О Т З Ы В

официального оппонента о диссертации А.Ш. Адхамовой
"Краевые задачи для систем
дифференциально-разностных уравнений
с переменными коэффициентами",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук по специальности
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа А.Ш. Адхамовой посвящена изучению некоторых краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с переменными коэффициентами, связанных с задачей Н.Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием.

Теория дифференциально-разностных уравнений начала интенсивно развиваться во второй половине XX века. Повышенный интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. Такие процессы часто называют процессами "с запаздыванием" или "с последействием". Уравнения с запаздыванием возникают в различных приложениях, таких как системы управления, механика, ядерные реакторы, нейронные сети, процессы горения, взаимодействие видов, микробиология, модели обучения, эпидемиология, физиология и многие другие.

В настоящее время имеется огромное число работ по теории дифференциально-разностных уравнений. Для таких уравнений изучаются различные постановки задач, проводятся теоретические и численные исследования свойств решений, рассматриваются конкретные модели, возникающие в приложениях. Некоторые аспекты теории уравнений с запаздыванием отражены в книгах Ю.И. Неймарка (1949), А.Д. Мышкиса (1951), Л.Э. Эльсгольца (1955), Н.Н. Красовского (1959), В.И. Зубова (1959), Э. Пинни (1961), Р. Беллмана и К. Кука (1967), В.П. Рубаника (1969), А. Халаная и Д. Векслера (1971), Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка (1979), С.Н. Шиманова (1983), Дж. Хейла (1984), В.Г. Курбатова (1990) Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной (1991), А.Л. Скубачевского (1997), В.Б. Колмановского и А.Д. Мышкиса (1999), Г.А. Каменского (2007), В.В. Власова и Д.А. Медведева (2008) и др.

Однако, несмотря на бурное развитие теории дифференциально-разностных уравнений, остается масса нерешенных вопросов. Хорошо известно, что уравнения с запаздыванием активно используются при описании процессов управления. Поэтому одной из актуальных является разработка методов решения задач управления. Особенно сложными являются задачи, в которых возникают системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.

В настоящей диссертации решение задач управления сводится к нахождению обобщенных решений некоторых краевых задач для линейных систем дифференциально-разностных уравнений в соболевских пространствах. Поэтому актуальность темы проведенного Автором исследования не вызывает сомнений.

Основные результаты диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

В диссертации рассматривается системы дифференциально-разностных уравнений с управлением следующего вида

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad t>0, \tag{1}$$

где $A_m(t)$, $B_m(t)$ — матрицы размера $n\times k$ с вещественнозначными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau > 0$ — запаздывание, $u(t)$ — вектор-функция управления с n компонентами. Начальные данные определяются вектор-функцией $\varphi(t)$ с k компонентами:

$$y(t) = \varphi(t), \qquad t\in[-M\tau, 0]. \tag{2}$$

Требуется указать управление такое, что

$$y(t) = 0, \qquad t\in[T-M\tau, T], \quad T>(M+1)\tau, \tag{3}$$

при этом

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \int_0^T \left|\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)\right|^2 dt \to \min. \tag{4}$$

Для различных систем вида (1) Автор показывает, что разрешимость вариационной задачи (4) с условиями (2), (3) эквивалентна разрешимости в соболевском пространстве W_2^1 краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка

$$-\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)'$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)$$

$$-\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)'$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)=0, \quad t\in(0,T-M\tau), \tag{5}$$

с условиями (2), (3) в предположении, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\in W_2^1(0,T-M\tau). \tag{6}$$

Вектор-функцию $y(t)\in W_2^1(-M\tau,T)$, удовлетворяющую (2), (3), (5), (6), Автор называет *обобщенным решением.* Для каждого класса систем Автор исследует вопрос существования и единственности обобщенного решения, а также устанавливает оценки вида

$$\|y\|_{W_2^1(-M\tau,T)}\le c_1\|\varphi\|+c_2(\varphi). \tag{7}$$

В первой главе диссертации рассматриваются системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа вида (1) с постоянными коэффициентами, когда $n=k$, A_m, B_m — постоянные матрицы, $\det A_0\ne 0$. Эквивалентность задач установлена в теореме 1.1. В теорема 1.2 для любой начальной вектор-функции $\varphi\in W_2^1(-M\tau,0)$ доказано существование единственного обобщенного решения и установлена оценка

$$\|y\|_{W_2^1(-M\tau,T)}\le c\|\varphi\|_{W_2^1(-M\tau,0)}. \tag{8}$$

В второй главе диссертации рассматриваются системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа вида (1) с переменными коэффициентами, когда $n = k$, $\det A_0(t) \neq 0$ при $t \in \mathbb{R}$. Эквивалентность задач установлена в теореме 2.1. В теорема 2.2 для любой начальной вектор-функции $\varphi(t) \in W_2^1(-M\tau, 0)$ доказано существование единственного обобщенного решения и установлена оценка вида (8). В этой же главе Автор обсуждается важный вопрос о регулярности решений. Если $\varphi(t) \in W_2^2(-M\tau, 0)$, доказано, что $y(t) \in W_2^2$ на подынтервалах (теорема 2.3) и на всем интервале $(0, T - M\tau)$ в случае τ-периодических элементов матриц $A_m(t)$ и при некоторых дополнительных условиях на $\varphi(t)$ (теорема 2.4).

