МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

**ШЕСТАКОВА Татьяна Павловна**

# КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИИ В ФОРМАЛИЗМЕ РАСШИРЕННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

1.3.3 – теоретическая физика

**Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук**

**г. Ростов-на-Дону**
**2024 г.**

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Со времени создания квантовой механики в первой трети XX века перед теоретической физикой встала задача объединения общей теории относительности с квантовыми представлениями, построения квантовой теории гравитации. Хотя прошло почти сто лет, эта задача до сих пор не решена. Она по-прежнему является **актуальной проблемой теоретической физики**.

Несмотря на несомненные успехи таких теорий, как квантовая электродинамика, теория электрослабых взаимодействий, квантовая хромодинамика, достигнуть значительного продвижения на пути квантования гравитации не удалось. Представляется, что это обусловлено отличием гравитации от других взаимодействий и отличием тех задач, которые должны решать соответствующие квантовые теории. Если в перечисленных теориях основной целью было описание взаимодействий и вычисление вероятностей различных процессов с участием элементарных частиц на фоне плоского пространства-времени Минковского, в случае гравитации квантованию подлежит метрический тензор, определяющий структуру пространства-времени.

Естественно, что на первоначальном этапе для построения квантовой теории гравитации пытались использовать те методы, которые были разработаны при создании квантовой механики и квантовой теории негравитационных полей. Большую роль сыграли идеи Дирака, который был вдохновлен успехами квантовой механики и считал, что необходимым шагом перед квантованием должно быть получение гамильтоновой формулировки теории. Если известна функция Гамильтона, используя стандартные правила канонического квантования, можно записать уравнение Шредингера, после чего остается искать его решения. Но общая теория относительности – теория со связями, и для такой теории построение гамильтонова формализма – отнюдь не тривиальная задача. Можно сказать, что и на сегодняшний день она не имеет однозначного решения. Дирак, как известно, в 1950-х годах выдвинул свой метод, изложенный в работах [1-3]. Применение этого метода к гравитации дано в работе [4].

После введения новой параметризации гравитационных переменных Арновиттом, Дезером и Мизнером (параметризация АДМ) в работе [5], Де Витт, опираясь на идеи Уилера и используя метод Дирака, предпринял первую существенную попытку построения квантовой теории гравитации [6]. Предложенный подход известен как квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта, он оказал значительное влияние на развитие этого направления исследований. Главная роль в этом подходе отводится уравнению Уилера – Де Витта для волновой функции Вселенной (квантовому аналогу гамильтоновой связи). Поскольку решение этого уравнения в общем случае, для полной теории гравитации, наталкивается на огромные технические трудности, большинство результатов было получено для космологических моделей с конечным числом степеней свободы. Интерес к этому направлению стимулировало появление работ Хартла и Хокинга [7], Виленкина [8] и других авторов в начале 1980-х годов.

Было признано, что квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта внутренне присущ ряд проблем, среди которых наиболее известны проблема времени, проблема гильбертова пространства (введения положительно-определенного скалярного произведения), проблема упорядочения операторов, проблема параметризационной неинвариантности и другие. Обращение к волновой функции можно в определенном смысле рассматривать как возвращение от квантовой теории поля к аппарату квантовой механики, что порождает проблему интерпретации волновой функции Вселенной.

Все эти проблемы являются взаимосвязанными. Хотя предлагалось множество подходов к их решению, представляется, что в рамках квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта они не могут быть решены.

Если теория Уилера – Де Витта была получена в формализме канонического квантования, с развитием техники континуального интегрирования и применения ее к калибровочным полям, были предприняты попытки вывести уравнения Уилера – Де Витта из континуального интеграла и тем самым дать более строгое обоснование квантовой геометродинамики, используя методы квантования калибровочных полей Фаддеева – Попова [9], Баталина – Фрадкина – Вилковыского [10-12] и другие. При этом встает вопрос о доказательстве эквивалентности результатов, полученных в различных подходах. Эквивалентность удается доказать в некоторых частных случаях (для конкретных моделей, для случая коммутирующих связей, в однопетлевом приближении и т. д.). Однако в общем случае доказательство эквивалентности наталкивается на огромные технические трудности, поэтому говорить о таком доказательстве можно лишь с оговорками.

Хотя первоначально проблема времени воспринималась как недостаток теории Уилера – Де Витта, позднее появилась точка зрения, разделяемая рядом ученых, что на фундаментальном уровне, на котором действует квантовая гравитация, времени не существует, а, следовательно, и пространства-времени как гладкого многообразия, каким оно рассматривается в общей теории относительности. Появились подходы, в которых пространство-время понимается как дискретное множество точек. К таким подходам относятся, прежде всего, петлевая квантовая гравитация [13, 14] и подход, использующий причинные множества [16].

На сегодняшний день существует много подходов к квантованию гравитации. Однако нет результатов, которые могли бы однозначно подтвердить правильность какого-либо подхода или ошибочность другого. Отсутствуют экспериментальные данные, которые бы позволили проверить теоретические предсказания. От квантовой теории гравитации ожидают решения общетеоретических вопросов, таких как объяснение гравитационной энтропии. И хотя в рамках теории суперструн [16] или петлевой квантовой гравитации [14] предлагаются определенные решения, эти решения не являются бесспорными, они вызывают много вопросов, и проблема остается открытой. Некоторые ученые, например, Роджер Пенроуз [17], ожидают от квантовой гравитации решение проблемы квантовых измерений (редукции волновой функции). Но и здесь не удается существенно продвинуться вперед.

В связи с этим возникает впечатление, что при применении упомянутых методов к гравитационному полю нечто упущено, не принято во внимание именно то, что отличает гравитацию от других полевых теорий. Мы должны допустить, что геометрия пространства-времени может быть произвольной, Вселенная может иметь нетривиальную топологию. В свою очередь это означает, что гравитирующая система, которую мы изучаем, может не иметь асимптотических состояний. Под *гравитирующей системой* понимается физическая система, в динамике которой гравитационное взаимодействие играет определяющую роль, будь то отдельно взятый объект во Вселенной (например, черная дыра) или Вселенная в целом. Асимптотические состояния играют важную роль в квантовой теории калибровочных полей; фактически, именно их наличие обеспечивает калибровочную инвариантность теории.

Представляет интерес исследовать вопрос о возможности построения квантовой теории гравитации, которая не включала бы в себя, явно или неявно, предположение о наличии асимптотических состояний у гравитирующей системы. Поскольку отсутствие асимптотических состояний является характерной особенностью именно гравитации, данное исследование представляется **актуальным** с точки зрения поиска будущей теории квантовой гравитации.

**Целью данной работы** является формулировка математически последовательной квантовой теории гравитации для гравитирующей системы без асимптотических состояний, каковой является Вселенная в целом. Эта формулировка включает в себя анализ существующих методов квантования калибровочных полей и их применимости к гравитационному полю, обоснование и вывод уравнения для волновой функции Вселенной (уравнения Шредингера) из континуального интеграла с эффективным действием Баталина – Вилковыского (Фаддеева – Попова), получение общего решения этого уравнения и анализ его структуры, а также его интерпретацию как с точки зрения копенгагенской интерпретации квантовой теории, так и с точки зрения концепции "относительных состояний" Эверетта. Все результаты, полученные для моделей вселенной с конечным числом степеней свободы, допускают обобщение для полной теории гравитации.

**Научная новизна.** Впервые сформулирована гамильтонова динамика в расширенном фазовом пространстве, которая представляет альтернативу как обобщенной гамильтоновой динамике Дирака, так и гамильтоновой формулировке, которая получается из эффективного действия Баталина – Фрадкина – Вилковыского. Показано, что система гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве полностью эквивалентна системе лагранжевых уравнений, получаемых вариационной процедурой из эффективного действия Баталина – Вилковыского. Показано, что выполняется принцип соответствия: оператор Гамильтона в уравнении Шредингера, выведенном из континуального интеграла, соответствует функции Гамильтона в расширенном фазовом пространстве.

Впервые показано, что существует класс преобразований в расширенном фазовом пространстве, включающий калибровочные степени свободы, которые являются каноническими преобразованиями в расширенном фазовом пространстве. В лагранжевом формализме таким преобразованиям отвечает переход от старых калибровочных переменных к новым. Это также коренным образом отличается от того, что мы имеем в подходе Дирака: там калибровочные переменные считаются нефизическими, "лишними", а преобразования, включающие такие переменные, не являются каноническими.

Используя глобальную БРСТ-симметрию, получено выражение для генератора БРСТ-преобразований в соответствии с теоремой Нетер, которое совпадает с выражением для генератора в подходе Баталина – Фрадкина – Вилковыского в случае электродинамики и полей Янга – Миллса, но отличается в случае гравитации. Причина этого заключается в том, что группа преобразований, генерируемых гравитационными связями, отличается от группы калибровочных преобразований общей теории относительности в лагранжевом формализме.

Впервые проведен анализ различных методов квантования калибровочных полей в приложении к гравитационному полю с точки зрения калибровочной инвариантности полученных результатов и показано, что отсутствует строгое математическое доказательство калибровочной инвариантности уравнения Уилера – Де Витта.

Проведено обобщение процедуры вывода уравнения Шредингера из континуального интеграла для систем со связями, в том числе калибровочных полей, описываемых эффективным действием Баталина – Вилковыского в лагранжевой форме. Установлено, что уравнение Уилера – Де Витта может рассматриваться как частный случай уравнения Шредингера, отвечающий определенному выбору параметризации гравитационных переменных и выбору калибровочных условий, а также условию независимости от времени волновой функции Вселенной. Проанализирована структура общего решения уравнения Шредингера, получено уравнение для физической части волновой функции, несущей информацию об объекте исследования.

Получены решения уравнения Шредингера для изотропной модели в различных калибровках (при выборе различных систем отсчета). В соответствии с интерпретацией Ландау и Лифшица системы отсчета как среды, заполняющей все пространство, показано, что выбор различных калибровочных условий (систем отсчета) математически эквивалентен включению в модель среды с заданным уравнением состояния. Предположительно эта среда представляет собой гравитационный вакуум, который проявляет себя как фактор космологической эволюции.

Исследована ситуация, когда в разных областях Вселенной вводятся различные калибровочные условия. Такую ситуацию не имело смысла рассматривать в рамках подхода Уилера – Де Витта или других калибровочно-инвариантных подходов, поэтому в данной работе она изучается впервые. В случае, когда Вселенная имеет сложную топологическую структуру, невозможно ввести одну систему отсчета во всем пространстве-времени, и приходится вводить различные калибровочные условия в разных областях. Тогда эволюция в пределах одной области описывается унитарным оператором, который выражается через физический гамильтониан, вид которого определяется выбранными калибровочными условиями. При переходе из одной области в другую изменяется гильбертово пространство состояний, это влечет за собой преобразование волновой функции, которое, вообще говоря, не является унитарным.

В качестве иллюстрации возможностей предлагаемого подхода рассмотрена гипотеза Сахарова об изменении сигнатуры метрики. Предлагаемый подход позволяет фиксировать сигнатуру метрики с помощью условий, накладываемых на $g_{00}$-компоненту метрики либо на функцию хода. Это также было сделано впервые, поскольку калибровочно-инвариантный подход исключат зависимость от подобных условий. Далее была рассмотрена гипотеза о рождении Вселенной как о переходе из области физического континуума с чисто пространственной "евклидовой" сигнатурой (+, +, +, +) в область с "лоренцевой" сигнатурой (–, +, +, +). Для каждой из этих двух областей записано уравнение Шредингера и показано, что оно имеет две особые точки, одна из которых соответствует начальной сингулярности, а вторая – границе, на которой происходит смена сигнатуры.

Предложена интерпретация полученных результатов, которая, с одной стороны, согласуется с основными положениями копенгагенской интерпретации квантовой теории, с другой стороны, полученные результаты можно рассматривать как математическую реализацию концепции "относительных состояний" Эверетта, а именно, можно сказать, что физическая волновая функция описывает относительное состояние физической подсистемы (Вселенной или ее части) при условии, что система отсчета фиксирована с помощью заданных калибровочных условий, и это не находится в противоречии с копенгагенской интерпретацией.

**Теоретическое и практическое значение.** Теоретическое значение работы заключается в том, что в ней, во-первых, предлагается новая формулировка гамильтоновой динамики для систем со связями, полностью эквивалентная лагранжевой динамике, вытекающей из эффективного действия, включая соответствие между группами преобразований в лагранжевом и гамильтоновом формализме; во вторых, предлагается процедура вывода уравнения Шредингера из континуального интеграла, обобщенная для систем со связями (калибровочных полей), причем оператор Гамильтона в уравнении Шредингера согласуется с функцией Гамильтона в расширенном фазовом пространстве (выполняется квантово-теоретический принцип соответствия); в третьих, предлагается интерпретация полученных результатов, в том числе общего решения уравнения Шредингера, опираясь на основные принципы копенгагенской интерпретации квантовой теории и концепцию "относительных состояний" Эверетта, причем показано, что между принципами копенгагенской интерпретации и концепцией Эверетта нет противоречия. Таким образом, предлагаемый подход к квантованию гравитации является согласованным и содержит новый взгляд на то, какой должна быть будущая квантовая теория гравитации. Практическое значение работы заключается в том, что предлагаемый подход в принципе применим к любой космологической модели или гравитирующей системе (какой является, например, черная дыра), а также к полной теории гравитации, хотя это может быть сопряжено с определенными техническими трудностями. Полученные в рамках данного подхода результаты могут быть, в принципе, по мере увеличения точности наблюдений, сопоставлены с результатами астрофизических наблюдений, что может помочь, с одной стороны, в выявлении того, какой подход к квантованию гравитации является верным, а с другой стороны, – в интерпретации результатов наблюдений.

**Научные положения, выносимые на защиту.**

1. Разработана новая формулировка гамильтоновой динамики для систем со связями в расширенном фазовом пространстве, основанная на введении в эффективный лагранжиан Баталина - Вилковыского недостающих скоростей с помощью калибровочных условий в дифференциальной форме. Благодаря этому гамильтониан строится по тому же правилу $H = p\dot{q} - L$, что и для систем без связей. Это отличает новую формулировку от подхода Дирака и подхода Баталина – Фрадкина – Вилковыского. Система гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве включает уравнения связи, калибровочные условия и уравнения для духов и полностью эквивалентна расширенной лагранжевой системе уравнений, получаемой из эффективного действия Баталина – Вилковыского. При этом, несмотря на то, что описание динамики системы оказывается максимально приближенным к описанию

системы без связей, связи сохраняются; они только модифицируются за счет того, что вместо действия исходной калибровочной теории рассматривается эффективное действие.

2. Показано, что преобразования в расширенном фазовом пространстве, затрагивающие калибровочные степени свободы, являются каноническими. Такие преобразования соответствуют переходу от старых калибровочных переменных к новым в лагранжевом формализме. Физические и нефизические (калибровочные, духовые) степени свободы имеют одинаковый статус в расширенном фазовом пространстве.

3. Получено выражение для генератора БРСТ-преобразований в расширенном фазовом пространстве в соответствии с теоремой Нетер. Показано, что в случае гравитации оно не совпадает с тем выражением, которое получается в подходе Баталина – Фрадкина – Вилковыского, основываясь на алгебре связей. Генератор БРСТ-преобразований, построенный в соответствии с теоремой Нетер, дает преобразования для всех гравитационных переменных, включая калибровочные степени свободы, которые совпадают с калибровочными преобразованиями общей теории относительности, в то время как преобразования, генерируемые в подходе Баталина – Фрадкина – Вилковыского, не полностью совпадают с калибровочными. Это означает, что группа преобразований, генерируемых гравитационными связями, отличается от группы калибровочных преобразований общей теории относительности в лагранжевом формализме. Данный результат еще раз подтверждает эквивалентность новой формулировки гамильтоновой динамики в расширенном фазовом пространстве и лагранжевой динамики, вытекающей из эффективного действия; группы преобразований в лагранжевом и гамильтоновом формализме оказываются полностью согласованными.

