ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Болтачева Андрея Владимировича
**«Об индексе нелокальных эллиптических уравнений,
ассоциированных с диффеоморфизмами многообразий с краем»**,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы. При рассмотрении конкретных классов уравнений или краевых задач в первую очередь возникает вопрос о фредгольмовости соответствующего оператора, а для фредгольмовых операторов – вопрос о вычислении индекса. В частности, исследование фредгольмовости дифференциальных уравнений и краевых задач является одним из основных направлений в теории дифференциальных уравнений. В случае дифференциальных уравнений на компактных многоообразиях одним из основных результатов является утверждение, что оператор фредгольмов тогда и только тогда, когда оно его символ, являющийся функцией на кокасательном расслоении, обратим; такие операторы называются эллиптическими. Основополагающим результатом в теории краевых задач для эллиптических уравнений являются условия Шапиро-Лопатинского, необходимые и достаточные для того, чтобы рассматриваемая краевая задача была фредгольмовой в соответствующих пространствах. Краевая задача может быть сведена к псевдодифференциальному уравнению на границе, после чего условия Шапиро-Лопатинского оказываются эквивалентным эллиптичности соответствющего оператора на границе.

Для фредгольмова оператора A конечны размерность ядра $dimkerA$ и размерность коядра $dimcokerA$, но эти характеристики неустойчивы и вычисляются в явном виде только в исключительных случаях. При этом индекс

$$indA = dimkerA - dimcokerA$$

обладает значительно лучшими свойствами – он устойчив относительно малых изменений оператора и не зависит от младших членов в уравнении. Это означает, что индекс является топологическим инвариантом и возникает вопрос о том, как выразить индекс эллиптического оператора через известные в алгебраической топологии и дифференциальной геометрии инварианты. Этот вопрос был сформулирован И.М. Гельфандом. Требуемая формула индекса эллиптического псевдодифференциального оператора была полученая в работах М.Атьи и И. Зингера, этот результат имел широкий международный резонанс, поскольку выявил связи между направлениями в математики, ранее развивавшимися независимо.

Наряду с классическими дифференциальными и псевдодифференциальными уравнениями активно велись исследования более сложных дифференциально-функциональных уравнений, в которые, кроме дифференциальных операторов, входят операторы сдвига вида

$$(T_g u)(x) = u(g(x)),$$

порожденные отображениями g области определения X рассматриваемых функций. Это операторы вида

$$B = \sum_k A_k T_{g_k}, \tag{1}$$

где отображения g_k из заданной группы преобразований Γ области определения X, а коэффициенты A_k есть элементы заданной операторной алгебры $\mathcal{A}$. В случае, когда $\mathcal{A}$ есть алгебра псевдодифференциальных операторов, получаем т.н. функционально-псевдодифферен -циальные операторы. В другой терминологии соответствующие уравнения называют уравнениями с отклоняющимся аргументом. Если $\mathcal{A}$ есть алгебра функций, то такие операторы называют (чисто) функциональными.

Операторы рассматриваемого вида являются нелокальными и они принципиально отличаются дифференциальных, так как скалярные дифференциальные операторы коммутируют с точностью до компактных операторов или операторов меньшего порядка, а операторы T_g в общем случае существенно не коммутируют с дифференциальными. Поэтому алгебры, порожденные операторами вида (1) существенно сложнее алгебр псевдодифференциальных операторов.

Одной из основных задач оказалось получение условий, при которых рассматривамый нелокальный дифференциальный оператор является фредгольмовым. В работах А.Б. Антоневича и А.В. Лебедева было показано, что дифференциально-функциональнму оператору на компактном многообразии соответствует символ, являющийся функциональным оператором в пространстве функций на сферическом кокасательном расслоении и фредгольмовость исходного оператора равносильна обратимости символа (как оператора в пространстве функций). Формула индекса таких операторов была получена в монографии В.Е.Назайкинского, Б.Ю. Стернина и А.Ю. Савина.

Таким образом, нелокальные операторы являются предметом многих исследований, которые составляют актуальное активно развивающееся направление, исследованиями разных классов таких операторов занимались во многих научных центрах, в том числе в РУДН, МГУ, Ростовском, Одесском, Воронежском, Белорусском университетах.