В третьей главе диссертации рассматриваются системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа вида (1) с переменными коэффициентами, когда $n = k$, $\det A_0(t) \neq 0$ при $t \in \mathbb{R}$, $A_j(t) \equiv 0$, $j \neq 0$. Поскольку в этом случае в системе не участвуют производные вектор-функции $y(t)$ с запаздыванием, то постановка начальной задачи не требует гладкости от начальной функции. Однако дополнительно предполагается, что

$$y(+0) = \varphi_0, \tag{9}$$

где φ_0 — заданный вектор с постоянными вещественными компонентами. При $\varphi(t) \in L_2(-M\tau, 0)$ в теореме 3.1 установлена эквивалентность разрешимости задачи управления (2)–(4), (9) и краевой задачи (2), (3), (5) при условии (6). В теореме 3.2 для любых начальной вектор-функции $\varphi(t) \in L_2(-M\tau, 0)$ и вектора φ_0 доказано существование единственного обобщенного решения и установлена оценка вида (7), где $c_2(\varphi) = c_1\|\varphi_0\|$. Если $\varphi(t) \in W_2^1(-M\tau, 0)$ и $\varphi(-0) = \varphi_0$, установлено, что $y(t) \in W_2^2(0, T - M\tau)$ (теорема 3.3).

В четвертой главе рассмотрена более сложная по сравнению с главой 2 задача управления, поскольку предполагается, что $n > k$. Как и в предыдущих главах осуществлен переход от вариационной постановки к эквивалентной краевой задаче (2), (3), (5) (теорема 4.1). В предположении, что существует ненулевой минор k-го порядка матрицы $A_0(t)$ для любой начальной вектор-функции $\varphi(t) \in W_2^1(-M\tau, 0)$ доказано существование единственного обобщенного решения и установлена оценка вида (8) (теорема 4.2). В конце главы Автор исследует свойства дифференциального оператора, который задает дифференциальное уравнение

(5) (теорема 4.3).

Замечания по работе.

1. В диссертации имеются отдельные незначительные погрешности редакционного характера, в частности, лишние фигурные скобки в формулах (1.15), (4.11), (4.31), одна и та же книга упоминается под номерами [49] и [79].

2. В первой главе отсутствует определение $\widetilde{W}$ на стр. 31, хотя во всех остальных главах оно дано.

3. В первой главе рассматриваются системы вида (1) с постоянными коэффициентами, однако на стр. 31, 32 матрицы A_m, B_m вновь зависят от t.

4. В первой, второй и четвертой главах при постановке задачи Автор не предполагает, что $y(+0) = \varphi(-0)$. Возможно, Автор в силу теоремы вложения это подразумевает. Однако стоило об этом написать, как например, это было отмечено в третьей главе в теореме о регулярности обобщенного решения.

5. В четвертой главе в определении обобщенного решения не указывается, какому классу принадлежит вектор-функция v.

6. К сожалению, в диссертации не дано ни одного иллюстрирующего примера. Было бы интересно на примерах показать, какие конкретные краевые задачи возникают.

7. Поскольку рассматриваемые системы являются линейными, то возникает естественный вопрос: можно ли получить аналогичные результаты, если элементы матриц A_m, B_m являются комплексными?

8. При обсуждении вопроса о регулярности Автор ограничивается повышением гладкости начальной вектор-функции $\varphi(t)$ только на 1. В связи с этим напрашивается вопрос: Можно ли получить аналогичные результаты, если $\varphi(t)$ будет обладать большей гладкостью?

9. Можно ли обобщить полученные в диссертации результаты на случай несоизмеримых запаздываний?

Указанные недостатки не влияют на качество выполненной работы и положительную оценку. Отмеченные вопросы следует воспринимать, как пожелания Автору для дальнейшей работы в этом направлении.

Общая оценка работы. Тема диссертации актуальна и соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Результаты работы являются новыми, получены Автором самостоятельно, имеют важное значение для развития теории дифференциально-разностных уравнений. Следует отметить, что Автором продемонстрирована высокая аналитическая техника при доказательстве теорем.

Все утверждения четко сформулированы и снабжены полными доказательствами, обоснованность выносимых на защиту результатов не вызывает сомнений.

Материал диссертации изложен в строгой логической последовательности, обсуждение полученных результатов дополняет основное содержание.

Основные результаты своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации опубликовано 7 статей, изданных в научных журналах, индексируемых в международных базах данных, и 13 тезисов докладов на международных конференциях.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Заключение. Диссертационное исследование Адхамовой Амины Шухратовны "Краевые задачи для систем дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами" является законченной научно-квалификационной работой, в которой установлены связи между нестационарными задачами управления и краевыми задачами для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, а также исследована их корректность, что имеет важное значение для развития общей теории краевых задач для неавтономных уравнений с запаздыванием.

Работа соответствует критериям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", утвержденного Ученым советом РУДН 22.01.2024 г., протокол № УС-1, и Адхамова Амина Шухратовна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Новосибирский национальный исследовательский государственный университет”,
доктор физико-математических наук (01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), доцент
Матвеева Инесса Изотовна

29 ноября 2024 г.

Адрес: 630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 1

тел.: +7(913)7545032, e-mail: i.matveeva@g.nsu.ru

Подпись Матвеевой И.И. заверяю
Специалист Управления кадров НГУ
Н.Н. Кавриго
«29» 11 2024 г.