueing System with Mixed Service Time Distribution // Mathematics. 2020. 8(8): 1277. <https://doi.org/10.3390/math8081277>

40. Morozov, E.; Peshkova, I.; Rumyantsev, A. On Failure Rate Comparison of Finite Multiserver Systems. In Distributed Computer and Communication Networks; Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V., Eds.; Springer International Publishing: Cham, Germany, 2019; Volume 11965, pp. 419–431.
41. Srimivasan S. K. Probabilistic Analysis of a Two-Unit System with a Warm Standby and a Single Repair Facility / S. K. Srimivasan, M. N. Gopalan // *Oper. Res.* Vol 21, No 3 (May-June 1973), Pp.748-754.
42. Уанкпо Г. Ж. К. Аналитическое и имитационное моделирование надежности замкнутой однородной системы с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев // *Современные информационные технологии и ИТ-образование.* 2018. Том 14, №3. С. 548-555.
43. Korolyuk V. Heuristic principles of phase merging in reliability analysis / V. Korolyuk, D. Korolyuk // *Reliability: Theory and Applications* 12 (1) (March 2017), Pp. 66-71.
44. Gnedenko B. V. On cold double redundant system with restoration / B. V. Gnedenko // *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, no. 5 (1964) Pp. 111-118 (in Russian).
45. Gnedenko B. V. On cold double redundant system / B. V. Gnedenko // *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, no. 4 (1964) Pp. 3-12, (in Russian).
46. Solovev A. D. On reservation with quick restoration / A. D. Solovev // *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, no. 1 (1970) Pp. 56-71 (in Russian).
47. Gnedenko D. B. Reliability evaluation of complex renewable systems / D. B. Gnedenko, A. D. Solovev // *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, no. 3 (1975) Pp. 121-128 (in Russian).
48. Kalashnikov V. V. Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing / V. V. Kalashnikov // Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 256 p.

49. Уанкпо Г. Ж. К. Модель надёжности однородной системы передачи данных горячего резервирования с произвольным распределением времени ремонта элементов / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев, И. А. Гудкова // Обзорение прикладной и промышленной математики (ОПиПМ). 2019; 26(4): Pp. 384-386. URL: [www.elibrary.ru/item.asp?id=42583668](http://www.elibrary.ru/item.asp?id=42583668).
50. Уанкпо Г. Ж. К. Программный комплекс имитационного моделирования и расчета стационарных вероятностей и оценки надежности резервированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта её элементов / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019; 15(3): Pp. 542-550. DOI: 10.25559/SITITO.15.201903.542-550.
51. Chae E. Reliability Analysis of Hot-Standby Sparing Sub-system with Common Cause Failures for Railway / E. Chae, C.-W. Park, J.-W. Kang // December 2018, Journal of the Korean Society for Railway, 21(11), Pp. 1072-1079, DOI: 10.7782/JKSR.2018.21.11.1072.
52. Park C.-W. Reliability Analysis of Hot-Standby Sparing System with Common Cause Failures for Railway / C.-W. Park, E. Chae, D.-H. Shin // Journal of the Korean Society for Railway, 20(3), Pp. 349-355, June 2017, DOI:10.7782/JKSR.2017.20.3.349.
53. Wu J. Reliability analysis of layered structure hot standby redundancy system / J. Wu, S. Luo // ISSN:1673-0291, Volume 35, Issue 6, December 2011, Pp. 44-48.
54. Pattavina J. Reliability Analysis for Redundant Systems / J. Pattavina // EDN Magazine, in: Edn-Boston then Denver then Highlands Ranch Co- April 2011, <https://www.researchgate.net/publication/340610343>.
55. Cao W. Time-dependent reliability of (weighted) k-out-of-n systems with identical component deterioration / W. Cao // J Infrastruct Preserv Resil 2, 3 (2021). <https://doi.org/10.1186/s43065-021-00018-1>.