К этой актуальной тематике относится и рассматривамая диссертация А.В. Болтачева. Объектом исследования являются операторы вида (1) в случае, когда коэффициенты A_k принадлежат алгебре Буте де Монвеля. Алгебра Буте де Монвеля порождена операторами краевых задач и их регуляризаторами, поэтому рассматривамые операторы в диссертации называются нелокальными краевыми задачами, ассоциированными с действием группы преобразований Γ.

Характеристика содержания диссертационной работы

Диссертация А.В. Болтачева состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 125 страниц.

Алгебра $\mathcal{B}$, порожденная операторами вида (1) , получена присоединением к исходной алгебре коэффициентов $\mathcal{A}$ операторов сдвига T_g. При этом основное соотношение между коэффициентами и операторами сдвига заключается в том, что отображение $A \to T_g A (T_g^{-1}$ является автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$. Это означает, что алгебра $\mathcal{B}$ имеет структуру скрещенного произведения алгебры $\mathcal{A}$ и группы автоморфизмов этой алгебры. Поэтому в первой главе приведены определения алгебраического и гладкого скрещенных произведений и изложены предварительные сведения об алгебре Буте де Монвеля.

Вторая глава посвящена исследованию алгебры $\mathcal{B}$ нелокальных краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы Γ степенного роста на многообразии с краем.

Первый шаг исследования, изложенный в п.2.1, заключается в построении символов рассматриваемых операторов. Общая схема построения символов заключается в следующем. Основные свойства символа заключаются в том, что

$$\sigma(B_1 + B_1) = \sigma(B_1) + \sigma(B_2),$$

$$\sigma(B_1 B_1) = \sigma(B_1)\sigma(B_2),$$

и что $\sigma(B) = 0$, если оператор компактный. Таким свойствами обладает переход от оператора B в классу эквивалентности $[B]$ из фактор-алгебры $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ по идеалу компактных операторов. Поэтому построение символа эквивалентно построению в явном виде алгербы, изоморфной $\mathcal{B}/\mathcal{K}$.

В работе алгебра символов строится как скрещенное произведение алгебры символов коэффициентов на группу индуцированных автоморфизмов. Основной результат сформулирован в теореме о символе 2.9:

Если символ оператора обратим, то оператор фредгольмов.

Здесь приходится сделать замечание, что в этом месте изложение излишне сжато. В частности, теорема 2.9 приведена без соответствующих ссылок. Не пояснено, какую роль играет условие, что Γ группа со степенным ростом.

Поясним, что условие на вид группы Γ возникает ввиду того, что общая теорема об изоморфизме абстрактных алгебр с аналогичными свойствами вида содержит требование аменабельности группы. Это требование существенно в том смысле, что для неаменабельных групп утверждение может не выполняться. Но из этого не следует, что нет изоморфизма конкретных рассматриваемых алгебр. Поэтому вопрос о справедливости теоремы о символе в случае произвольных групп преобразований остается открытым.

Основные результаты диссертации заключаются в нахождении индексов рассматриваемых задач. Получена формула индекса рассматривамомй нелокальной краевой задачи, использующая характер Черна символов краевой задачи и класс Тодда многообразия с краем.

Известная формула Б.В. Федосова выражает индекс через следы вспомогательных операторов

$$ind B = Tr(I - BR) - Tr(I - RB)$$

Полученная в диссертации формула индекса является в определеном смысле записью формулы Федосова с помощью символов. В $\mathbb{R}^n$ след матричного интегрального оператора с гладким ядром $K(x,y)$ выражается формулой

$$TrA = \int trK(x,x)dx,$$

где $trK(x,x)$ есть след матрицы $K(x,x)$. В рассматриваемом случае возникает ядерный оператор

$$BR + RB$$

и аналогом выражения $trK(x,x)$ является характер Черна, и след оператора имеет аналогичное интегральное представление, задаваемое с помощью класса Тодда. Построение таких аналогов потребовало достаточно сложного анализа рассматривамых операторов, проведеного с использованием техники из теории когомологий де Рама и дифференциальной геометрии.