4. Получено уравнение Шредингера для волновой функции Вселенной из континуального интеграла с эффективным действием Баталина – Вилковыского, путем обобщения стандартной процедуры,

предложенной Фейнманом. Континуальный интеграл рассматривается без асимптотических граничных условий. Эффективное действие аппроксимируется с помощью расширенной лагранжевой системы уравнений, получаемой из эффективного действия вариационной процедурой и включающей, помимо динамических уравнений, уравнения связи, калибровочные условия и уравнения для духовых полей. Обобщенная процедура вывода уравнения Шредингера применима как к модели с конечным числом степеней свободы, так и к полевой модели.

5. Уравнение Уилера – Де Витта может быть получено как частный случай уравнения Шредингера, соответствующий выбору параметризации Арновитта – Дезера – Мизнера для гравитационных переменных, специальному выбору калибровочных условий для этих переменных и условию независимости от времени волновой функции Вселенной. При таком подходе уравнение Уилера – Де Витта не может считаться калибровочно-инвариантным: его решение неявно зависит от выбора калибровочных условий (системы отсчета).

6. В структуре общего решения уравнения Шредингера можно выделить физическую часть волновой функции, зависящую только от физических степеней свободы. Именно эта часть волновой функции несет информацию об объекте исследования – гравитирующей системе, будь то Вселенная в целом или ее подсистема. Она удовлетворяет физическому уравнению Шредингера, причем форма последнего определяется выбранными калибровочными условиями.

7. На примере изотропной модели показано, что введение калибровочного условия в эффективный лагранжиан математически эквивалентно включению в модель среды с заданным уравнением состояния, описываемой феноменологически. Высказана гипотеза о том, что эта среда представляет собой гравитационный вакуум, который проявляет себя как фактор космологической эволюции. Продемонстрировано, что выбор калибровочного условия определяет космологический сценарий.

8. В ситуации, когда в разных областях Вселенной вводятся различные калибровочные условия, что может быть обусловлено сложной топологической структурой пространства-времени и невозможностью ввести одну систему отсчета во всем пространстве-времени, эволюция в пределах одной области описывается оператором эволюции, в который входит физический гамильтониан; на границах областей волновая функция подвергается, вообще говоря, неунитарному преобразованию, что связано с изменением гильбертова пространства состояний.

9. В рамках предлагаемого подхода предложена математическая реализация гипотезы Сахарова об изменении сигнатуры метрики. Различная сигнатура метрики в разных областях физического континуума фиксируется с помощью условий, расширяющих класс калибровочных условий в комплекснозначную область. Рассмотрена гипотеза о рождении Вселенной в результате изменения сигнатуры метрики на примере изотропной модели. Показано, что уравнение Шредингера в этом случае имеет две особые точки, одна из которых соответствует начальной сингулярности, а вторая – границе, на которой происходит смена сигнатуры.

10. Предложена интерпретация подхода, основанного на формализме расширенного фазового пространства, в соответствии с которой физическая волновая функция описывает относительное состояние физической подсистемы при условии, что система отсчета фиксирована с помощью заданных калибровочных условий. Этот подход можно рассматривать как математическую реализацию концепции "относительных состояний" Эверетта. С другой стороны, полученные результаты также находятся в соответствии с двумя основными принципами копенгагенской интерпретации: принципом целостности, поскольку мы рассматриваем целостную систему, включающую физическую Вселенную и наблюдателя, изучающего эту Вселенную, и принципом дополнительности, поскольку наблюдатели в различных системах отсчета

видят разные физические явления, которые являются дополнительными друг для друга.

**<u>Достоверность</u>** полученных результатов основывается, с одной стороны, на использовании математического аппарата общей теории относительности и теоретических методов квантовой теории поля, хорошо себя зарекомендовавшим при применении к негравитационным полям, а с другой стороны, на тщательном анализе того, могут ли эти методы быть применимы к гравитации и, если могут, не нуждаются ли в какой-либо модификации при учете особенностей гравитационного поля, его отличий от других физических полей.

**<u>Публикации</u>.** За период времени после защиты кандидатской диссертации автором опубликовано 28 статей, из которых 17 статей учитываются в международных базах цитирования, 4 статьи – в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, остальные – в сборниках трудов международных конференций и других изданиях. Результаты диссертационного исследования использованы при подготовке двух учебных монографий автора **[C1,C2]**.

**<u>Личный вклад автора</u>.** Из 28 опубликованных статей 24 написаны автором без соавторов. В этих работах автору принадлежит постановка задач, получение результатов и их обсуждение. Две обзорные работы **[B18, B19]** написаны в соавторстве с Клаудио Симеоне (C. Simeone, Аргентина). В этих работах разработка плана обзора и часть, посвященная предлагаемому в диссертации подходу к квантованию гравитации, принадлежит автору. Еще две статьи **[B16, B17]** написаны в соавторстве со студентами физического факультета Южного Федерального университета. В них автору принадлежит постановка задач, проверка вычислений и обсуждение полученных результатов.

**<u>Апробация работы</u>.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: V международной конференции по гравитации и астрофизике стран азиатскотихоокеанского региона (Москва, 2001); международных конференциях "Физические интерпретации теории относительности" (Бауманский Университет, Москва, 2003, 2005, 2007, 2009, 2023); VI международной конференции по космомикрофизике "COSMION-2004" (Москва - С.-Петербург - Париж, 2004); международной конференции по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодинамике, посвященной 90-летию проф. К. П. Станюковича (Москва, 2006); XIII Российской гравитационной конференции (Москва, 2008); III Stueckelberg Workshop on Relativistic Field Theories (Пескара, Италия, 2008); XII Marcel Grossman Meeting (Париж, Франция, 2009); международной конференции "Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики" (Москва, 2010); International Conference on Quantum Gravity "Loops 11" (Мадрид, Испания, 2011); XIII Marcel Grossman Meeting (Стокгольм, Швеция, 2012); International Symposium "Frontiers of Fundamental Physics" (Марсель, Франция, 2014); международных конференциях "Quantum Field Theory and Gravity" (Томск, 2014, 2018); 3-й, 4-й, 5-й и 6-й международных конференциях по физике частиц и астрофизике (Москва, 2017, 2018. 2020, 2022); международной научной конференции "Бесконечномерный анализ и математическая физика" (МГУ, Москва, 2019); 10th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology and 4th Symposium on the Casimir Effect (С.-Петербург, 2019); 22nd International Conference on General Relativity and Gravitation and 13th Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Waves (Валенсия, Испания, 2019); 17-й Российской гравитационной конференции (С.-Петербург, 2020); The Satellite Workshop "Developing A. D. Sakharov Legacy in Cosmoparticle Physics" of the 1st Electronic Conference on Universe (online, 2021); семинарах Института теоретической физики Кельнского Университета (Германия, 2015); семинаре женевского центра проекта "Space and Time after Quantum Gravity" (Женевский Университет, Швейцария, 2016); научном семинаре

"Бесконечномерный анализ и математическая физика" механико-математического факультета МГУ (Москва, 2018); семинаре Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ (Дубна, 2023).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения, списка литературы (237 наименований) и списка работ автора диссертации. Общий объем диссертации составляет 228 страниц.

**Первая глава** "*Существующие подходы к квантованию гравитации*" содержит обзор идей и методов, положенных в основу различных подходов к квантованию гравитации. Она начинается с замечания, что, по мнению автора, существуют по крайней мере два обстоятельства, указывающие на то, что теория гравитации и квантовая теория могут и должны быть объединены (раздел 1.1).

Первой попыткой квантования гравитации была квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта, в основе которой лежит метод Дирака. Поэтому раздел 1.2 посвящен обобщенной гамильтоновой динамике Дирака и подходу Уилера – Де Витта. В разделе 1.2.1 обсуждаются основные положения гамильтоновой динамики Дирака, в разделе 1.2.2 – ее приложение к гравитационному полю, в разделе 1.2.3 – роль связей (в том числе, гравитационных) как генераторов калибровочных преобразований. В разделе 1.2.4 кратко описывается квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта. В разделе 1.2.5 обсуждаются проблемы квантовой геометродинамики (проблемы времени, проблемы гильбертова пространства, проблемы наблюдаемых). В разделе 1.2.6 ставится вопрос о физическом смысле волновой функции Вселенной.

В подходе Уилера – Де Витта использовалось каноническое (операторное) квантование. В разделе 1.3 рассматриваются подходы, основанные на фейнмановском интегрировании по траекториям. Раздел начинается с обсуждения подхода Хартла – Хокинга [7], которые предложили определить волновую функцию Вселенной через континуальный интеграл по всем положительно-определённым четырёхмерным метрикам с "евклидовой" сигнатурой (<u>раздел 1.3.1</u>).

В <u>разделе 1.3.2</u> обсуждается метод Фаддеева – Попова [9], роль асимптотических граничных условий в обеспечении калибровочной инвариантности теории и проблемы, связанные с отсутствием асимптотических состояний у большинства гравитирующих систем, в связи с чем наложение асимптотических граничных условий не представляется оправданным в случае гравитации. В <u>разделе 1.3.3</u> рассматривается метод Баталина – Фрадкина – Вилковыского (БФВ) [10-12], в котором, так же, как и в методе Фаддеева – Попова, существенная роль принадлежит асимптотическим граничным условиям.

<u>Раздел 1.4</u> посвящен каноническим преобразованиям в фазовом пространстве. Необходимость включения такого раздела обусловлена продолжением обсуждения роли калибровочных переменных в теории гравитации. В <u>разделе 1.4.1</u> рассматриваются преобразования, затрагивающие калибровочные степени свободы. К преобразованиям такого вида принадлежит преобразование от компонент метрического тензора к переменным АДМ. В <u>разделе 1.4.2</u> рассматривается проблема построения генератора калибровочных преобразований и ставится вопрос, возможно ли построить гамильтонову динамику калибровочной теории так, чтобы она был максимально подобной гамильтоновой динамике теории без связей?

<u>Раздел 1.5</u> представляет собой обзор идей и проблем квантовой космологии. Он начинается с напоминания о дискуссии 1980-х годов между Хокингом, Виленкиным, Линде и другими космологами о начале Вселенной, дискуссии, которая на новом уровне продолжилась в 1990-х (<u>раздел 1.5.1</u>). В <u>разделе 1.5.2</u> обсуждаются представления о рождении Вселенной: гипотеза А. Д. Сахарова о рождении Вселенной в результате квантового перехода с изменением сигнатуры метрики, а также подход, известный как третичное квантование.

В разделе 1.5.3 обсуждается изменение отношения космологов к проблеме времени. Если после формулировки квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта она рассматривалась как существенный недостаток теории, позднее многие космологи приняли иную точку зрения, которая состоит в том, что отсутствие времени – это естественная особенность квантовой гравитации.

В разделе 1.5.4 обсуждается вопрос, способна ли современная квантовая космология делать предсказания, которые можно было бы сравнить с данными наблюдений. В заключение обзора, в разделе 1.5.5 кратко рассматриваются основные идеи достаточно распространенного сейчас подхода, известного как петлевая квантовая гравитация.

Несмотря на наличие множества подходов к квантованию гравитации, основные проблемы остаются нерешенными. В последующих главах представлен другой подход, основанный на формализме расширенного фазового пространства.

Во **второй главе** "*Гамильтонова динамика в расширенном фазовом пространстве*" излагается способ построения гамильтоновой динамики системы со связями, альтернативный методу, предложенному Дираком.

Раздел 2.1 посвящен построению гамильтониана и получению гамильтоновой системы уравнений в расширенном фазовом пространстве. В разделе 2.1.1 обосновываются преимущества выбора дифференциальной формы калибровочных условий. Сформулированы положения, опираясь на которые будет строиться гамильтонова динамика.

Вначале рассматривается модель с конечным числом степеней свободы. Для этой модели определяется класс используемых калибровочных условий, записывается эффективное действие, гамильтониан в расширенном фазовом пространстве. После чего определяется класс используемых калибровочных условий и записывается эффективное действие для полной гравитационной теории.

В разделе 2.1.2 представлена расширенная система лагранжевых уравнений для модели с конечным числом степеней свободы. Она включает в себя 1) уравнения для физических степеней свободы; 2) уравнение связи; 3) уравнения для духов; 4) калибровочное условие. После этого выписана система гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве. Калибровочное условие и уравнение связи получают статус гамильтоновых уравнений. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что гамильтонова система уравнений эквивалентна расширенной лагранжевой системе уравнений.

В разделе 2.2 продолжается обсуждение канонических преобразований, которое было начато в разделе 1.4.1, и ставится вопрос, возможно ли так сформулировать гамильтонову динамику, чтобы преобразования, затрагивающие калибровочные степени свободы, имели бы статус канонических преобразований в расширенном фазовом пространстве? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, в разделе 2.2.1 рассматриваются канонические преобразования для механической системы без связей, в разделе 2.2.2 рассматриваются канонические преобразования для модели с конечным числом степеней свободы. В последнем случае в результате перехода к новой калибровочной переменной изменяется фиксирующий калибровку член в эффективном действии. Это приводит к изменению импульсов, сопряженных физическим степеням свободы. Показано, что преобразования, затрагивающие калибровочные переменные, являются каноническими в предлагаемой формулировке гамильтоновой динамики в расширенном фазовом пространстве. В разделе 2.2.3 делается обобщение предыдущих результатов на случай полной гравитационной теории и показывается, что преобразования, затрагивающие калибровочные степени свободы, являются каноническими в расширенном фазовом пространстве.

В разделе 2.3 решается проблема построения генератора калибровочных преобразований в расширенном фазовом пространстве, которая обсуждалась в разделе 1.4.2. Таким генератором является БРСТ-заряд, построенный по теореме Нетер. В разделе 2.3.1 приводятся основные сведения о БРСТ-преобразованиях в теориях Янга – Миллса и гравитации. В разделе 2.3.2 обращается внимание на то, что, кроме метода построения БРСТ-заряда, предложенного Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским и основанном на алгебре связей, существует другой способ, использующий глобальную БРСТ-симметрию и теорему Нетер. Для полей Янга – Миллса использование теоремы Нетер приводит к выражению, которое в точности совпадает с тем, которое получается в соответствии с методом БФВ при условии замены духов БФВ духами Фаддеева – Попова.

Теория гравитации обсуждается в разделе 2.3.3. В случае гравитации мы имеем дело не с внутренней симметрией, как в теории Янга – Миллса, а с пространственно-временной симметрией. Это приводит к изменению выражения для БРСТ-заряда в соответствии с теоремой Нетер. Этот БРСТ-заряд не совпадает с генератором, полученным по методу БФВ, но дает правильные (т. е. совпадающие с калибровочными) преобразования для калибровочных переменных. Приводится явное выражение для БРСТ-генератора для модели с конечным числом степеней свободы, а также для более сложной сферически-симметричной гравитационной модели. Обсуждается построение БРСТ-генератора для полной теории гравитации и высказывается предположение, что в этом случае, так же как и в описанных выше, структура БРСТ-заряда, построенного в соответствии с теоремой Нетер, будет отличаться от структуры генератора, полученного по алгоритму БФВ.

В разделе 2.3.4 рассматривается вопрос о требовании БРСТ-инвариантности физических состояний. Метод БФВ опирается на формализм континуального интегрирования, однако можно сформулировать правила канонического квантования в расширенном фазовом пространстве. При этом необходимо определить правила отбора для физических состояний. Общепринятый ответ состоит в том, что физические состояния должны удовлетворять требованию БРСТ-инвариантности $\Omega_{BFV}\Psi = 0$, где $\Omega_{BFV}$ – БРСТ-генератор, построенный по алгоритму БФВ. Если набор некоммутирующих связей может быть преобразован к эквивалентному набору коммутирующих связей, это условие эквивалентно уравнению Уилера – Де Витта.