56. Zhuang X. Reliability and capacity evaluation of multiperformance multi-state weighted k-out-of-n systems / X. Zhuang, T. Yu, Z. Sun, K. Song // *Communications in Statistics Simulation and Computation*, doi.org/10.1080/03610918.2020.1788590.
57. Tetsushi Y. Reliability of Systems with Simultaneous and Consecutive Failures / Y. Tetsushi // In: 2019 4th International Conference on System Reliability and Safety (ICSRS). <https://doi.org/10.1109/ICSRS48664.2019.8987614>.
58. Chae E. Reliability Analysis of M-out-of-N System with Common Cause Failures for Railway / E. Chae, C.-w. Park, J.-g. Kang // doi.org/10.7782/JKSR.2018.21.10.969.
59. Xu H. Reliability Assessment of Repairable Load-Sharing K-out-of-N: System with Flowgraph Model / H. Xu, Y. Fan, N. Fard // doi.org/10.1109/RAM.2018.8463109.
60. Kozyrev D. V. Reliability Evaluation of a Hexacopter-Based Flight Module of a Tethered Unmanned High-Altitude Platform / D. V. Kozyrev, N. D. Phuong, H. G. K. Houankpo, A. Sokolov. In: Vishnevskiy V., Samouylov K., Kozyrev D. (eds) // *Distributed Computer and Communication Networks 2019, Communications in Computer and Information Science*, vol 1141. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-36625-4\\_52](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36625-4_52).
61. Kala Z. Sensitivity analysis in probabilistic structural design: A comparison of selected techniques / Z. Kala // *Sustainability* 2020, 12, 4788.
62. Вишнеvский В. М., Козырев Д. В. Исследование гибридной системы передачи мультимедийной информации, функционирующей в случайной среде // Тезисы докладов 9-й Международной отраслевой научной конференции «Технологии информационного общества» (Москва, 2015). М.: Медиа ПАБЛИШЕР, 2015. С. 39.
63. Houankpo, H. G. K. Mathematical and Simulation Model for Reliability Analysis of a Heterogeneous Redundant Data Transmission System / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev // *Mathematics*. 2021; 9(22): 2884. DOI: 10.3390/math9222884.

64. Уанкпо Г. Ж. К. Математическая модель анализа надежности неоднородной дублированной системы передачи данных / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев, Э. Нибасумба, М. Н. Б. Муаль // Современные информационные технологии и ИТ-образование. ISSN 2411-1473. Том 16, №2 (2020). <http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/644>, DOI: 10.25559/SITITO.16.202002.285-294.
65. Уанкпо Г. Ж. К. Моделирование однородной системы передачи данных облегченного резервирования / Г. Ж. К. Уанкпо // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование», [S.l.], v. 17, n. 3, sep. 2021. ISSN 2411-1473. <http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/771>.
66. Houankpo H. G. K. Reliability Model of a Homogeneous Hot-Standby k-Out-of-n: G System / H. G. K. Houankpo, D. V. Kozyrev. In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds): // Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 13144. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-92507-9\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-030-92507-9_29).
67. Уанкпо Г. Ж. К. Анализ надежности однородной системы передачи данных горячего резервирования / Г. Ж. К. Уанкпо, Д. В. Козырев, Э. Нибасумба, М. Н. Б. Муаль // Управление большими системами. Выпуск 87. М.: ИПУ РАН, 2020. С.5-25. DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2020.87.1>. ISSN печатной версии: 1819-2440. ISSN электронной версии: 1819-2467.
68. Rykov V. V. Investigations of the Potential Application of k-out-of-n Systems in Oil and Gas Industry Objects / V. V. Rykov, V. Y. Itkin, M. G. Sukharev // Journal of Marine Science and Engineering. 2020; 8(11):928. ISSN (electronic) 2077-1312. с.