Также рассмотрены нелокальные краевые задачи, возникающие как сужения локальных задач на подпространства, заданные проекторами, и вычислен их индекс. В этом случае формула индекса включает не только характер Черна символа оператора Буте де Монвеля, но также характер Черна проектора и изоморфизм Тома для подмногообразия неподвижных точек.

В третьей главе приведено исследование нелокальных краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы на многообразии с краем. В первом параграфе вычисляются траекторные символы и дается теорема конечности таких краевых задач. Далее в работе вычислен топологический индекс нелокальных краевых задач с использованием аппарата циклических когомологий. В последнем параграфе рассмотрен пример нелокальной краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра. Для этой задачи вычислены траекторные символы и приведены условия эллиптичности в явном виде.

Ввиду весьма общего характера полученных результатов Содержательные примеры применения полученных формулы могут быть построены в случае операторов, у которых символы, являющиеся функциональными операторами, обратимы. Однако необходимые и достаточные условия обратимости функциональных операторов известны только в специальных случаях:

1) группы Γ конечна;

2) коэффициенты A_k перестановочны с операторами сдвига;

3) для двучленных операторов вида $A_1T_{g_1} + A_2T_{g_2}$.

Поэтому в диссертации в конце главы 2 рассмотрен пример с конечной группой сдвигов, а в конце главы 3 — пример, в котором коэффициенты перестановочны со сдвигом. Эти примеры придают весомость общим результатам, так как в них окончательные результаты получены в явном виде.

Достоверность и новизна результатов диссертации

Все результаты работы являются новыми. Получена формула индекса нелокальных краевых задач на гладких многообразиях с краем, на которых изометрически действует дискретная группа. Рассмотрен пример скрученной нелокальной краевой задачи, для которой получена формула индекса. Для нелокальных краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы, сформулирована теорема конечности. Достоверность результатов подтверждается имеющимися публикациями в ведущих российских журналах. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации Научные положения, выводы и заключения, представленные в диссертационной работе обоснованы полностью, что подтверждается строгостью математических доказательств, а также корректным использованием методов эллиптической теории и дифференциальной геометрии.

Ценность для науки и практики результатов работы

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными. Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати Результаты диссертационной работы А.В.Болтачева опубликованы в 11 работах, из них 5 статей опубликованы в научных журналах, индексируемых в международных базах данных и 6 в тезисах докладов на международных конференциях.

Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации Автореферат вполне отражает содержание диссертации.

Замечания по диссертационной работе

В целом материал диссертации изложен достаточно полно, детально описаны сложные вычисления, однако в ряде мест изложение слишком конспективно, что затрудняет чтение.

стр.42. В формуле 1.16 неудачные обозначения вместо $f_1(\gamma)f_2(\gamma)$ произведение лучше записывать как $f_1 \cdot f_2(\gamma)$, поскольку правая часть задает значение в заданной точке γ.

Стр. 43 Из этой компактности следует оценка ... В тексте идет речь не о компактности, а о неравенстве

Стр 45. Определение 2.4 содержит условие, что выполнено равенство

$$P_2 D P_1 = D.$$

Такое равенство не может быть выполнено при нетривиальных проекторах. Имеется ввиду и далее используется условие, что D переводит образ оператора P_1 в образ оператора P_2.

Заключение

Диссертационное исследование Болтачева Андрея Владимировича является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится новое решение научной задачи нахождения индекса нелокальных эллиптических краевых задач, имеющей важное значение для теории нелокальных эллиптических операторов. Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», утвержденного ученым советом РУДН протокол № УС-1 от 22.01.2024 г., а её автор, Болтачев Андрей Владимирович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент
профессор кафедры функционального анализа
механико-математического факультета Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
д.ф.-м.н., профессор Антоневич Анатолий Борисович

Антоневича А.Б.
ПОДПИСЬ УДОСТОВЕРЯЮ
Начальник управления
организационной работы и
документационного обеспечения
Н.Б. Черкасская
11 2024

220030, Беларусь, г. Минск, пр. Независимости 4, БГУ
контактный телефон- +375 17 209 53 68 +375 29 629 37 21
адрес электронной почты: antonevich@bsu.by