Таким образом, имеются два генератора – один, построенный в соответствии с алгоритмом БФВ, и другой, построенный по теореме Нетер, которые не совпадают друг с другом. Существование этих двух генераторов объясняется тем, что они отвечают БРСТ-преобразованиям в лагранжевом и гамильтоновом (дираковском) формализмах, а те, в свою очередь, соответствуют калибровочным преобразованиям и преобразованиям, генерируемым связями, которые в случае гравитации не совпадают и представляют собой две разные группы преобразований. Наложение условия $\Omega_{NT}\Psi = 0$, где $\Omega_{NT}$ – БРСТ-заряд, построенный по теореме Нетер, не приведет к уравнению Уилера – Де Витта.

Особенностям предлагаемого подхода к квантованию гравитации посвящена **третья глава** "*Квантование гравитации, основанное на формализме расширенного фазового пространства*". Раздел 3.1 посвящен сопоставлению уравнения Шредингера и уравнения Уилера – Де Витта. В разделе 3.1.1 приводятся краткие исторические сведения о том, как было найдено уравнение Уилера – Де Витта, и дается критическая оценка этого уравнения. В разделе 3.1.2 уравнение Шредингера рассматривается в контексте квантовой теории поля. В нем подчеркивается, что уравнение Шредингера было и остается фундаментальным уравнением квантовой теории. В разделе 3.1.3 обосновывается выбор формы континуального интеграла с эффективным действием Фаддеева – Попова в лагранжевой форме без асимптотических граничных условий как исходного объекта для процедуры вывода уравнения Шредингера.

Раздел 3.2 посвящен собственно выводу уравнения Шредингера. В разделе 3.2.1 рассматривается вывод уравнения Шредингера для динамической системы без связей. В разделе 3.2.2 показывается, что мера в континуальном интеграле совпадает с мерой в определении скалярного произведения в координатном представлении. В разделе 3.2.3 обсуждается вывод уравнения Шредингера для системы со связями. Процедура вывода уравнения Шредингера может быть обобщена на случай бесконечномерных полевых систем.

В разделе 3.2.4 устанавливается структура общего решения уравнения Шредингера, получено уравнение Шредингера для физической части волновой функции.

В разделе 3.2.5 ставится вопрос о том, что представляет собой уравнение Уилера – Де Витта с точки зрения предлагаемого подхода к квантованию гравитации. Показано, что при выполнении определенных условий уравнение Уилера – Де Витта может быть получен из физического уравнения Шредингера как частный случай.

В разделе 3.3 рассматриваются следствия того формализма, который был изложен в предыдущем разделе. Эти следствия складываются в определенную физическую картину.

В разделе 3.3.1 обосновывается переход к стационарному уравнению Шредингера для физической части волновой функции.

В разделе 3.3.2 напоминается интерпретация системы отсчета, которая была дана Ландау и Лифшицем, как некой среды, заполняющей все пространство. Высказывается гипотеза, что лучшим кандидатом на роль среды, выполняющей функцию системы отсчета, является гравитационный вакуум.

В разделе 3.3.3 показывается, что, выбирая разные калибровочные условия, можно описывать среды с различными уравнениями состояния. Это демонстрируется это на примере модели замкнутой изотропной Вселенной, заполненной разными видами материи, описываемой феноменологически.

В разделе 3.3.4 показывается, что среда, описываемая членом, фиксирующем калибровку, в эффективном действии (гравитационный вакуум), проявляет себя как фактор космологической эволюции. Найден спектр физического уравнения Шредингера для различных калибровочных условий.

Раздел 3.3.5 содержит набросок возможного космологического сценария.

В разделе 3.3.6 обсуждается зависимость физического уравнения Шредингера от калибровочного условия. Ставится вопрос, как изменится физическое уравнение Шредингера при малом изменении калибровочного условия.

В разделе 3.3.7 рассмотрена эволюция физической подсистемы в случае, когда в различных областях пространства-времени наложены разные калибровочные условия. Это мотивируется тем, что случай, когда пространственно-временное многообразие может быть покрыто только одной координатной системой, достаточно редкий. Если мы допускаем нетривиальную топологию, пространство-время может состоять из нескольких областей, в каждой из которых введена своя система координат. В разных областях нужно вводить различные калибровочные условия. Рассмотрения этого случая приводит к выводу, что на любой границе между областями, в которых наложены разные калибровочные условия, нарушается унитарная эволюция.

В разделе 3.3.8 рассматриваются различные виды калибровочных преобразований: остаточные калибровочные преобразования, преобразования, чьи параметры могут быть связаны гомотопией, (к этому типу следует отнести зависящие от времени калибровочные условия) и преобразования, параметры которых принадлежат к разным гомотопическим классам. Схематически представлена картина эволюции физической подсистемы, в которой унитарная эволюция прерывается в моменты времени, когда происходит изменение калибровочных условий.

В разделе 3.4 рассматривается гипотеза А. Д. Сахарова об изменении сигнатуры метрики с точки зрения подхода, основанного на формализме расширенного фазового пространства. В разделе 3.4.1 обсуждается предположение Сахарова о существовании областей с различной сигнатурой подразумевает введение различных координат в разных областях физического континуума. Сигнатура в различных областях физического континуума может быть зафиксирована специальными калибровочными условиями на компоненты метрического тензора.

Показано, что существование чисто пространственной области внутри пространства-временной может приводить к дополнительной квантовой неопределенности из-за разницы в состояниях на границах этой области. Изменение состояния внутри такой области можно рассматривать как результат действия некого неунитарного оператора.

В разделе 3.4.2 обсуждается гипотеза о рождении Вселенной в результате изменения сигнатуры метрики. В рамках подхода, предлагаемого в данной диссертации, можно явно использовать условия для компоненты $g_{00}$. Рассматриваются два случая: когда компонента $g_{00}$ терпит разрыв или непрерывна. В первом случае уравнение Шредингера имеет особую точку $a=0$, во втором – две особые точки: $a=0$ и $a=1$. Существенно, что обе особые точки являются также особыми точками решений классических уравнений Эйнштейна и, таким образом, представляют особенный физический интерес.

**Четвертая глава** посвящена интерпретации результатов, как это следует из ее названия, "*Интерпретация подхода к квантованию* *гравитации, основанному на формализме расширенного фазового пространства*". Ряд выводов, полученных в предыдущей главе, требуют своей оценки и интерпретации.

В этой главе приводятся аргументы, что для понимания результатов предлагаемого подхода к квантованию гравитации может быть использована копенгагенская интерпретация квантовой теории. Также аргументируется, что копенгагенская интерпретация не противоречит концепции "относительных состояний" Эверетта, и общее решение уравнения Шредингера может быть интерпретировано, опираясь на эту концепцию.

В разделе 4.1 обсуждается отношение космологов к копенгагенской интерпретации. В разделе 4.1.1 приводится несколько мнений и аргументация тех авторов, которые считают, что копенгагенская интерпретация неприменима к квантовой космологии. Это позволяет выявить те идеи, которые эти авторы считают основополагающими для копенгагенской интерпретации и которые, по их убеждению, не позволяют использовать эту интерпретацию, когда речь идет о Вселенной в целом. В разделе 4.1.2 обсуждается положение о редукции вектора состояния, а в разделе 4.1.3 – аргумент об отсутствии за пределами Вселенной наблюдателя, который, по определению, должен находиться за пределами объекта, подлежащего квантованию. Приводится обоснование, что основными идеями копенгагенской интерпретации следует считать принцип целостности и принцип дополнительности.

В разделе 4.2 высказывается мнение, что Эверетт выдвинул две независимых концепции – концепция "относительных состояний", рассматриваемая в разделе 4.2.1, и многомировая интерпретация, обсуждаемая в разделе 4.2.2. Кратко описывается "игрушечная" модель, которую использовал Эверетт для иллюстрации концепции "относительных состояний".

В <u>разделе 4.3</u> дается интерпретация общего решения уравнения Шредингера (18) с точки зрения концепции "относительных состояний" Эверетта.

В <u>разделе 4.4</u> полученные результаты сопоставляются с представлениями современной квантовой теории поля. В <u>разделе 4.4.1</u> проводится аналогия между выбором калибровочных условий, которые, в определенном смысле, определяют структуру пространства-времени в ранней Вселенной, и экспериментом "с отложенным выбором" Уилера.

В <u>разделе 4.4.2</u> приводятся аргументы, основанные на принципе эквивалентности, в пользу того, что волновая функция, описывающая систему гравитационного поля и полей материи, не может быть инвариантной относительно выбора системы отсчета.

В <u>разделе 4.4.3</u> обсуждается проблема унитарности в квантовой гравитации. Нарушение унитарности в предлагаемом подходе является следствием нарушения калибровочной инвариантности. Поднимается вопрос, является ли обязательным требование, что квантовая теория поля должна быть унитарной, несмотря на повсеместное присутствие в нашем мире необратимых процессов.

В <u>**заключении**</u> сформулированы основные результаты диссертации.

Поскольку некоторые идеи, которые легли в основу выдвигаемого в диссертации подхода, были высказаны автором еще в кандидатской диссертации, список <u>**работ автора по теме исследований**</u> включает работы, опубликованные до защиты кандидатской диссертации **[A1-A6]**, работы, опубликованные после защиты кандидатской диссертации **[B1-B28]** и учебно-методические монографии автора, в которых в большей или в меньшей степени затрагиваются вопросы, поднятые в настоящей диссертации **[C1,C2]**.

# ГЛАВА 1.
# СУЩЕСТВУЮЩИЕ ПОДХОДЫ К КВАНТОВАНИЮ ГРАВИТАЦИИ

## *1.1. О возможности объединения теории гравитации и квантовой теории.*

Проблема объединения общей теории относительности с принципами квантовой теории возникла сразу после создания этих теорий. Поскольку по прошествии почти ста лет решения этой проблемы так и не найдено, некоторые исследователи полагают, что, возможно, решения этой проблемы и вовсе не существует: общая теория относительности и квантовая теория слишком разные по своей структуре теории и не допускают объединения.

Существуют, на мой взгляд, по крайней мере два обстоятельства, которые свидетельствуют в пользу того, что объединение возможно. Первое – это дискуссия Бора и Эйнштейна на Шестом Сольвеевском конгрессе (1930), в ходе которой Эйнштейн попытался опровергнуть соотношение неопределенностей для энергии и времени. Довольно удивительно, но Бор смог разрешить парадокс, предложенный Эйнштейном, лишь обратившись к следствиям общей теории относительности [18], теории, которая, казалось бы, имеет совершенно другую область применимости, чем квантовая теория.

Другим указанием на возможность объединения является предсказание Хокингом квантового излучения черных дыр [19]. Несмотря на то, что излучение Хокинга до сих пор не имеет экспериментального подтверждения, сделанные приближения и теоретические расчеты не вызывают сомнений и позволяют рассматривать черные дыры как физические объекты, подчиняющиеся второму началу термодинамики.

Здесь, в отличие от первого случая, квантовая теория позволяет разрешить парадокс, возникший в рамках общей теории относительности.

Можно возразить, что в обоих этих случаях речь идет о классическом гравитационном поле. И, тем не менее, эти случаи указывают на то, что две теории не являются совершенно независимыми друг от друга теориями, чьи области применимости не пересекаются. Это означает, что квантовые принципы могут, и должны быть применимы к гравитационному полю, какой бы трудной задачей это ни казалось.

### *1.2. Обобщенная гамильтова динамика Дирака и квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта*

В 1930-е годы были предприняты первые попытки применить квантовую теорию к гравитационному полю. Это работы Розенфельда [20, 21], особо следует отметить работу нашего соотечественника М. П. Бронштейна [22], к обсуждению которой мы обратимся позднее. К 1950-м годам относятся работы П. Г. Бергмана [23, 24 и др.], который столкнулся с "проблемой связей", состоящей в том, что не все полевые переменные имеют сопряженные импульсы, не все полевые уравнения включают вторые производные по времени, т. е. они являются связями и т. д.

В то же время в игру включился Дирак, предложивший свою формулировку обобщенной гамильтоновой динамики [1,2]. На Дирака, как можно понять из его воспоминаний [25], произвело большое впечатление использование гамильтонова формализма при формулировке квантовой механики. Он писал [4, стр. 239 русского перевода]:

> "Любая динамическая система первым делом должна быть приведена к гамильтоновой форме прежде, чем ее можно было бы проквантовать."

В "Лекциях по квантовой механике" [3, стр. 386–387 русского перевода] он подчеркивал:

"…если нам удастся придать классической теории гамильтонову форму, то мы всегда сможем, применив некоторые стандартные правила, получить первое приближение квантовой теории."

И далее [3, стр. 386]:

"В самом деле, без использования гамильтоновых методов нельзя решить некоторые из простейших задач квантовой теории, например получить формулу Бальмера для водорода, самый первый из результатов квантовой механики."

Исторически, однако, очень успешные и экспериментально подтвержденные калибровочные теории, такие, как квантовая электродинамике, основывались не на разработанной Дираком обобщенной гамильтоновой динамике, а на других теоретических методах. Когда мы говорим об электродинамике или теории гравитации, в качестве отправной точки подразумеваем их лагранжеву формулировку. Фактически, обобщенная гамильтонова динамика и ее следствия играют существенную роль только в ряде подходов к построению квантовой гравитации, прежде всего в квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта. Поэтому для нас представляет особый интерес анализ метода Дирака.

**1.2.1. Обобщенная гамильтонова динамика Дирака.** Как известно, в случае теории со связями нельзя построить функцию Гамильтона по обычному правилу

$$H = p_a \dot{q}^a + \pi_\alpha \dot{\lambda}^\alpha - L, \tag{1.1}$$

поскольку часть обобщенных скоростей, $\dot{\lambda}^\alpha$, не могут быть выражены через сопряженные импульсы, $\pi_\alpha$. Функция Лагранжа не включает обобщенные скорости $\dot{\lambda}^\alpha$, что ведет к первичным связям (по терминологии Дирака):

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^\alpha} = 0. \tag{1.2}$$

Также для переменных $\lambda^{\alpha}$, $\pi_{\alpha}$ не существует гамильтоновых уравнений. Таким образом, возникает естественное разделение исходных переменных теории на две группы: так называемые физические степени свободы $q^{a}$ и их сопряженные моменты $p_{a}$, которые удовлетворяют уравнениям Гамильтона, и нефизические, или калибровочные, степени свободы $\lambda^{\alpha}$ и их сопряженные моменты $\pi_{\alpha}$. Возникает вопрос, являются ли каноническими все эти переменные, ведь для калибровочных переменных не существует уравнений движения.

Внимательное изучение работ Дирака не дает ясного ответа на этот вопрос. Первоначально Дирак включил все переменные в фазовое пространство и, соответственно, в определение скобок Пуассона. Если бы он этого не сделал, было бы невозможно получить вторичные связи из условия сохранения первичных:

$$\dot{\pi}_{\alpha} = \{\pi_{\alpha}, H\} = 0. \tag{1.3}$$

Однако позднее Дирак предложил устранить из теории переменные, не имеющие физического смысла, и продемонстрировал это на примере электромагнитного поля [3]. Сначала все компоненты 4-потенциала $A_{\mu}$ и их сопряженные импульсы $p^{\mu} = E^{\mu}$ ($B^{\mu}$ в обозначениях Дирака) были включены в фазовое пространство. Первичная и вторичная связи имеют вид: $E^{0} \approx 0$ и $\partial_{i} E^{i} \approx 0$.