69. Netes V. The Interval Reliability, its Usage and Calculation for Information and Communication Systems and Networks / V. Netes // 29th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). 2021; Tampere, Finland, 2021, pp. 261–266, ISSN: 2305-7254. <https://doi.org/10.23919/FRUCT52173.2021.9435550>.
70. Netes V. A. A General Approach to Dependability Assessment of Intelligent Transport Systems / V. A. Netes // 2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. — 2022. — P. 1–4. <http://dx.doi.org/10.1109/IEEECONF53456.2022.9744372>.
71. Nazarov A. Mathematical Model of Call Center in the Form of Multi-Server Queuing System / V. Nazarov, Moiseev A., Moiseeva S. // Mathematics. 2021, 9(22): 2877. <https://doi.org/10.3390/math9222877>.
72. ГОСТ 27.002-2009. Надежность в технике. Термины и определения. - Москва: Стандартинформ, 2011. - 28 с.
73. Huang W. Reliability modeling of A warm standby redundancy configuration with active  $\rightarrow$  standby  $\rightarrow$  active units / W. Huang, J. Loman, T. Song // Published in: 2014 Reliability and Maintainability Symposium, DOI: 10.1109/RAMS.2014.6798473.
74. Perkin S. Framework for Threat Based Failure Rates in Transmission System Operation / S. Perkin, G. Bjornsson, I. Baldursdottir [et al.], // Published in: 2016 Second International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO), DOI: 10.1109/SMRLO.2016.34.
75. Singh C. Assigning transition rates to unit models with incomplete data for power system reliability analysis / C. Singh // Published in: 2015 Annual IEEE India Conference (INDICON), DOI: 10.1109/INDICON.2015.7443163.
76. Tourgoutian B. Reliability and availability model of offshore and onshore VSC-HVDC transmission systems / B. Tourgoutian, A. Yanushkevich, R. Marshall // Published in: 11th IET International Conference on AC and DC Power Transmission, 13 July 2015, DOI: 10.1049/cp.2015.0101.



77. Li X. The refining reliability modeling method for the satellite system / X. Li, N. Ao, L. Wu // Published in: 2014 10th International Conference on Reliability, Maintainability and Safety (ICRMS), DOI: 10.1109/ICRMS.2014.7107244.
78. Xu M. Reliability modeling of a jet pipe electrohydraulic servo valve / M. Xu, S. Zeng, J. Guo // Published in: 2014 Reliability and Maintainability Symposium, DOI: 10.1109/RAMS.2014.6798480.
79. Cao J. Research on modeling method of complex system mission reliability simulation / J. Cao, Q. Wang, Y. Shen // Published in: 2012 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering, DOI: 10.1109/ICQR2MSE.2012.6246242.
80. Gu Z. Application-specific multiprocessor system-on-chip reliability optimization / Z. Gu, C. Zhu, L. Shang, R. Dick // Published in: IEEE Transactions on Very Large-Scale Integration (VLSI) Systems (Volume: 16, Issue: 5, May 2008), DOI: 10.1109/TVLSI.2008.917574.
81. Ширко А.И., Катygин Б.Г. Об алгоритме регулирования параметров множественного доступа станций беспроводной сети передачи данных / А.И. Ширко, Б.Г. Катygин // Журнал: техника радиосвязи. 2016, С.54-63, 1 (28), ISSN: 2075-8693.
82. Letzepis N. Hybrid RF/FSO communications / N. Letzepis, A. Fàbregas // In Advanced Optical Wireless Communication Systems, Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2012; Pp. 273–302.
83. Vanderperre E. J. Reliability analysis of a renewable multiple cold standby system / E. J. Vanderperre // Oper. Res. Lett. 2004, 32, Pp. 288–292.
84. Qingtai W. Reliability analysis of a cold standby system attacked by shocks / W. Qingtai // Appl. Math. Comput. 2012, 218, Pp. 11654–11673.
85. Xu J. J. Reliability Analysis of Cold Standby Compound System / J. J. Xu, Z. J. Xiao // Adv. Mater. Res. 2014, Pp. 945–949, Pp. 1116–1119.

86. Khorshidian K. An Alternative Approach to Reliability Analysis of Cold Standby Systems / K. Khorshidian, M. Fathizadeh // *Commun. Stat.-Theory Methods* 2015, 45, Pp. 6471–6480.
87. Abbas B. Application of reliability models with covariates in spare part prediction and optimization—A case study / B. Abbas, B. Javad, M. Tore // *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 2014, 123, Pp. 1–7.
88. Wang C. Approximate reliability analysis of large heterogeneous cold-standby systems / C. Wang, L. Xing, R. Peng // In *Proceedings of the International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance and Safety Engineering (QR2MSE 2014)*, Dalian, China, Pp. 22–25 July 2014.
89. Al Turk L. I. Characteristics and Application of the NHPP Log-Logistic Reliability Model / L. I. Al Turk // *Int. J. Stat. Probab.* 2019, 8, Pp. 44–55.
90. Liu B. Reliability Modeling with Application for Calibration Data / B. Liu, F. Qin, S. Liu, S. Cai // In *Proceeding of the 24th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, Changsha, China, 19–20 May 2018; Springer: Singapore, 2019; Pp. 133–141.
91. Li J. Availability modeling for periodically inspection system with different lifetime and repair-time distribution / J. Li, Y. Chen, Y. Zhang, H. Huang // *Chin. J. Aeronaut.* 2019, 32, Pp. 1667–1672.
92. Liu Y. Reliability Mathematical Models of Repairable Systems with Uncertain Lifetimes and Repair Times / Y. Liu, Y. Ma, Z. Qu, X. Li // *IEEE Access* 2018, 6, 71285–71295.
93. Liu Y. Reliability Modelling for Repairable Systems with Stochastic Lifetimes and Uncertain Repair Times / Y. Liu, Z. Qu, X. Li // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2019, 27, Pp. 2396–2405.
94. Xin G. Reliability analysis for a cold standby system under step-wise Poisson shocks / G. Xin, S. Jiali, W. Qingtai // *J. Control. Decis.* 2021,8, Pp. 27–40.

95. Gen Q. X. Analysis of two components parallel repairable system with vacation / Q. X. Gen, L. L. Yan // *Commun. Stat.-Theory Methods* 2019,50, 2429–2450.
96. Sijia L. Reliability analysis of general systems with bi-uncertain variables / L. Sijia, W. Yuuyu, L. Zhaocai // *Soft Comput.* 2019,24, Pp. 6975–6986.
97. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020610325. Программа расчета стационарных вероятностей состояний замкнутой однородной системы многократного холодного резервирования с произвольными исходными распределениями / Д. В. Козырев, Г. Ж. К. Уанкпо; федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» — Заявка №2019667442. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13.01.2020.
98. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020610408. Программа расчета средней наработки на отказ замкнутой однородной системы многократного холодного резервирования с произвольными исходными распределениями / Д. В. Козырев, Г. Ж. К. Уанкпо; федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» — Заявка №2019667216. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14.01.2020.
99. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2021660642. Программа расчета вероятности безотказной работы замкнутой однородной системы многократного холодного резервирования с произвольными исходными распределениями / Д. В. Козырев, Г. Ж. К. Уанкпо; федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» — Заявка №2020619820. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.06.2021.
100. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2021660643. Программа расчета средней наработки на отказ замкнутой одно-

родной системы многократного горячего резервирования с произвольными исходными распределениями / Д. В. Козырев, Г. Ж. К. Уанкпо; федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» — Заявка №2020619815. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 29.06.2021г.