В соответствии с идеей Дирака, к исходному гамильтониану теории, который может быть построен по формуле (1.1), добавляется линейная комбинация связей, первичных и вторичных. Мы можем рассматривать эту идею как первый постулат Дирака, поскольку, вообще говоря, не существует строгого обоснования, почему следует поступать именно так. Дирак пишет, что мы можем добавить к гамильтониану линейную комбинацию связей, равную нулю. В случае электродинамики это дает:

$$H=\int d^3x\left(\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}-\frac{1}{2}E_iE^i-A_0\partial_iE^i+\lambda_0E^0+\lambda_1\partial_iE^i\right). \qquad (1.4)$$

На этом этапе Дирак предлагает устранить переменные $A_0$ и $E^0$ как не имеющие физического смысла. Из (1.4) видно, что третье и последнее слагаемые могут быть объединены, $(\lambda_1-A_0)\partial_iE^i$, причем $\lambda_1$ ($u_x$ в обозначениях Дирака) – это произвольный коэффициент, лагранжев множитель при вторичной связи. Его можно переопределить таким образом, чтобы он "поглотил" нефизическую степень свободы $A_0$. Либо наоборот, можно переопределить $A_0$, поскольку эта переменная не может быть определена из гамильтоновых уравнений и остается произвольной. Таким образом, $A_0$ скорее выполняет роль лагранжева множителя, а не канонической переменной. Сопряженный импульс $E^0$ равен нулю в силу уравнения связи и поэтому также не несет физического смысла.

Итак, Дирак предложил формализм с меньшим числом степеней свободы, чем в первоначальной теории. Соответственно, только физические степени свободы рассматриваются как канонические, и скобки Пуассона должны быть переопределены так, чтобы в их определении учитывались только физические степени свободы. Это вступает в противоречие с тем, что говорилось ранее о получении вторичных связей (см. (1.3)). Кроме того, остается вопрос, можно ли "просто так" исключить, отбросить нефизические степени свободы? Ведь выбрасывая их, мы получаем, по существу, уже другую физическую теорию. И если в случае электродинамики изгнание нефизических степеней свободы может быть оправдано тем, что физический смысл приписывается только поперечным составляющим электромагнитного поля, справедливо ли это в отношении других полей, в первую очередь, гравитационного?

**1.2.2. Обобщенная гамильтонова динамика Дирака в приложении к гравитационному полю.** В 1958 году Дирак применил свой подход к гравитационному полю [4]. Дирак получил гравитационный гамильтониан в виде линейной комбинации связей, однако, в отличие от электродинамики, в роли коэффициентов при связях выступали не определенные компоненты метрического тензора, а выражения, из них составленные (см. [4], формулу (28)). Ситуация изменилась после появления работы Арновитта – Дезера – Мизнера [5], в которой была предложена новая параметризация гравитационных переменных (параметризация АДМ):

$$g_{00} = -N^2 + N_i N^i; \quad g_{0i} = N_i; \quad g_{ij} = \gamma_{ij}\,. \tag{1.5}$$

В этих переменных гравитационный гамильтониан записывается в виде:

$$H = \int d^3x \left( p^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \left( N\mathcal{T} + N_i \mathcal{T}^i \right), \tag{1.6}$$

где $\gamma_{ij}$ – метрика 3-пространства, $p^{ij}$ – импульсы, сопряженные ее компонентам; $N$ и $N_i$ – так называемые функции хода и сдвига; $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^i$ – гравитационные связи,

$$\mathcal{T} = G_{ijkl}\, p^{ij} p^{kl} - \sqrt{\gamma}\,{}^{(3)}R; \tag{1.7}$$

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left( \gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl} \right); \tag{1.8}$$

$$\mathcal{T}^i = -2D_j p^{ij}; \tag{1.9}$$

$\gamma$ – определитель метрического тензора $\gamma_{ij}$; ${}^{(3)}R$ – скалярная кривизна 3-пространства с метрикой $\gamma_{ij}$; $D_i$ – ковариантные производные, построенные по метрике $\gamma_{ij}$; $G_{ijkl}$ – так называемая "суперметрика" Де Витта. Связь (1.7) носит название гамильтоновой связи, связи (1.9) – "импульсные" ("momentum constraints"). По своей структуре гамильтонова связь отличается как от импульсных связей гравитации, так и от связей других калибровочных теорий. Характерной особенностью гамильтоновой связи является квадратичная зависимость от импульсов.

Как мы видим, гравитационный гамильтониан (1.6) представляет собой линейную комбинацию связей, а функции хода и сдвига играют роль лагранжевых множителей, подобно компоненте $A_0$ в электродинамике.

Функции хода и сдвига имеют ясную геометрическую интерпретацию, которая обсуждалась многими авторами (см., например, [26]). Переход к гамильтоновой формулировке теории подразумевает разбиение пространства-времени на пространство и время (так называемое (3+1)-разбиение). В результате (3+1)-разбиения мы получаем семейство пространственноподобных гиперповерхностей, каждая из которых соответствует некоторому значению временного параметра $t$. Как указывают Мизнер, Торн и Уилер [26, стр. 147], если мы задаем геометрию на двух последовательных гиперповерхностях, это никак не определяет структуру пространства-времени между ними; необходимо связать эти две гиперповерхности, и именно для этого служат функции хода и сдвига, которые определяют метрику четырехмерного пространства-времени. Если мы не зададим функции хода и сдвига, пространство-время распадается на множество гиперповерхностей, никак между собой не связанных. Калибровочная инвариантность общей теории относительности заключается в том, что мы можем выбрать другое (3+1)-разбиение, задавая другие значения функций хода и сдвига, которые фиксируют систему отсчета в пространстве-времени. Функции хода и сдвига $N$, $N_i$ (или, эквивалентно, компоненты метрического тензора $g_{0\mu}$) представляют собой калибровочные степени свободы теории гравитации, но по своему геометрическому смыслу они определяют каркас пространства-времени или, пользуясь выражением из книги Мизнера, Торна и Уилера, "жесткость" его структуры.

Возникает вопрос, имеем ли мы право просто выкинуть из теории эти переменные так же, как компоненту $A_0$ из электродинамики? Не зачеркнет ли это достижения Эйнштейна и Минковского по объединению пространства и времени в единый континуум, и работы Пенроуза, Хокинга и других по исследованию его структуры? Ведь, исключая эти переменные, мы скорее получим теорию пространства, но не пространства-времени. Строя квантовый вариант такой теории, можем ли мы быть уверены, что мы пытаемся проквантовать именно общую теорию относительности, а не какую-либо другую теорию гравитации?

**1.2.3. Связи как генераторы преобразований.** Как известно, Дирак рассматривал связи в качестве генераторов преобразований переменных теории. В случае электродинамики вторичная связь генерирует преобразования для компонент $A_i$, которые совпадают с калибровочными:

$$\delta A_i = \int \left\{ A_i(x), \partial_j p^j(x') \right\} \xi(x') d^3x' = \partial_i \xi(x). \tag{1.10}$$

В качестве генератора преобразований для компоненты $A_0$ может выступать только первичная связь $p^0$. Преобразование, которое она генерирует,

$$\delta A_0 = \int \left\{ A_0(x), p^0(x') \right\} \varepsilon(x') d^3x' = \varepsilon(x), \tag{1.11}$$

не совпадает с калибровочным, но можно добиться согласования, если положить $\varepsilon = \partial_0 \xi$. Дирак, разумеется, не обсуждал таких вещей, поскольку считал компоненту $A_0$ лишней.

Электродинамику нельзя рассматривать как образец калибровочной теории, поскольку структура ее калибровочной группы – абелевой однопараметрической группы $U(1)$ – слишком проста. Несравнимо сложнее калибровочная группа теории гравитации – группа диффеоморфизмов.

Еще в работе Де Витта [6] было показано, что связи (1.9) являются генераторами трехмерных диффеоморфизмов. Однако получить преобразования четырехмерной группы диффеоморфизмов, используя гравитационные связи, не удается, в том числе, не удается получить правильные (т. е. совпадающие с калибровочными) преобразования для калибровочных переменных $g_{0\mu}$ (либо для функций хода и сдвиги при переходе к параметризации АДМ).

Ряд авторов предлагали свои алгоритмы построения генератора преобразований путем модификации метода Дирака [27-29]. При этом получались корректные преобразования для всех переменных исходной теории, включая калибровочные, но только при определенном выборе параметризации этих переменных (теория гравитации, можно сказать, отличается от других теорий поля тем, что разные авторы используют в своих работах различные параметризации гравитационных переменных; кроме компонент метрического тензора и переменных АДМ, возможны и другие параметризации, см., например, [30]).

Это означает, во-первых, что предложенные алгоритмы не являются универсальными, и, во-вторых, что метод Дирака так или иначе нуждается в модификации, поскольку не позволяет получить правильные преобразования исходных переменных теории. Все зависит, конечно, от точки зрения исследователя. Если исследователь согласен с Дираком, что калибровочные переменные излишни, и их следует изгнать из теории, можно не заботиться о том, какие преобразования для них получаются. До сих пор большинство исследователей идут именно по этому пути.

После этих замечаний перейдем к обсуждению квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта – первой попытки построить квантовую теорию гравитации.

**1.2.4. Квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта.** Подход к квантованию гравитации, изложенный в статье Де Витта [6] и опирающийся на ряд идей, высказанных ранее Уилером [31], является, по-существу, прямым приложением метода Дирака к гравитационному полю с использованием переменных АДМ. В соответствии с идеей Дирака, при квантовании связи накладываются в качестве условий на вектор состояния (волновую функцию). Так же, как и в случае с добавлением линейной комбинации связей к гамильтониану, мы можем рассматривать эту идею как постулат. Несмотря на то, что этот постулат никогда не был подтвержден экспериментально, он не только занял центральное место в квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта, но и перешел в другие подходы, например, петлевую квантовую гравитацию [32]. В случае гравитации мы имеем первичные связи

$$\pi\Psi = 0; \tag{1.12}$$

$$\pi^i\Psi = 0, \tag{1.13}$$

$\pi$, $\pi^i$ – импульсы, сопряженные функциям хода и сдвига $N$ и $N_i$, и вторичные связи

$$\mathcal{T}\Psi = 0; \tag{1.14}$$

$$\mathcal{T}^i\Psi = 0, \tag{1.15}$$

волновой функционал $\Psi$ определен на так называемом суперпространстве – пространстве всех возможных геометрий трехмерного пространства и возможных распределений в нем полей материи, аналоге конфигурационного пространства. Уравнение (1.14) – ставшее знаменитым уравнение Уилера – Де Витта. Заменяя в (1.7), (1.9) импульсы операторами, мы получаем:

$$\left(-G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta}{\delta\gamma_{kl}} - \sqrt{\gamma}\,{}^{(3)}R\right)\Psi = 0; \tag{1.16}$$

$$2iD_j\frac{\delta\Psi}{\delta\gamma_{ij}} = 0. \tag{1.17}$$

В классической теории наличие связей является следствием калибровочной инвариантности теории, и нередко утверждается, что наложение связей в операторной форме на вектор состояния обеспечивает калибровочную инвариантность соответствующей квантовой теории. Однако это утверждение нуждается в математическом доказательстве. При замене импульсов операторами в (1.12), (1.13) мы получаем, что волновой функционал не зависит от функций хода и сдвига [6]:

$$-i\frac{\delta\Psi}{\delta N}=0; \quad -i\frac{\delta\Psi}{\delta N_i}=0. \tag{1.18}$$

Этого еще недостаточно для доказательства калибровочной инвариантности волнового функционала (его независимости от выбора системы отсчета). В книге Кифера [33] дано доказательство того, что волновой функционал, удовлетворяющий уравнению (1.17), инвариантен относительно инфинитезимальных трехмерных координатных преобразований при условии, что параметры инфинитезимальных преобразований исчезают на бесконечности. Идея доказательства принадлежит Хиггсу [34]. Из этого делается вывод [6], что волновой функционал зависит только от геометрии трехмерного пространства.

Из-за сложности группы диффеоморфизмов обобщение этого доказательства на случай конечных преобразований является нетривиальной задачей, не говоря уже о том, чтобы дать доказательство инвариантности относительно четырехмерных диффеоморфизмов.

При каноническом (операторном) квантовании, когда импульсы заменяются соответствующими операторами, порядок операторов в уравнениях (1.16), (1.17) принципиально неопределен, он ограничен только требованием эрмитовости. В работе [35] ставилась цель найти ковариантную операторную форму дираковских связей, в том числе гравитационных, используя геометрическую структуру суперпространства. Обратную метрику суперпространства можно определить как результат умножения суперметрики Де Витта (1.8) на функцию хода. Ковариантное упорядочение операторов в уравнении Уилера – Де Витта получается, как показано в [35], только в случае, когда $N=1$. Хотя полученное уравнение и кажется ковариантным, процедура его получения зависит от выбора значения функции хода. Если же выбрать другое значение $N$, мы бы получили другую форму квантовых гравитационных связей.

Это и другие факты заставляют усомниться в том, что квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта действительно инвариантная теория, не зависящая от выбора $N$ и $N_i$. Инвариантность подразумевает, что теория в целом, включая процедуру вывода ее уравнений, сами уравнения и, как следствие, волновой функционал, не зависят от выбора функций хода и сдвига (или других эквивалентных условий).

Еще Хокинг и Пейдж [36] указывали, что метрика суперпространства зависит от функции хода. В соответствии с общей практикой, часть гамильтоновой связи, квадратично зависящая от импульсов, заменяется обобщенным лапласианом, инвариантным относительно замены переменных в суперпространстве (которое является конфигурационным пространством для гравитации). Обобщенный лапласиан строится по метрике конфигурационного пространства. В случае суперпространства для получения окончательного вида оператора (а, следовательно, и уравнения Уилера – Де Витта) необходимо знать зависимость функции хода от компонент трехмерной метрики, $N = f\left(\gamma_{ij}\right)$. $N$ может быть функцией $\gamma_{ij}$, либо быть независимой от $\gamma_{ij}$ (как в случае $N = 1$). В каждом случае мы получаем определенную форму уравнения Уилера – Де Витта; иными словами, мы получаем целое семейство различных по форме уравнений Уилера – Де Витта, каждое из которых отвечает определенной зависимости $N$ от $\gamma_{ij}$. Осознав эту проблему, Хокинг и Пейдж предложили считать функцию хода независимой от $\gamma_{ij}$, т. е. сделать определенный выбор условия для $N$ ($N = 1$).

Условие $N = 1$ фигурирует во многих работах по квантовой геометродинамике в качестве упрощающего. Еще Де Витт [6] указывал на возможность выбора условий $N = 1$, $N_i = 0$. Поскольку он подразумевал, что теория калибровочно-инвариантна, то полагал, что конкретный выбор переменных $N$, $N_i$ несущественен. Выбор условий $N_i = 0$ упрощает вид гравитационного гамильтониана (1.6), который, как мы помним, является линейной комбинацией связей.

Однако мы знаем, что условия для $N$ и $N_i$ (или, эквивалентно, для компонент $g_{0\mu}$ метрического тензора) фиксируют систему отсчета [37]. Если же от выбора этих условий (или хотя бы одного из них) зависит вид основного уравнения теории, можно ли считать такую теорию калибровочно-инвариантной?

Как уже упоминалось, в теории гравитации используются разные параметризации гравитационных переменных. Например, вместо функций хода и сдвига можно использовать новые переменные $\tilde{N}_\mu$, связанные со старыми соотношениями

$$\tilde{N}_\mu = v_\mu \left( N, N_i \right), \tag{1.19}$$

где $v_\mu$ – некоторые функции $N$ и $N_i$, однако индекс $\mu$ лишь нумерует эти функции, $\tilde{N}_\mu$ не образует 4-вектор. К типу (1.19) относится преобразование (1.5). В классической теории связи эквивалентны независимо от того, какую параметризацию мы выбираем. При переходе к квантовой теории в силу операторного характера уравнений, при различном выборе калибровочных переменных мы получим разные по форме уравнения Уилера – Де Витта, которые не сводятся одно к другому. Как и в рассмотренном выше случае, когда $N$ по-разному зависит от $\gamma_{ij}$, мы получим целое семейство различных по форме уравнений Уилера – Де Витта, каждое из которых отвечает определенному выбору параметризации. Этот факт известен как *параметризационная неинвариантность* уравнения Уилера – Де Витта. После того, как выбор параметризации сделан, нужно еще наложить на новые калибровочные переменные дополнительные условия, определяющие, как они связаны с остальными (физическими) переменными. Только после этого порядок операторов в уравнении Уилера – Де Витта будет полностью зафиксирован.