### Приложение А: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления стационарных вероятностей состояний системы холодного резервирования

#### Begin

```

    array r[] := [0, 0, 0]; // многомерный массив, содержащий результаты k-го шага основного цикла
    double t := 0.0; // инициализация часов модельного времени
    vector tv := 0.0; // момент скачков процесса  $v(t)$ 
    double tp := 0.0; // время, прошедшее с момента предыдущего скачка
    int i := 0; j := 0; // переменные состояния системы
    double  $t_{nextfail}$  := 0.0; // переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента
    double  $t_{nextrepair}$  :=  $\infty$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта
    int k := 1; // счетчик числа итераций основного цикла
     $s := rf - GI(1, \lambda(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $S$  – время до первого события (отказа)
     $sr := rf - GI(1, \beta(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $sr$  – время ремонта отказавшего элемента
     $t_{nextfail} := t + s$ ;
    while  $t < T$  do
        if  $i == 0$  then
             $t_{nextrepair} := \infty$ ;  $j := i + 1$ ;  $t := t_{nextfail}$ ;
        end
        for ( $v$  in  $1:(n-1)$ )
            if  $i == v$  then
                 $tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;
                if  $t == t_{nextfail}$  then

```

```

if  $i = 1$  then
     $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ;
end
else if  $length(tv) > 2$  then
     $sr := abs(sr[] - tp)$ ;
end
end
if  $t == t_{nextrepair}$  then
     $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ 
end
 $s := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ;
 $t_{nextfail} := t + s; t_{nextrepair} := t + sr$ ;
if  $t_{nextfail} < t_{nextrepair}$  then
     $j := i + 1; t := t_{nextfail}$ ; end
else  $j := i - 1; t := t_{nextrepair}$ ;
end
end
if  $i = n$  then
     $tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;
     $sr := abs(sr[] - tp); t_{nextfail} := \infty; t_{nextrepair} := t + sr$ ;
     $j := i - 1; t := t_{nextrepair}$ ;
end
if  $t > T$  then
     $t = T$ ;
end
 $r := array(r, dim := c(1, 3, k))$ ;
 $r[:, k] := [t, i, j]; i := j; k := k + 1$ 
end do

```

Оценка длительности пребывания в каждом состоянии  $i, i := 0, 1, 2, \dots, n$ ; вычисление стационарных вероятностей состояний:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{NG} \sum_{j=1}^{NG} (\text{длительность пребывания в состоянии } i/T)_j$$

**End**

## Приложение Б: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надежности системы холодного резервирования

### Begin

```

    array r[] := [0, 0, 0]; // многомерный массив, содержащий ре-
    зультаты k-го шага основного цикла
    double t := 0.0; // инициализация часов модельного вре-
    мени
    vector tv := 0.0; // момент скачков процесса  $v(t)$ 
    double tp := 0.0; // время, прошедшее с момента предыду-
    щего скачка
    int i := 0; j := 0; // переменные состояния системы
    double  $t_{nextfail}$  := 0.0; // переменная, в которой хранится время
    до следующего отказа элемента
    double  $t_{nextrepair}$  :=  $\infty$ ; // переменная, в которой хранится время
    до следующего окончания ремонта
    int k := 1; // счетчик числа итераций основного цикла
     $s := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ; // генерация произвольной случайной
    величины  $s$  – время до первого события (отказа)
     $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ; // генерация произвольной случайной
    величины  $sr$  – время ремонта отказавшего элемента
     $t_{nextfail} := t + s$ ;
    while  $t < \infty$  do
        if  $i == 0$  then
             $t_{nextrepair} := \infty$ ;  $j := i + 1$ ;  $t := t_{nextfail}$ ;
        end
        for ( $v$  in  $1:(n-1)$ )
            if  $i == v$  then
                 $tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;
                if  $t == t_{nextfail}$  then
                    if  $i == 1$  then
                         $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ;
                    end
                    else if  $length(tv) > 2$  then
                         $sr := abs(sr[] - tp)$ ;
                    end
                end
            end
        end
    end