Параметризационная неинвариантность уравнения Уилера – Де Витта обсуждалась в литературе, но при этом не обращалось внимания на тот факт, что выбор параметризации в совокупности с выбором условий на калибровочные переменные фиксируют систему отсчета. В конечном счете для того, чтобы зафиксировать систему отсчета, нужно наложить условия на $g_{0\mu}$-компоненты метрического тензора. Это можно проиллюстрировать следующей схемой:

| Выбор параметризации | + | Условия на калибровочные переменные | $\to$ | Калибровочные условия на $g_{0\mu}$ |
|---|---|---|---|---|
| $g_{0\mu} = v_\mu\left(\tilde{N}_\nu, \gamma_{ij}\right)$ | | $\tilde{N}_\nu = f_\nu\left(\gamma_{ij}\right)$ | | $g_{0\mu} = v_\mu\left(f_\nu\left(\gamma_{ij}\right), \gamma_{ij}\right)$ |

Так, выбор параметризации АДМ в совокупности с условиями $N = 1$, $N_i = 0$ фиксирует систему отсчета.

Мы получаем еще один аргумент в пользу того, что квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта в действительности не является калибровочно-инвариантной теорией. Возможно, более правильно ставить вопрос, можно ли построить квантовую теорию гравитации калибровочно-инвариантным образом? И должны ли мы требовать, чтобы квантовая теория гравитации была калибровочно-инвариантной, учитывая специфику калибровочной инвариантности в самой общей теории относительности, согласно которой наблюдатели в различных системах отсчета видят разные физические явления (достаточно вспомнить известных пример с наблюдателем, падающем в черную дыру, и наблюдателем, находящимся на бесконечности от черной дыры)? Можем ли мы ожидать, что в квантовой теории наблюдатели в различных системах отсчета будут свидетелями одних и тех же физических явлений?

**1.2.5. Проблемы квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта.** О проблемах теории Уилера – Де Витта написано достаточно много, поэтому ограничимся их перечислением. Наиболее известная проблема – это *проблема времени*, которая является следствием того, что гравитационный гамильтониан представляет собой линейную комбинацию связей (1.6). При переходе к квантовой теории это дает:

$$H\Psi = \int d^3x \left( N\mathcal{T}\Psi + N_i \mathcal{T}^i \Psi \right) = 0\,. \tag{1.20}$$

Тогда из временного уравнения Шредингера следует, что волновая функция не зависит от времени. Де Витт [6] прокомментировал этот парадоксальный результат следующим образом:

> "…мы будем интерпретировать этот факт как информирующий нас, что координатные метки $x^\mu$ в действительности не имеют отношения к делу. Физический смысл может быть приписан только внутренней динамике мира."[1]

Эта проблема вызвала резкую критику квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта и попытки ее разрешить. Проблеме были посвящены столь многочисленные статьи и обзоры, что здесь нет никакой возможности их перечислить. Отметим обзоры [38, 39], каждый из которых занимает более сотни страниц. Они отражают отношение к проблеме времени, которое сложилось к началу 1990-х годов. Как мы увидим, позднее это отношение изменилось, и вместо недостатка теории, проблемы, которую необходимо решить, в ней стали видеть особенность

---

[1] "…we shall interpret it as informing us that the coordinate labels $x^\mu$ are really irrelevant. Physical significance can be ascribed only to the intrinsic dynamics of the world." [6, p. 1120].

квантовой теории гравитации, пытаясь найти обоснование тезису, что в области, где правит квантовая гравитация, времени не существует.

Уравнение (1.20) означает, что спектр гамильтониана сужается до единственного – нулевого – собственного значения. Это ставит вопрос о том, а что представляет собой пространство физических состояний в квантовой гравитации? Находится ли Вселенная в единственном состоянии, описываемом волновым функционалом – решением уравнения Уилера – Де Витта, или таких состояний множество? Точка зрения Хокинга [7], Виленкина [9, 40–42] и других авторов состояла в том, что решение, соответствующее нашей Вселенной, выделяется из множества решений уравнения Уилера – Де Витта с помощью специальных граничных условий. Этим граничным условиям даже придавался статус дополнительного физического закона, постулата, поскольку они не могут быть выведены из других законов физики [43]. Однако, несмотря на прошедшие десятилетия, ответ на вопрос, какова структура гильбертова пространства в квантовой гравитации, и как должно быть определено скалярное произведение физических состояний, так и не получен. Между тем, не имея хорошо определенного скалярного произведения, невозможно вычислить средние значения физических величин. В обычной квантовой теории на скалярное произведение накладывается условие сохранения во времени, что обеспечивает нормировку вероятности на единицу. Что должно быть аналогом этого условия, если времени нет? Данная проблема может быть названа *проблемой гильбертова пространства*.

Еще одна проблема – это *проблема наблюдаемых*. В подходе Дирака наблюдаемыми считаются только те величины, скобки Пуассона которых со связями сводятся к линейной комбинации связей, т. е. равны нулю в слабом смысле. Такие величины являются сохраняющимися, неизменными во времени. Трудно привести пример наблюдаемых величин, удовлетворяющих этому критерию. Здесь опять электродинамика не может служить эталоном, поскольку в электродинамике наблюдаемыми являются калибровочно-инвариантные величины (напряженности), а в общей теории относительности, вообще говоря, наблюдаемые величины не калибровочно-инвариантны. Поэтому проблема наблюдаемых вызывает сомнения в применимости критерия Дирака к гравитации.

Как известно, использование гамильтонова формализма, который является неотъемлемой частью подхода Дирака, подразумевает, что пространство-время имеет топологию $R \times \Sigma$, где $\Sigma$ – некоторое трехмерное многообразие. Лагранжев формализм более гибок, он допускает нетривиальные топологии. По этой причине канонический (гамильтонов) формализм критиковался Хокингом, который писал [44, стр. 364 русского перевода]:

> "… Но расщепление на три пространственных измерения и одно время, по-видимому, противоречит самому духу теории относительности. Более того, оно ограничивает топологию пространства-времени произведением действительной прямой на некоторое трехмерное многообразие, в то время как надо ожидать, что квантовая гравитация будет допускать все возможные топологии пространства-времени, включая и те, которые не являются прямыми произведениями."

Действительно, если пространство-время обладает нетривиальной топологией, как предполагал Уилер [31], нельзя ввести во всем пространстве-времени систему пространственно-подобных гиперповерхностей, которые бы не имели пересечений и прочих особенностей, поэтому к такому пространству-времени подход, основанный на гамильтоновом формализме, неприменим.

Все эти проблемы вызывали у ряда исследователей критическое отношение к квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта. Примечательны слова Айшема, приведенные в заключении его обзора [39]:

"…следует отметить, что нет никакого действительного оправдания для распространения подхода Дирака на связи, которые являются *квадратичными* функциями импульсов. Следовательно, хотя может показаться еретическим предполагать это, уравнение Уилера – Де Витта, – как бы элегантно оно ни выглядело, – возможно, совершенно неправильный путь для того, чтобы сформулировать квантовую теорию гравитации."[2]

Отдельно остановимся на интерпретации волнового функционала (волновой функции) Вселенной.

**1.2.6. Физический смысл волновой функции Вселенной.** Волновая функция $\Psi$ представляет собой амплитуду вероятности того, что трехмерное пространство Вселенной имеет определенную геометрию и определенное распределение полей материи в этом пространстве. Поскольку в квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта волновая функция не зависит от времени, следует полагать, что эта амплитуда вероятности одинакова во все моменты существования Вселенной. С другой стороны, в ряде работ по квантовой геометродинамике (см., например, [43,8]) утверждается, что волновая функция описывает начальное состояние для последующей классической эволюции Вселенной. В некоторых космологических сценариях рассматривается спонтанное рождение изотропной вселенной из классически запрещенной области минисупепространства при некотором значении масштабного фактора. Создается впечатление, что волновая функция определяет амплитуду вероятности в момент рождения Вселенной.

Здесь мы сталкиваемся если не с противоречием, то, по крайней мере, с неопределенностью. Если волновая функция не зависит от времени и при этом предсказывает, что более вероятными являются малые

---

[2] "… it must be emphasized that there is no real justification for extending the Dirac approach to constraint generators that are quadratic functions of the momentum variables. Therefore, although it may be heretical to suggest it, the Wheeler-DeWitt equation — elegant though it be—may be completely the wrong way of formulating a quantum theory of gravity." [39, p. 270].

значения масштабного фактора, Вселенная, которая описывается этой волновой функцией, практически не имеет шансов стать макроскопической. Напротив, если волновая функция предсказывает, что более вероятными являются большие значения масштабного фактора, это означает лишь констатацию того факта, что наша Вселенная макроскопическая, но ничего не говорит нам о ранних стадиях ее существования, что является целью квантовой космологии. Поскольку геометрия трехмерного пространства меняется (значения масштабного фактора различны в разные моменты времени в нашей макроскопической Вселенной), можно было бы предполагать, что распределение вероятностей должно также меняться со временем, но это противоречит квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта. Многие авторы неявно предполагают, что волновая функция описывает раннюю Вселенную, но для того, чтобы найти эту волновую функцию, используют уравнение Уилера – Де Витта.

Также может быть поставлен следующий вопрос: мы хотели бы получить волновую функцию, которая бы предсказала, что Вселенная, какой мы наблюдаем ее сейчас, наиболее вероятна, так что квантовая космология в определенном смысле должна оправдать существование нашей Вселенной? Или же мы ищем некое "объективное" распределение вероятностей, которое бы помогло нам понять, насколько вероятна вселенная, подобная нашей? Вторая возможность едва ли может быть реализована, поскольку существует множество решений уравнения Уилера – Де Витта, и необходимы дополнительные аргументы, чтобы выделить единственное подходящее решение или класс таких решений. Как уже говорилось, это решение может быть выделено специальными граничными условиями, которые могут иметь статус фундаментального физического закона [43].

Наиболее известные граничные условия – это условие "об отсутствии границ" [7] и граничное условие для "туннелирующей" волновой функции [40]. Хотя эти условия имеют разное обоснование, авторы и тех, и других заявляли, что предложенные ими граничные условия предсказывают инфляционную стадию эволюции Вселенной. Получается, что истинная цель квантовой космологии – объяснить наличие инфляционной стадии, что, в свою очередь, помогает решить ряд проблем классической космологии. И, в этом случае, нас вряд ли интересует "глобальная" волновая функция, описывающая Вселенную в произвольный момент времени, скорее мы хотели бы получить волновую функцию, которая обеспечила бы желаемые условия в начале существования Вселенной.

В квантовой космологии мы имеем дело с уникальной ситуацией, когда объект изучения – ранняя Вселенная – удален от нас во времени. Мы пытаемся делать заключения о ранней Вселенной по макроскопическим следствиям происходящих в ней квантовых явлений (в основном из наблюдений космического микроволнового фонового излучения, CMB). Представляется, что при этом мы должны учитывать и наше положение во Вселенной как наблюдателей.

А теперь мы перейдем к рассмотрению подходов к квантованию гравитации, основанным на использовании интегралов по траекториям.

## *1.3. Подходы, основанные на интегрировании по траекториям*

**1.3.1. Подход Хартла – Хокинга.** 16 лет спустя после работы Де Витта [6] появилась работа Хартла и Хокинга [7], которая, во многом благодаря авторитету Хокинга, возбудила интерес к квантовой гравитации. Может показаться, что работа лежит в рамках подхода Уилера – Де Витта, однако некоторые исследователи, например Джон Барретт из Нотингемского университета, считают, что речь идет об отдельном подходе [45], поскольку речь идет не просто об определении волновой функции через континуальный интеграл, но через континуальный интеграл по всем положительно-определенным четырехмерным метрикам с "евклидовой" сигнатурой (+, +, +, +).

Отправной точкой в работе [7] является амплитуда вероятности перехода из состояния с пространственно-временной метрикой $g_1$ и полями материи $\phi_1$ на гиперповерхности $\mathcal{S}_1$ в состояние с пространственно-временной метрикой $g_2$ и полями материи $\phi_2$ на гиперповерхности $\mathcal{S}_2$,

$$\left\langle g_2, \phi_2, \mathcal{S}_2 \middle| g_1, \phi_1, \mathcal{S}_1 \right\rangle, \tag{1.21}$$

понимаемая как сумма по всем полевым конфигурациям $g$ и $\phi$. Сразу отметим разницу между каноническим квантованием Дирака – Уилера – Де Витта и методом континуального интегрирования. Напомним, что в первом случае учитывается только пространственная метрика, а калибровочные степени свободы (функции хода и сдвига или $g_{0\mu}$-компоненты метрического тензора) считаются "лишними", в то время как в континуальный интеграл вносят вклад все степени свободы. Это согласуется с приведенной выше цитатой Хокинга [44], в которой он отмечает, что расщепление на три пространственных измерения и время противоречит духу теории относительности. Таким образом, пространство-время сохраняет свое значение в подходе, основанном на интегралах по траекториям.

С другой стороны, волновая функция в теории Уилера – Де Витта зависит только от пространственных компонент метрики. Поэтому вместо (1.21) скорее следовало бы рассматривать амплитуду

$$\left\langle \gamma_2, \phi_2, \mathcal{S}_2 \middle| \gamma_1, \phi_1, \mathcal{S}_1 \right\rangle, \tag{1.22}$$

где $\gamma_1$ обозначает пространственную метрику на гиперповерхности $\mathcal{S}_1$ и т. д. Чтобы примирить свой подход с подходом Уилера – Де Витта, Хартл и Хокинг обсуждают, что подразумевается под фиксацией четырехмерной геометрии на данной пространственноподобной поверхности. Ответ, который был дан Хартлом и Хокингом, заключается в том, что вблизи гиперповерхности следует наложить калибровочные условия, так что все калибровочные степени свободы окажутся фиксированными, нефиксированными останутся только компоненты пространственной метрики. Неясно, однако, каким образом предполагается накладывать калибровочные условия в континуальном интеграле, поскольку континуальный интеграл берется от экспоненты, в показателе которой стоит классическое действие гравитационного и материальных полей, а классическое действие не включает член, фиксирующий калибровку, в отличие от эффективного действия, которое вводится в методах квантования калибровочных теорий Фаддеева – Попова или Баталина – Фрадкина – Вилковыского, о которых мы будем говорить далее. Также неясно, является ли амплитуда вероятности, определенная таким образом через континуальный интеграл, независимой от выбора калибровочных условий, хотя это молчаливо подразумевается. В принципе, возможна интерпретация этой амплитуды вероятности как амплитуды перехода в состояние с пространственной метрикой $\gamma_2$ и полями материи $\phi_2$ на гиперповерхности $\mathcal{S}_2$ при заданных калибровочных условиях.