```

```

end
if  $t == t_{nextrepair}$  then
     $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ 
end
 $s := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ;
 $t_{nextfail} := t + s; t_{nextrepair} := t + sr$  ;
if  $t_{nextfail} < t_{nextrepair}$  then
     $j := i + 1; t := t_{nextfail}$  ; end
else  $j := i - 1; t := t_{nextrepair}$  ;
end
end
if  $i == n$  then
    break;
end
 $r := array(r, dim := c(1, 3, k))$ ;
 $r[:, k] := [t, i, j]; i := j; k := k + 1$ 
end do

```

Оценка длительности пребывания до состояния  $i = n$ ; вычисление оценки среднего времени жизни системы:

$$ET = \frac{1}{NG} \sum_{i=1}^{NG} (\text{длительность пребывания в состоянии } n)_i$$

**End**

## Приложение В: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки стационарных вероятностей состояний системы горячего резервирования типа k-из-n

### Begin

*array*  $r[] := [0, 0, 0]$ ; // многомерный массив, содержащий результаты k-го шага основного цикла

*double*  $t := 0.0$ ; // инициализация часов модельного времени

*vector*  $tv := 0.0$ ; // момент скачков процесса  $v(t)$

*double*  $tp := 0.0$ ; // время, прошедшее с момента предыдущего скачка

*int*  $i := 0; j := 0$ ; // переменные состояния системы

*double*  $t_{nextfail} := 0.0$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента

*double*  $t_{nextrepair} := \infty$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта

*int*  $z := 1$ ; // счетчик числа итераций основного цикла

$s := rf\_GI(n, \lambda(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $s$  – время до первого события (отказа)

$sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $sr$  – время ремонта отказавшего элемента

$t_{nextfail} := t + s$ ;

**while**  $t < T$  **do**

**if**  $i = 0$  **then**

**if**  $length(tv) == 1$  **then**

$tp := 0; sr := 0; snv := sort(s)$ ;

$sn := \min(snv); t_{nextfail} := t + sn$ ;

**end**

**else**

$tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;

$s\_new := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ; // новое время отказа

$snv := c(s\_r[s\_r > 0], s\_new)$

$sn := \min(s); t_{nextfail} := t + sn$ ;

**end**

$t_{nextrepair} := \infty; j := i + 1; t := t_{nextfail}$ ;

**end**

**for** ( $v$  in  $1:(n-1)$ )



```

if  $i == v$  then
   $tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;
   $s\_r := sort(snv[ ] - tp)$ 
  if  $t == t_{nextfail}$  then
     $snv := s\_r[-1]$ ;
    if  $i == 1$  then
       $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ;
    end
    else if  $length(tv) > 2$  then
       $sr := abs(sr[] - tp)$ ;
    end
  end
  if  $t == t_{nextrepair}$  then
     $s\_new := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ;
     $snv := c(s\_r[s\_r > 0], s\_new)$ 
     $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ 
  end
   $sn := \min(snv)$ ;
   $t_{nextfail} := t + sn; t_{nextrepair} := t + sr$ ;
  if  $t_{nextfail} < t_{nextrepair}$  then
     $j := i + 1; t := t_{nextfail}$ ; end
  else  $j := i - 1; t := t_{nextrepair}$ ; end
end
end
if  $i == k$  then
   $tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;
  if  $k == n$  then
     $snv := 0; sr := abs(sr[] - tp); t_{nextrepair} := t + sr$ ;
  end
  else
     $s\_r := sort(snv[ ] - tp); sr := abs(sr[] - tp)$ ;
     $t_{nextrepair} := t + sr; snv := s\_r[-1] + sr$ ;
  end
   $t_{nextfail} := \infty; j := i - 1; t := t_{nextrepair}$ ;
end

```

**if**  $t > T$  **then**

$t = T$  ;

**end**

$r := \text{array}(r, \text{dim} := c(1, 3, z))$  ;

$r[:, z] := [t, i, j]$  ;  $i := j$  ;  $z := z + 1$

**end do**

Оценка длительности пребывания в каждом состоянии  $i, i := 0, 1, 2, \dots, k$  ; вычисление стационарных вероятностей состояний:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{NG} \sum_{j=1}^{NG} (\text{длительность пребывания в состоянии } i/T)_j$$

**End**

## Приложение Г: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надежности системы горячего резервирования типа k-из-n

**Begin**

*array*  $r[] := [0, 0, 0]$ ; // многомерный массив, содержащий результаты, k-го шага основного цикла

*double*  $t := 0.0$ ; // инициализация часов модельного времени

*vector*  $tv := 0.0$ ; // Момент скачков процесса  $v(t)$

*double*  $tp := 0.0$ ; // время прошедшее с момента предыдущего скачка

*int*  $i := 0; j := 0$ ; // переменные состояния системы

*double*  $t_{nextfail} := 0.0$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента

*double*  $t_{nextrepair} := \infty$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта

*int*  $z := 1$ ; // счетчик числа итераций основного цикла

$s := rf\_GI(n, \lambda(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $s$  – время до первого события (отказа)

$sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $sr$  – время ремонта отказавшего элемента

$t_{nextfail} := t + s$ ;

**while**  $t < \infty$  **do**

**if**  $i = 0$  **then**

**if**  $length(tv) == 1$  **then**

$tp := 0; sr := 0; snv := sort(s)$ ;

$sn := \min(snv); t_{nextfail} := t + sn$ ;

**end**

**else**

$tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;

$s\_new := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ; // новое время отказа

$snv := c(s\_r[s\_r > 0], s\_new)$

$sn := \min(s); t_{nextfail} := t + sn$ ;

**end**

$t_{nextrepair} := \infty; j := i + 1; t := t_{nextfail}$ ;

**end**

**for** ( $v$  in  $1:(n-1)$ )

```

if  $i == v$  then
     $tp := tv[length(tv)] - tv[length(tv) - 1]$ ;
     $s\_r := sort(snv[] - tp)$ 
    if  $t == t_{nextfail}$  then
         $snv := s\_r[-1]$ ;
        if  $i == 1$  then
             $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ ;
        end
        else if  $length(tv) > 2$  then
             $sr := abs(sr[] - tp)$ ;
        end
    end
    if  $t == t_{nextrepair}$  then
         $s\_new := rf\_GI(1, \lambda(x))$ ;
         $snv := c(s\_r[s\_r > 0], s\_new)$ 
         $sr := rf\_GI(1, \beta(x))$ 
    end
     $sn := \min(snv)$ ;
     $t_{nextfail} := t + sn; t_{nextrepair} := t + sr$ ;
    if  $t_{nextfail} < t_{nextrepair}$  then
         $j := i + 1; t := t_{nextfail}$ ; end
    else  $j := i - 1; t := t_{nextrepair}$ ;
    end
end
if  $i == k$  then
    break;
end
 $r := array(r, dim := c(1, 3, z))$ ;
 $r[:, z] := [t, i, j]; i := j; z := z + 1$ 
end do

```

Оценка длительности пребывания до состояния  $i = k$ ; вычисление оценки среднего времени жизни системы:

$$ET = \frac{1}{NG} \sum_{i=1}^{NG} (\text{длительность пребывания в состоянии } k)_i$$

**End**

## Приложение Д: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления стационарных вероятностей состояний неоднородной дублированной системы холодного резервирования