Более того, в [44] требуется, чтобы амплитуды перехода удовлетворяли следующему условию:

$$\left\langle \gamma_2, \phi_2, \mathcal{S}_2 \middle| \gamma_1, \phi_1, \mathcal{S}_1 \right\rangle = \sum \left\langle \gamma_2, \phi_2, \mathcal{S}_2 \middle| \gamma_3, \phi_3, \mathcal{S}_3 \right\rangle \left\langle \gamma_3, \phi_3, \mathcal{S}_3 \middle| \gamma_1, \phi_1, \mathcal{S}_1 \right\rangle, \quad (1.23)$$

где суммирование производится по всем состояниям на промежуточной поверхности $\mathcal{S}_3$. Разумно предполагать, что суммирование по всем состояниям подразумевает интегрирование по всем четырехмерным метрикам на $\mathcal{S}_3$. В таком случае на этой гиперповерхности не должны накладываться калибровочные условия, а поскольку эта поверхность произвольна, то условия могут быть наложены только на начальной и конечной гиперповерхностях.

Хартл и Хокинг [7] получают уравнение Уилера – Де Витта, просто требуя, чтобы определенная через континуальный интеграл волновая функция не зависела от функции хода $N$:

$$\int DgD\phi\left[\frac{\delta S}{\delta N}\right]\exp\left(iS\left[g,\phi\right]\right)=0. \tag{1.24}$$

Фактически, это требование дает классическую гамильтонову связь

$$\mathcal{T}=\frac{\delta S}{\delta N}=0, \tag{1.25}$$

которая должна быть преобразована в квантовую связь так же, как это делается в каноническом формализме, т. е. путем замены обобщенных координат и импульсов операторами и выбора некоторого способа упорядочения этих операторов. Таким образом, формальное использование континуального интеграла в работе [7] не приводит к более строгому и последовательному выводу уравнения Уилера – Де Витта, чем в каноническом формализме.

Мы еще ничего не сказали о том, что континуальный интеграл в данном подходе берется не по "лоренцевым" метрикам с сигнатурой (–, +, +, +), а по так называемым "евклидовым" метрикам с сигнатурой (+, +, +, +). В обычной квантовой теории поля переход к "евклидовой" сигнатуре осуществляется с помощью так называемого поворота Вика $t\to -i\tau$ [46]. Известно, что континуальные интегралы по калибровочным полям расходятся, но поворот Вика (переход к мнимому времени) улучшает сходимость интеграла. Однако в теории гравитации это не работает, поскольку "евклидово" гравитационное действие не является положительно-определенным, и интеграл остается расходящимся. Поэтому предложение Хартла и Хокинга определить волновую функцию Вселенной через континуальный интеграл по "евклидовым" метрикам вызвало критику. Линде [47,48] предложил в случае гравитации выполнять поворот Вика в обратном направлении ($t\to +i\tau$), однако это не решение вопроса, так как при рассмотрении системы гравитационного и других полей поворот должен быть осуществлен в одном направлении. Более того, даже для чистой гравитации часть действия, которая соответствует гравитационным флуктуациям, является положительно-определенной, поэтому требуется, чтобы для этой части действия поворот Вика производился в том же направлении, что и для негравитационных полей, что вступает в противоречие с предложением Линде, и на этом основании предложение Линде было раскритиковано Хокингом и Туроком [49]. Как отмечается в [49], не существует калибровочно-инвариантного способа отделить гравитационные степени свободы, которые определяют фоновую метрику, от степеней свободы, отвечающих флуктуациям гравитационного поля.

Несмотря на противоречивость этого подхода, мы можем отметить здесь два обстоятельства. Во-первых, калибровочные степени свободы дают вклад в континуальный интеграл. Во-вторых, необходимо наложить некоторые калибровочные условия, а это, в свою очередь, ставит вопрос, является ли континуальный интеграл независимым от выбора этих условий.

**1.3.2. Метод Фаддеева – Попова. Асимптотические граничные условия. Расширенная система лагранжевых уравнений.** Как уже говорилось, континуальный интеграл по калибровочным полям расходится вследствие того, что включает интегрирование по физически эквивалентным полевым конфигурациям, связанным между собой калибровочными преобразованиями, которые и дают бесконечный вклад. Идея метода Фаддеева – Попова [9, 50] состояла в том, чтобы отобрать по одному представителю от каждого класса эквивалентных полевых конфигураций с помощью калибровочных условий, выделив бесконечный вклад эквивалентных конфигураций в отдельный множитель. Метод заключается в том, что в континуальный интеграл вводится величина, формально равная единице, которая раскладывается на отдельные множители, в результате чего калибровочно-инвариантное действие исходной теории заменяется эффективным действием, включающим, помимо гравитационного действия $S_{(grav)}$, два дополнительных слагаемых: член, фиксирующий калибровку $S_{(gauge)}$, и член, содержащий духи Фаддеева – Попова $S_{(ghost)}$:

$$S_{FP} = S_{(grav)} + S_{(gauge)} + S_{(ghost)}; \tag{1.26}$$

$$S_{(gauge)} = \int d^4 x \lambda_\mu f^\mu \left[ g_{\nu\lambda} \right]; \tag{1.27}$$

$$S_{(ghost)} = \int d^4 x \bar{\theta}_\nu \hat{M}^\nu_\mu \theta^\mu . \tag{1.28}$$

Со строго математической точки зрения подобные операции с расходящимися интегралами не являются корректными, однако нельзя не признать, что метод Фаддеева – Попова сыграл существенную роль в развитии квантовой теории поля. Очевидно, эффективное действие на является калибровочно-инвариантным. Калибровочная инвариантность континуального интеграла обеспечивается нулевыми граничными условиями на лагранжевы множители при калибровке $\lambda_\mu$ и духовые переменные $\bar{\theta}_\mu$, $\theta^\mu$. $f^\mu \left[ g_{\nu\lambda} \right]$ в (1.27) – функции, фиксирующие калибровку. $\hat{M}^\nu_\mu$ в (1.28) – оператор Фаддеева – Попова.

В обычной квантовой теории поля через континуальный интеграл определяются элементы $S$-матрицы – амплитуды перехода между начальным и конечным ($|\mathrm{in}\rangle$ и $|\mathrm{out}\rangle$) состояниями, в которых частицы считаются свободными. В соответствии с постановкой задачи рассеяния эти состояния называют асимптотическими, а нулевые граничные условия на лагранжевы множители при калибровке и духи – асимптотическими граничными условиями. Действительно, в противном случае в начальном и конечном состояниях была бы фиксирована калибровка, и присутствовали бы духовые поля. Нужно отметить, что следствием калибровочной неинвариантности эффективного действия

Фаддеева – Попова является зависимость от калибровки функций Грина. Но при этом можно потребовать, чтобы производящий функционал для функций Грина оставался калибровочно-инвариантным, несмотря на неинвариантность эффективного действия, что в электродинамике приводит к тождествам Уорда, а в теориях Янга – Миллса – к тождествам Славнова – Тейлора, обеспечивающим калибровочную инвариантность и перенормируемость теории в целом.

По-иному ставится задача в теории гравитации, где основной интерес представляет амплитуда перехода типа (1.21) между двумя пространственноподобными гиперповерхностями. Асимптотическими состояниями в теории гравитации можно считать только состояния в асимптотически-плоских пространствах, где гравитационное поле стремится к нулю. Но гравитационное поле отлично от нуля на произвольной гиперповерхности во вселенной с произвольной топологией (мы помним точку зрения Хокинга, что в квантовой гравитации должны учитываться все топологии). Более того, даже в изотропной вселенной (замкнутой или открытой, но не плоской) гравитационное поле на произвольной гиперповерхности отлично от нуля. Оно описывается четырехмерной метрикой, следовательно, должны быть фиксированы калибровочные условия (система отсчета), также нет оснований полагать, что на данной гиперповерхности отсутствуют духовые поля (поскольку они должны отсутствовать только вне области взаимодействия). Роль духовых полей в теории гравитации до сих пор не ясна, но принято считать, что духи появляются внутри области взаимодействия, они необходимы для того, чтобы обеспечить унитарность амплитуды перехода. Поэтому мы не можем сказать, что состояние на произвольной гиперповерхности свободно от духовых полей. Как мы видим, ситуация полностью отличается от той, с которой обычно имеют дело в квантовой теории поля.

Итак, мы можем констатировать, во-первых, что *большинство гравитирующих систем* (за исключением асимптотически-плоских пространств) *не имеют асимптотических состояний*, и, во-вторых, *в таком случае при построении квантовой теории гравитации использование асимптотических граничных условий в континуальном интеграле не оправдано*.

Если в обычной квантовой теории поля большую роль играет матрица рассеяния и функции Грина, в квантовой гравитации ставятся другие цели. Здесь важной задачей является получение уравнения для волновой функции Вселенной (уравнения Уилера – Де Витта или уравнение Шредингера). Если следовать методу Фейнмана, необходимо апроксимировать действие, используя решения уравнений Лагранжа. Но, поскольку мы работаем с эффективным действием, при его варьировании получаются модифицированные уравнения Эйнштейна,

$$R_{\mu}^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R-\kappa T_{\mu(mat)}^{\nu}=\kappa\left(T_{\mu(gauge)}^{\nu}+T_{\mu(ghost)}^{\nu}\right). \tag{1.29}$$

Здесь $T_{\mu(mat)}^{\nu}$ – тензор энергии-импульса полей материи. Уравнения включают два дополнительных члена, $T_{\mu(gauge)}^{\nu}$ и $T_{\mu(ghost)}^{\nu}$, получающихся при варьировании члена, фиксирующего калибровку, и духового действия. Разумеется, $T_{\mu(gauge)}^{\nu}$ и $T_{\mu(ghost)}^{\nu}$ не являются истинными тензорами, поскольку зависят от выбранных калибровочных условий.

Уравнения (1.29) следует дополнить уравнениями для духов и калибровочными условиями, получаемыми при варьировании эффективного действия по лагранжевым множителям. Такую систему уравнений можно назвать *расширенной системой лагранжевых уравнений*. Как и эффективное действие, она не является калибровочно-инвариантной.

Калибровочные условия должны накладываться не произвольно, а выбираться таким образом, чтобы отбирать по одному представителю от каждого класса эквивалентности. Известно, что большинство калибровок не полностью фиксируют произвол в преобразованиях полевых переменных, параметры так называемых остаточных калибровочных преобразований остаются не фиксированными, но их можно зафиксировать с помощью граничных условий. Для ряда калибровок наложение нулевых граничных условий на параметры остаточных преобразований на концах рассматриваемого временного интервала в силу уравнений для этих параметров приводит к тому, что параметры обращаются в нуль на всем временном интервале, и произвола в преобразованиях полевых переменных более не остается. Но уравнения для духовых переменных совпадают с уравнениями для остаточных калибровочных преобразований, поэтому нулевые граничные условия для духов приводят к исключению духовых полей на всем временном интервале. То же самое справедливо для лагранжевых множителей при калибровочных условиях; уравнения для них могут быть получены как следствие расширенной системы лагранжевых уравнений.

Получается, что наложение асимптотических граничных условий в континуальном интеграле является операцией, в определенной степени обратной регуляризации интеграла: граничные условия могут быть использованы для исключения калибровочно-неинвариантных членов в эффективном действии Фаддеева – Попова и возвращения к калибровочно-инвариантному действию исходной теории. Аналогично, расширенная система лагранжевых уравнений при учете граничных условий сводится к калибровочно-инвариантной системе уравнений исходной теории.

Тем не менее, использование асимптотических граничных условий не подвергаются сомнению во многих работах по квантовой геометродинамике. Так, асимптотические граничные условия использовались в работах Барвинского и Пономарева [51,52] для вывода уравнения Уилера – Де Витта. В работах использовался метод Фаддеева – Попова для континуального интеграла в гамильтоновой форме, причем в качестве калибровочных условий накладывались так называемые унитарные калибровки, зависящие только от физических переменных фазового пространства: $\chi^{\mu}(q,p)=0$. На этот метод нередко ссылаются как на квантование в унитарных калибровках. Предполагается, что полную систему связей и калибровочных условий можно разрешить относительно "истинно физических" степеней свободы, что находит свое оправдание в электродинамике, где не только нулевая компонента 4-потенциала $A_0$, но и продольная $A_3$ считаются нефизическими, четыре компоненты вектор-потенциала электромагнитного поля сводятся к двум физически значимым; происходит переход к редуцированному фазовому пространству двух степеней свободы. Повторение этой программы для гравитационного поля проблематично в случае изотропных космологических моделей, в которых масштабный фактор является единственной физической степенью свободы гравитационного поля. Модель может быть дополнена полями материи, например, скалярным полем, тогда последовательное применение этого метода приведет к исключению всех гравитационных переменных (не только функции хода – калибровочной степени свободы, но и масштабного фактора) из физического описания модели; физические степени свободы будут представлены только скалярным полем.

Этот пример показывает, что хорошо известные методы при применении к гравитации могут приводить к результатам, совершенно не типичным для негравитационных теорий. Представляется необоснованным мнение, высказанное в работе [53], что успех квантования в унитарных калибровках в асимптотически плоском пространстве-времени оправдывает экстраполяцию этого метода на Вселенную в целом. Однако успех квантования в унитарных калибровках был обусловлен именно наличием асимптотических состояний, в которых фоновую метрику можно считать метрикой Минковского, и выделить на этом фоне "истинно физические" степени свободы гравитационного поля, описывающие гравитационные волны.

**1.3.3. Метод Баталина – Фрадкина – Вилковыского.** Метод Фаддеева – Попова был первым в ряду подходов, имеющих целью регуляризовать континуальный интеграл для калибровочных теорий. Большую известность приобрел метод Баталина – Фрадкина – Вилковыского (БФВ), в котором используется континуальный интеграл в гамильтоновой форме. Именно авторы этого метода ввели понятие *расширенного фазового пространства*. Фазовое пространство расширялось за счет включения в него духовых переменных. Континуальный интеграл в этом подходе берется по физическим, калибровочным и духовым переменным и сопряженным импульсам, поэтому, по крайней мере формально, все эти переменные рассматриваются на равной основе. В действительности метод был задуман как обобщение метода Дирака на случай, когда алгебра преобразований, генерируемых связями, является открытой.

Как и метод Фаддеева – Попова, метод БФВ [10-12] имел своей целью прежде всего построение релятивистской $S$-матрицы, поэтому предполагалось наличие асимптотических состояний, и в континуальном интеграле использовались асимптотические граничные условия.

Действие БФВ может быть представлено в виде:

$$S_{BFV} = \int d^4x \left( p^{ij}\dot{\gamma}_{ij} + \pi^{\mu}\dot{N}_{\mu} + \rho_{\alpha}\dot{c}^{\alpha} - \left\{ \bar{\psi}, \Omega \right\} \right). \tag{1.30}$$

Здесь $c^{\alpha}$, $\rho_{\alpha}$ – духи БФВ и сопряженные им импульсы, $\bar{\psi}$ – функция, фиксирующая калибровку, $\Omega$ – генератор БРСТ-преобразований, преобразований, обнаруженных Бекки, Стора, Руэ и Тютиным [54,55], относительно которых эффективное действие остается инвариантным после включения члена, фиксирующего калибровку, и действия для духов. Эффективное действие БФВ является БРСТ-инвариантным, что обеспечивается асимптотическими граничными условиями. Поэтому эти условия – неотъемлемая часть подхода БФВ. Генератор строится в виде ряда по грассмановым (духовым) переменным, при этом коэффициентами разложения являются обобщенные структурные функции алгебры связей [56]:

$$\Omega_{BFV} = \int d^3x \left( c^\alpha U^{(0)}_\alpha + c^\alpha c^\beta U^{(1)\gamma}_{\beta\alpha} \rho_\gamma + \ldots \right). \tag{1.31}$$

$U^{(n)}$ – структурные функции $n$-го порядка; при этом структурные функции нулевого порядка совпадают с дираковскими связями. В реалистических физических теориях все структурные функции выше первого порядка равны нулю; в электродинамике и теориях Янга – Миллса структурные функции первого порядка являются истинными константами, однако в теории гравитации это не так, поскольку одна из структурных функций, $C^i_{00}$, которая входит в соотношение

$$\left\{ \mathcal{T}, \mathcal{T} \right\} = C^i_{00} \mathcal{T}_i \,, \tag{1.32}$$

содержат явную зависимость от компонент трехмерной метрики $\gamma_{ij}$, поэтому алгебра преобразований, генерируемых связями, строго говоря, является открытой. Если функция $\bar{\psi}$ выбрана в виде $\bar{\psi} = \rho_\alpha \chi^\alpha$, действие (1.30) содержит член $\rho_\alpha c^\beta \left\{ \chi^\alpha, U^{(0)\gamma}_{\beta\delta} \right\} \rho_\gamma c^\delta$, который соответствует четырехдуховому взаимодействию. Подобное слагаемое отсутствует в эффективном действии Фаддеева – Попова (1.26) – (1.28), и это говорит о различии в структуре духовых секторов.