### Begin

```

    array r[] := [0, 0, 0]; // многомерный массив, содержащий ре-
    зультаты k-го шага основного цикла
    double t := 0.0; // инициализация часов модельного вре-
    мени
    int i := 0; j := 0; // переменные состояния системы
    double tnextfail := 0.0; // переменная, в которой хранится время
    до следующего отказа элемента
    double tnextrepair := ∞; // переменная, в которой хранится время
    до следующего окончания ремонта
    int k := 1; // счетчик числа итераций основного цикла
    s[] := rf - GI(1, λi(x)); // генерация произвольной случайной
    величины s – время до первого события (отказа)
    sr[] := rf - GI(1, β(x)); // генерация произвольной случай-
    ной величины sr – время ремонта отказавшего элемента
    while t < T do
        if i == 0 then
            s[i+1] := rf - GI(1, λi+1(x)); tnextrepair := ∞; j := i+1; t := tnextfail;
        end
        if i == 1 then
            else if (i-1) == 0 then
                s[i+1] := rf - GI(1, λi+1(x)); sr[i] := rf - GI(1, β(x));
                tnextfail := t + s[i+1]; tnextrepair := t + sr[i];
                if tnextfail < tnextrepair then j := i+1; t := tnextfail; end
                else j := i-1; t := tnextrepair; end end
            else if (i-1) == 2 then
                s[i+1] := rf - GI(1, λi(x)); sr[i+1] := rf - GI(1, β(x));
                tnextfail := t + s[i+1]; tnextrepair := t + sr[i+1];
                if tnextfail < tnextrepair then j := i+1; t := tnextfail; end
                else j := i-1; t := tnextrepair; end end
        end
    end

```

**End**

**if**  $i = 2$  **then**  $t_{nextfail} := \infty; j := i - 1; t := t_{nextrepair}$ ; **end**

**if**  $t > T$  **then**  $t = T$ ; **end**

$r := array(r, dim := c(1, 3, z))$ ;

$r[:, k] := [t, i, j]; i := j; k := k + 1$ ; **end do**

Оценка длительности пребывания в каждом состоянии  $i, (i = 0, 1, 2)$ ; вычисление стационарных вероятностей состояний:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{NG} \sum_{j=1}^{NG} (\text{длительность пребывания в состоянии } i/T)_j$$

**End**

## Приложение Е: Код алгоритма имитационного моделирования для вычисления оценки среднего времени жизни и функции надежности неоднородной дублированной системы холодного резервирования

**Begin**

*array*  $r[] := [0, 0, 0]$ ; // многомерный массив, содержащий результаты  $k$ -го шага основного цикла

*double*  $t := 0.0$ ; // инициализация часов модельного времени

*int*  $i := 0; j := 0$ ; // переменные состояния системы

*double*  $t_{nextfail} := 0.0$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего отказа элемента

*double*  $t_{nextrepair} := \infty$ ; // переменная, в которой хранится время до следующего окончания ремонта

*int*  $k := 1$ ; // счетчик числа итераций основного цикла

$s[] := rf\_GI(1, \lambda_i(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $s$  – время до первого события (отказа)

$sr[] := rf\_GI(1, \beta(x))$ ; // генерация произвольной случайной величины  $sr$  – время ремонта отказавшего элемента

**while**  $t = \infty$  **do**

**if**  $i = 0$  **then**

$s[i+1] := rf\_GI(1, \lambda_{i+1}(x)); t_{nextrepair} := \infty; j := i+1; t := t_{nextfail}$ ;

**end**

**if**  $i = 1$  **then**

$s[i+1] := rf\_GI(1, \lambda_{i+1}(x)); sr[i] := rf\_GI(1, \beta(x));$

$t_{nextfail} := t + s[i+1]; t_{nextrepair} := t + sr[i];$

**if**  $t_{nextfail} < t_{nextrepair}$  **then**  $j := i+1; t := t_{nextfail}$ ; **end**

**else**  $j := i-1; t := t_{nextrepair}$ ; **end end**

**end**

**if**  $i = 2$  **then break end**

$r := array(r, dim := c(1, 3, z))$ ;

$r[., k] := [t, i, j]; i := j; k := k+1$ ; **end do**

Оценка длительности пребывания до состояния  $i=2$ ; вычисление оценки среднего времени жизни системы:

$$ET = \frac{1}{NG} \sum_{i=1}^{NG} (\text{длительность пребывания в состоянии } 2)_i$$

**End**