Поскольку нас интересует калибровочно-инвариантный сектор теории, может показаться, что различие в структуре духовых секторов не имеет особого значения. Однако это математический факт, и он говорит о том, что группа преобразований, генерируемых связями, отличается от группы калибровочных преобразований исходной теории, которая была первоначально сформулирована в лагранжевом формализме. Это прекрасно понимали создатели метода БФВ. Так, в [10] Фрадкин и Вилковыский пишут:

> "…в этом случае калибровочные преобразования не могут быть представлены как канонические преобразования в гамильтоновой теории… и, таким образом, они отличаются от преобразований, генерируемых связями."[3]

Это говорит о том, что и обобщенная гамильтонова динамика Дирака, и формулировка гамильтоновой динамики, используемая в методе БФВ, – это формулировки, не эквивалентные лагранжевой формулировке теории гравитации Эйнштейна. По-существу, речь идет о разных теориях с разными группами преобразований.

Холливелл [57] попытался вывести уравнение Уилера – Де Витта из континуального интеграла с эффективным действием БФВ и асимптотическими граничными условиями для модели с конечным числом степеней свободы. Он опирался на теорему Фрадкина – Вилковыского [56], в которой доказывается независимость континуального интеграла от выбора калибровки при наличии асимптотических граничных условий (эти граничные условия, как уже говорилось, обеспечивают БРСТ-инвариантность действия, что является важной частью доказательства). Это позволило Холливеллу выбрать самое простое калибровочное условие $\dot{N}=0$ ($N=\mathrm{const}$) и провести интегрирование по духам и функции хода $N$. Он аргументировал, что, в зависимости от того, каковы пределы интегрирования функции хода, можно получить либо временное уравнение Шредингера (в случае, когда $N$ изменяется от 0 до $+\infty$) или же уравнение Уилера – Де Витта (если интегрировать $N$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$). Если принять аргументацию Холливелла, все же остается непонятным, почему мы должны выбрать второй вариант.

[3] "…in this case the gauge transformations cannot be presented as canonical transformations in Hamiltonian theory… and thus they differ from transformations generated by constraints." [10, p. 226].

Несколько позже, чем метод БФВ, появился метод Баталина – Вилковыского [58], в котором использовался континуальный интеграл с эффективным действием в лагранжевой форме. Метод обобщает метод Фаддеева – Попова на случай открытых алгебр калибровочных преобразований. Однако для гравитации эффективное действие Баталина – Вилковыского сводится к действию Фаддеева – Попова, поэтому для нас он не дает ничего нового.

## 1.4. Канонические преобразования в фазовом пространстве

**1.4.1. Преобразования переменных фазового пространства, затрагивающее калибровочные степени свободы.** В 2008 году в arXiv'e[4] появилась статья Кирющевой и Кузьмина (позднее опубликованная в журнале [59]), в которой демонстрировалось, что компоненты метрического тензора и переменные АДМ не связаны каноническим преобразованием. Доказательство очень простое: достаточно вычислить скобку Пуассона переменных $N$ и $p^{ij}$ (напомним, что $p^{ij}$ – импульсы, сопряженные компонентам трехмерной метрики $\gamma_{ij}$), используя преобразования, обратные (1.5), и убедиться, что она не равна нулю (см. формулу (161) в [59]). Можно рассмотреть более общие преобразования, затрагивающие калибровочные степени свободы,

$$N_\mu = V_\mu\left(g_{0\nu}, g_{ij}\right), \quad \gamma_{ij} = g_{ij}\,. \tag{1.33}$$

Здесь $N_\mu$ – некоторые новые функции компонент метрического тензора, причем $N_\mu$ не обязаны быть 4-вектором. Поскольку пространственные компоненты метрического тензора остаются неизменными, не меняются в результате преобразования также и сопряженные им импульсы: $\Pi^{ij} = p^{ij}$. Тогда

[4] e-Print archive: https://arxiv.org/

$$\left\{N_{\mu},\Pi^{ij}\right\}\Big|_{g_{\nu\lambda},p^{\rho\sigma}}=\frac{\partial V_{\mu}}{\partial g_{ij}}. \qquad (1.34)$$

Эта скобка Пуассона равна нулю только тогда, когда функции $V_{\mu}$ не зависят от $g_{ij}$. Но этот случай можно назвать тривиальным: новые калибровочные переменные $N_{\mu}$ выражаются только через старые калибровочные переменные $g_{0\mu}$, и переход к переменным АДМ (1.5) выходит за рамки этого узкого класса преобразований.

Кирющева, Кузмин и их соавторы сделали из этого математического факта далеко идущие выводы [60-63], о том, что, во-первых, дираковская гамильтонова динамика для гравитации и гамильтонова динамика в переменных АДМ не эквивалентны, несмотря на то, что каждая из них считается эквивалентной эйнштейновской (лагранжевой) формулировке теории гравитации. Далее они приходят к выводу, что лагранжева формулировка теории гравитации, использующая в качестве полевых переменных компоненты метрического тензора, не эквивалентна лагранжевой формулировке той же теории, использующей переменные АДМ [63]. Последнее утверждение как минимум странно, так как ничто в лагранжевом формализме не препятствует заменам переменных, подобных (1.5). Речь идет всего лишь о замене переменных в системе дифференциальных уравнений.

Что же касается скобки Пуассона (1.34), мы можем вспомнить, что Дирак предлагал нефизические, калибровочные переменные (каковой является $N$) вовсе не включать в определение скобок Пуассона. Но даже если мы включаем их и в фазовое пространство, и в определение скобок Пуассона, эти переменные все равно неканонические с точки зрения формализма Дирака (для них не существует гамильтоновых уравнений и т. п.). Есть ли смысл ставить вопрос о том, является ли преобразование каноническим, если оно затрагивает неканонические переменные?

В качестве альтернативы можно было бы предложить ограничиться только преобразованиями канонических переменных, как они понимаются в дираковском подходе, исключив преобразования типа (1.33). В таком случае мы сможем доказать эквивалентность уравнений движения в лагранжевом и гамильтоновом формализме, однако, нам придется зафиксировать форму гравитационных связей, запретив любые преобразования калибровочных переменных. Вид связей важен для последующей процедуры квантования, и в этом смысле параметризация АДМ более предпочтительна, так как в этой параметризации связи не зависят от калибровочных переменных. Тем не менее, у нас нет каких-либо прочных оснований, чтобы зафиксировать параметризацию (форму гравитационных связей).

**1.4.2. Проблема построения генератора калибровочных преобразований.** Ранее уже упоминалось, что связи, рассматриваемые Дираком как генераторы преобразований, не дают корректных преобразований для калибровочных переменных. Это верно как для электродинамики, так и для теории гравитации. Как известно, теория Эйнштейна инвариантна относительно калибровочных преобразований, инфинитезимальная форма которых может быть записана следующим образом:

$$\delta g_{\mu\nu} = -\eta^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\eta^{\lambda} - g_{\nu\lambda}\partial_{\mu}\eta^{\lambda}. \qquad (1.35)$$

Под *корректными* преобразованиями я имею в виду те, которые следуют из (1.35), учитывая соотношение между старыми и новыми переменными и симметрию рассматриваемой модели. Например, в случае изотропной модели с интервалом

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \qquad (1.36)$$

мы получаем:

$$\delta N = -\dot{N}\eta - N\dot{\eta}; \quad \delta a = -\dot{a}\eta; \quad \eta \equiv \eta^0. \qquad (1.37)$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такой генератор $G$, с помощью которого преобразования всех гравитационных переменных, включая $g_{0\mu}$ (или $N$, $N_i$), независимо от выбранной параметризации, могут быть найдены по формуле

$$\delta q^a = \left\{ q^a, G \right\}. \tag{1.38}$$

Необходимым условием решения этой задачи является то, что скобки Пуассона должны быть определены в расширенном фазовом пространстве, включающем калибровочные степени свободы.

Для иллюстрации рассмотрим алгоритм построения генератора, предложенный Кастеллани [27]. Генератор строится в виде ряда

$$G = \sum_n \varepsilon_\mu^{(n)} G_n^\mu , \tag{1.39}$$

где $G_n^\mu$ – линейные комбинации связей, которые удовлетворяют условиям, вытекающим из требования инвариантности уравнений движения, $\varepsilon_\mu^{(n)}$ – производные *n*-го порядка инфинитезимальных параметров $\varepsilon_\mu$. Это в принципе не противоречит предположению Дирака о том, что генераторы являются линейными комбинациями связей, хотя сам Дирак никогда не включал производные параметров преобразований в такие линейные комбинации. Для гравитации сумма в (1.39) включает только производные первого порядка, но именно это слагаемое обеспечивает правильный результат – оно дает аналог первого члена в (1.35). Кроме того, вместо канонического гамильтониана Дирака используется гамильтониан, отличающийся от дираковского слагаемым вида $\pi^{0\mu}\dot{g}_{0\mu}$, в котором обобщенные скорости не могут быть выражены через импульсы. И скобки Пуассона определены в расширенном фазовом пространстве. Все это обеспечивает корректный результат для преобразований *всех* компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

Однако, поскольку переход к переменным АДМ не является каноническим с точки зрения формализма Дирака, вид связей и алгебра связей зависит от выбранной параметризации, а предложенный Кастеллани подход существенно опирается на алгебру связей, это объясняет, почему предложенная Кастеллани процедура, давая правильный результат для одной параметризации гравитационных переменных (компонент метрического тензора), приводит к неправильному результату для другой параметризации (переменных АДМ).

Преобразования для переменных АДМ, полученные по алгоритму Кастеллани, будут совпадать с теми, которые следуют из (1.35), только после следующего переопределения инфинитезимальных параметров:

$$\eta^0 = \frac{1}{N}\varepsilon^0 = \sqrt{-g^{00}}\varepsilon^0; \quad \eta^i = \varepsilon^i - \frac{N^i}{N}\varepsilon^0 = \varepsilon^i + \sqrt{-g^{00}}\,\frac{g^{0i}}{g^{00}}\varepsilon^0 . \quad (1.40)$$

Многие авторы считают такое преобразование вполне законным несмотря на то, что оно включает сами полевые переменные. Однако необходимость переопределения (1.40) указывает на то, что параметры $\varepsilon^\mu$ не являются калибровочными параметрами, в отличие от $\eta^\mu$, которые входят в бесконечно малые преобразования координат и, как следствие – в бесконечно малые преобразования тензорных величин. Нужно отметить, что в алгоритме Кастеллани и не предусматривается, что параметры $\varepsilon^\mu$ – это параметры бесконечно малых координатных преобразований. Кастеллани использовал слово "калибровочный" ("gauge") в более широком смысле; у него это слово означает любые преобразования, включающие произвольные функции, а вовсе не калибровочные преобразования в лагранжевом формализме. Как уже упоминалось, Дирак также никогда не интересовался вопросом, совпадают ли преобразования, генерируемые связями, с калибровочными преобразованиями в лагранжевом формализме. Тот факт, что в случае полей Янга – Миллса параметры, введенные Кастеллани, совпадают с параметрами калибровочной группы, не означает, что то же самое должно иметь место в теории гравитации. С точки зрения того смысла, который Кастеллани придавал слову "калибровочный", переопределения (1.40) вполне законны. Преобразования, полученные с помощью генератора Кастеллани, образуют группу только когда параметры Кастеллани совпадают с групповыми параметрами (как в случае полей Янга – Миллса), в противном случае необходимо переопределение параметров. Похожие результаты получаются в работах [28,29].

Генератор БРСТ-преобразований, который занимает центральное место в подходе БФВ, также не может служить генератором, который дает корректные калибровочные преобразования. Формально, БРСТ-преобразования переменных исходной теории (в случае гравитации – компонент метрического тензора или переменных АДМ) совпадают с калибровочными, если заменить произведение духового поля $c^{\mu}$ на постоянный грассманов параметр $\varepsilon$ калибровочным параметром $\eta^{\mu}$. Однако, в подходе БФВ структуру БРСТ-генератора определяет алгебра связей, структурные функции которой выступают в качестве коэффициентов в разложении (1.31). Рассмотрим для простоты изотропную модель, в которой имеется одна первичная и одна вторичная связи. Если использовать параметризацию АДМ, вторичная связь не зависит от $N$, и скобки Пуассона первичной и вторичной связей равны нулю, что подразумевает, что алгебра связей является абелевой, структурные функции $U^{(1)\gamma}_{\beta\alpha}$ равны нулю, и разложение (1.31) ограничивается только первым слагаемым, которое представляет собой линейную комбинацию дираковских связей. Но мы знаем, что линейная комбинация дираковских связей не генерирует корректные калибровочные преобразования для всех гравитационных переменных. Этого примера достаточно, чтобы убедиться, что генератор БРСТ-преобразований, построенный в соответствии с методом БФВ, не подходит на роль искомого генератора.

Возникает вопрос, возможно ли построить гамильтонову динамику калибровочной теории таким образом, чтобы она в максимальной степени "напоминала" гамильтонову динамику невырожденной (некалибровочной) теории? Под словом "напоминала" имеется в виду следующее: она должна рассматриваться в расширенном фазовом пространстве, где все переменные, включая калибровочные и духовые, имеют равный статус; система уравнений Гамильтона должна быть эквивалентна лагранжевой системе уравнений; преобразования в расширенном фазовом пространстве, затрагивающие калибровочные степени свободы, должны иметь статус канонических; должен существовать способ построения генератора преобразований в фазовом пространстве, которые совпадают с калибровочными для всех обобщенных координат исходной теории. В Главе II будет показано, что построить гамильтонову динамику в расширенном фазовом пространстве, удовлетворяющую всем этим требованиям, возможно.

## *1.5. Квантовая космология: от работ Хокинга до современных подходов*

**1.5.1. Дискуссии 1980-х – 1990-х годов.** В 1980-х годах, после публикации статей [7,8] между Виленкиным и Хокингом с соавторами развернулась дискуссия о начале Вселенной. Обсуждалась модель замкнутой изотропной вселенной. Рождение Вселенной понималось как переход из состояния "Ничего", которому соответствовало значение масштабного фактора $a = 0$, в состояние с некоторым ненулевым значением масштабного фактора. Этому переходу Хартл и Хокинг сопоставляют решение евклидовой версии уравнений Эйнштейна, так называемый евклидов инстантон $S^4$ – четырехмерную сферу, одно из измерений которой соответствует мнимому времени, переход к которому осуществляется в результате поворота Вика $t \to -i\tau$, а один из полюсов сферы соответствует состоянию "Ничего" с $a = 0$, т. е. геометрии нулевого объема. Это отвечает предположению Хартла и Хокинга о том, что волновая функция Вселенной определяется через континуальный интеграл по компактным геометриям, не имеющим границ (так называемое предположение "об отсутствии границ"). Виленкин в работе [40] предложил другие граничные условия для волновой функции Вселенной, которые отбирают только те решения уравнения Уилера – Де Витта, которым соответствует поток вероятности, вытекающий вовне через границу суперпространства. Дискуссия между Хокингом и Виленкиным в основном касалась обсуждения предложенных граничных условий и того, приводят ли эти условия к инфляционной фазе эволюции Вселенной [64-67,41,42].

Если в 1980-х годах в центре внимания была замкнутая модель вселенной, то в 1990-х космологи переключились на открытую модель, поскольку получаемые наблюдательные данные склоняли чашу весов в пользу открытой модели. В работе [68] Хокинг и Турок предположили, что волновая функция, которая удовлетворяет условию "об отсутствии границ", может описывать рождение открытой вселенной с инфляционной стадией. Защищая свое предположение [69], Хокинг и Турок отмечали, что оно допускает широкий класс инфляционных потенциалов и, таким образом, отпадает необходимость в подгонке потенциала скалярного поля к специальному виду. Тем не менее, это предложение вызвало много критических замечаний Виленкина [70,71], Линде [47,49,72] и других авторов. В частности, обсуждалось, в самом ли деле решение Хокинга и Турока описывает рождение открытой вселенной [47,73]. Поскольку квантовая космология, как и любая наука, должна делать определенные предсказания, Хокинг и Турок попытались оценить значения параметра плотности $\Omega$ [68] и космологической постоянной [69]. Эта попытка оказалась безуспешной: получить значение $\Omega$ , которое отвечало бы современным наблюдательным данным, не удалось. Чтобы оправдать свой подход, авторы привлекли антропный принцип, к которому у космологов весьма неоднозначное отношение, но и это не помогло исправить ситуацию. В некоторых работах 1990-х годов продолжалось обсуждение граничных условий для волновой функции Вселенной [43,74].

Говоря о дискуссиях 1990-х годов, следует упомянуть об очной дискуссии, состоявшейся между Хокингом и Пенроузом в Кембриджском университете в 1994 году [75]. Каждый из ученых прочитал по три лекции, в которых затрагивались многие нерешенные вопросы современной теоретической физики – от общей теории относительности и квантовой механики до физики черных дыр и квантовой космологии. Эта дискуссия продемонстрировала, насколько переплетены все эти проблемы.

**1.5.2. Представления о рождении Вселенной.** В 1984 году А. Д. Сахаров опубликовал статью [76], в которой пошел еще дальше предположения Хокинга о том, что в квантовой гравитации должны рассматриваться все возможные топологии пространства-времени. Сахаров предположил, что существуют состояния физического континуума, которые включают области с различной сигнатурой метрики, т. е. допускается существования областей с двумя или более временных измерений, или же, наоборот, все измерения являются чисто пространственными. Квантовый переход из области с чисто пространственной сигнатурой (+, +, +, +) в область с одним временным измерением (–, +, +, +) может рассматриваться как квантовое рождение Вселенной. Сахаров сам писал, что написанию данной работы способствовало его знакомство со статьями Хартла и Хокинга и Виленкина [7,8].

Можно привести следующий аргумент в ее пользу гипотезы Сахарова. В статье [22] М. П. Бронштейн показал, что на планковских масштабах структура пространства-времени не может быть определена, поскольку любая попытка это сделать возмущает эту структуру. Следовательно, можно предположить, что на планковских масштабах пространство-время имеет произвольную топологическую структуру (вспомним пространственно-временную пену Уилера [31]). Можно пойти дальше и предположить, что существование областей с различной сигнатурой также возможно. Однако эффект от существования областей таких размеров пренебрежимо мал, и его вряд ли удастся зафиксировать.

Несмотря на всю фантастичность данной гипотезы, есть немало работ, в которых обсуждается изменение сигнатуры метрики [77-87]. Изменение сигнатуры метрики подразумевает, что временная координата может стать пространственной, или наоборот, т. е. допускаются преобразования, подобные повороту Вика, $t \to -iy$. В работе [77] предлагается новое понимание рождения Вселенной в соответствии с предположением Хартла и Хокинга "об отсутствии границ". Вселенная появляется из области с евклидовой сигнатурой, которая не имеет границ, и в которой не существует времени. Эта область может быть представлена как половина евклидовой 4-сферы, склеенной по границе с пространством-временем с лоренцевой сигнатурой (–, +, +, +). Изменение сигнатуры происходит при некотором значении масштабного фактора, например, при $a = l_{Pl}$, где $l_{Pl}$ – планковская длина.

В некоторых работах высказываются гипотезы о том, что могло послужить причиной изменения сигнатуры [79-81]. Принимая, что пространственно-временная метрика подвержена квантовым флуктуациям, можно предположить, что сигнатура метрики также подвержена флуктуациям. Метрический тензор может быть записан в виде $g_{\mu\nu} = e^a_\mu \eta_{ab} e^b_\nu$, причем $\eta_{ab} = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta}, 1, \ldots, 1\right)$, и $\theta$ рассматривается как динамическое поле. Однако неясно, что может управлять динамикой этого поля. Если изменение сигнатуры приводит к появлению нашей Вселенной, динамическое изменение поля $\theta$ должно иметь место "до" рождения нашей Вселенной и, следовательно, "до" появления самого времени. Здесь можно поддаться искушению ввести некоторое "другое время", в котором будет разворачиваться динамика поля $\theta$, но это может привести к логической несогласованности такой картины.

В 1980-е годы возник подход, известный как третичное квантование [88-93]. Подобно тому, как в обычной квантовой теории поля полевые функции становятся вторично квантованными операторами, волновая функция Вселенной становится третично квантованным (по отношению к полям материи оператором. Подобно тому, как в нестационарной метрике рассматривается рождение и уничтожение частиц, авторы идеи рассматривают рождение и уничтожение вселенных, причем роль нестационарной метрики играет метрика суперпространства. Была использована аналогия между уравнением Клейна – Гордона – Фока и уравнением Уилера – Де Витта, которое также является гиперболическим. Основным преимуществом этого подхода считается возможность описать изменение топологии пространства-времени; в подходе, основанном на третичном квантовании, ему соответствует изменение числа вселенных.

С другой стороны, этот подход является экстраполяцией квантово-полевых методов на масштабы Мультивселенной, и уже по этой причине вызывает критику [74,83]. В отличии от пространства-времени суперпространство не имеет причинной структуры, поэтому возникают проблема, что считать положительно-частотными (отрицательно-частотными) решениями уравнения Уилера – Де Витта. Вновь возникает проблема времени: что в данном подходе может выступать в качестве аналога временной координаты (в моделях с конечным числом степеней свободы в качестве такового обычно принимается масштабный фактор)? Несмотря на критику, работы в этом направлении продолжаются и сейчас (см. обзор [94] и указанные там ссылки).

**1.5.3. Разрушение пространства-времени в квантовой гравитации.** С течением времени отношение к проблеме времени стало меняться. Если после формулировки квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта она рассматривалась как существенный недостаток теории, как проблема, требующая своего разрешения, позднее многие космологи приняли иную точку зрения, которая состоит в том, что отсутствие времени – это естественная особенность квантовой гравитации.

Для объяснения отсутствия времени приводятся следующие аргументы [95]:

> "В классической канонической гравитации пространство-время может быть представлено как 'траектория' в конфигурационном пространстве – пространстве всех 3-метрик… Поскольку траектории не существуют в квантовой теории, пространство-время не существует на самом фундаментальном уровне и, следовательно, также не существует временной координаты, чтобы параметризовать какую бы ни было траекторию."[5]

Ту же идею можно найти в книге [96]:

> "…в квантовой гравитации понятие пространства-времени исчезает таким же образом, как понятие траектории исчезает в квантовой механике частицы."[6]

Эта идея кажется очевидной, но достаточно ли этой аналогии между геометрией трехмерного пространства и координатами частицы, чтобы отказаться от понятия пространства-времени в квантовой

---

[5] "In classical canonical gravity, a spacetime can be represented as a ‘trajectory’ in configuration space – the space of all three-metrics. . . Since no trajectories exist anymore in quantum theory, no spacetime exists at the most fundamental, and therefore also no time coordinates to parameterize any trajectory." [95, p. 170-171].

[6] ". . . in quantum gravity the notion of spacetime disappears in the same manner in which the notion of trajectory disappears in the quantum theory of a particle.” [96, p. 31].

гравитации? Идея, что понятие времени теряет свое значение в самом начале существования Вселенной, а также в любой области планковских размеров, сейчас широко распространена. Поэтому некоторые ученые утверждают, что на фундаментальном уровне пространства-времени не существует. Здесь мы опять можем вспомнить уже упоминавшийся факт, что еще в 1936 году М. П. Бронштейн показал [22], что на планковских масштабах структура пространства-времени не может быть определена. Однако, невозможность определить эту структуру средствами, которыми мы сегодня располагаем, еще не означает, что на фундаментальном уровне вообще нет пространственно-временной структуры; это означает только, что мы не имеем данных, чтобы сделать какие-либо выводы об этой структуре. Это позволяет предполагать, что эта структура может быть дискретной либо непрерывной, допускать любую топологию, как предлагал Хокинг, и т. д. На современном уровне знаний любое утверждение о структуре пространства-времени в квантовой гравитации, включая утверждение о самом ее существовании (или несуществовании), является всего лишь предположением.

Я полагаю, что для того, чтобы отвергнуть понятие времени, нам нужно нечто большее, чем упомянутая аналогия между геометрией трехмерного пространства и координатой частицы. Отсутствие времени подразумевает, что никакое квантово-гравитационное явление не может служить в качестве стандарта измерения времени, и не существует способа определить время через другие величины, например вероятности. Может быть интересно заметить, что на заре квантовой механики существовало мнение, что время не имеет смысла в атомной физике. Одним из тех, кто защищал это мнение, был физик и философ Норман Кампбелл, который предположил, что время – чисто статистическая концепция и привел некоторые аргументы в пользу этой идеи, но не смог предложить последовательной теории. Тем не менее, в 1926 году он писал [97]:

> "… Временные концепции так глубоко погружены во все наше сознание и язык, что если мы решим отбросить их полностью при обсуждении атомных явлений, мы обнаружим, что мы не можем даже адекватно сформулировать задачи, которые мы бы хотели решить… Когда отсутствует полное решение, было бы мудрее отказаться от всех попыток добиться формальной согласованности и использовать временные концепции свободно, даже в обстоятельствах, когда их обоснованность отрицается, если таким путем мы можем надеяться нащупать предположения, в каком направлении искать полное решение."[7]

Когда отрицается понятие времени, также подразумевается, что причинность теряет свое значение в сфере действия квантовой гравитации, будучи заменена вероятностными законами. Но соотношение между квантовыми явлениями и причинностью более тонкое. В подходе Фейнмана мы должны аппроксимировать действие в континуальном интеграле с помощью крошечных отрезков классической траектории, и достаточно знать лагранжиан, описывающий рассматриваемую систему, чтобы вывести все ее квантовое поведение. Получается, что классические законы, основанные на причинности, дают начало квантовому описанию, в то время как квантовые явления лежат в основе макроскопического мира. Возможно, что классические концепции могут быть чем-то большим, чем просто способ представления результатов измерений, как это предполагал Бор [98,99].

---

[7] ". . .Temporal conceptions are so deeply embedded in all our thoughts and language that, if we decided to abandon them entirely in discussing atomic phenomena, we should find that we could not even state adequately the problems we desire to solve. . . While the complete solution is lacking, it will be wiser to abandon all attempts at formal consistency, and to use temporal conceptions freely, even in circumstances in which their validity is denied, if by so doing we can hope to arrive at suggestions in what direction to seek the complete solution." [97, p. 1110].

Идея об отсутствии времени в квантовой гравитации, конечно же, полностью отвечает квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта с ее независящей от времени волновой функцией. Однако это приводит к тому, что можно назвать *разрушением пространства-времени*. Как уже говорилось ранее, структура пространства-времени определяется функциями хода и сдвига, которые являются калибровочными степенями свободы и рассматриваются как излишние с точки зрения подхода Дирака – Уилера – Де Витта. В этом подходе структура пространства-времени не играет никакой роли. Итак, мы опять возвращаемся к вопросу, квантовая геометродинамика Уилера – Де Витта – это попытка проквантовать именно общую теорию относительности, а не какую-либо другую теорию гравитации?

Объединение пространства и времени в единый континуум было огромным достижением Эйнштейна и Минковского, которое повлияло на развитие физики в XX веке, в том числе на становление квантовой теории поля. Должны ли мы просто отринуть это достижение в квантовой гравитации, считая, что оно появляется на низкоэнергетическом уровне?

Общепринятый ответ – да, время и наблюдатель со своей системой отсчета появляются только в классическом пределе квантовой гравитации. Однако это приводит к проблеме, которая представляется еще более сложной. Если в области квантовой гравитации мы имеем дело только с геометрией трехмерного пространства, как возникает четырехмерное пространство-время? Как появляется само время с таким свойством как необратимость?

Возможный ответ можно найти в работе Кифера [95]:

> "…очевидно, что появление обычного понятия пространства-времени в квантовой космологии нуждается в объяснении. Это можно сделать в два этапа: во-первых, нужно получить квазиклассическое приближение к квантовой гравитации… Это

приводит к выводу приближенного уравнения Шредингера для негравитационных полей на квазиклассическом фоне. Во-вторых, необходимо объяснить появление классических свойств…"[8]

В следующем разделе мы подробнее поговорим о квазиклассическом приближении и уравнении Шредингера для полей материи на классическом гравитационном фоне. Однако использование квазиклассического приближения подразумевает, что классическое пространство-время уже появилось, поскольку его метрика, которая играет роль фоновой метрики в приближенном уравнении Шредингера, является решением классических уравнений Эйнштейна. Но, чтобы найти решение уравнений Эйнштейна, необходимо зафиксировать систему отсчета, иначе решение останется недоопределенным. Наибольшее, что можно сделать дальше – это посчитать квантовогравитационные поправки. Но это никак не объясняет как время и, следовательно, пространство-время с его причинной структурой, появляется из "безвременной" ("timeless") Вселенной. Кроме того, идея о появлении пространства-времени из безвременной Вселенной может быть ошибочно интерпретирована в том смысле, что безвременная Вселенная существовала "раньше" зарождения пространства-времени. Однако, зарождение времени не может быть процессом, развивающимся во времени. Мы уже сталкивались с этой проблемой, когда говорили о попытке описать изменение сигнатуры метрики с помощью некоего поля $\theta$. Что же такое зарождение времени, и возможно ли его описать? Вспоминается цитата Кемпбелла о том, что "мы не можем даже адекватно сформулировать задачи, которые мы бы хотели решить".

---

[8] "…it is obvious that the emergence of the usual notion of spacetime within quantum cosmology needs an explanation. This is done in two steps: Firstly, a semiclassical approximation to quantum gravity must be performed… This leads to the recovery of an approximate Schrödinger equation of non-gravitational fields with respect to the semiclassical background. Secondly, the emergence of classical properties must be explained…" [95, p. 176-177].

**1.5.4. Что мы можем ожидать от современной квантовой космологии?** Мы уже говорили о том, что квантовая космология должна стать теорией, способной делать предсказания. В 1999 году Хокинг писал, что квантовая космология все еще не является настоящей наукой в том смысле, что она не имеет предсказательной силы [100]. Позднее он изменил свое мнение и стал утверждать, что космология превратилась в точную науку в 2003 году, когда поступили первые результаты со спутника WMAP [101]. В этом утверждении есть преувеличение, поскольку точности полученных данных все еще недостаточно, чтобы сопоставить теоретические предсказания с этими данными.

Поэтому пока квантовая космология остается чисто теоретическим, если не сказать – гипотетическим – построением. Однако это не исключительный случай, почти все области физики проходили такую стадию. Достаточно вспомнить Галилея, который верно поместил Солнце в центр планетной системы, но считал, опираясь на соображения математической красоты, что планеты движутся по окружностям [102]. И только после того, как Кеплер провел тщательный анализ астрономических данных, полученных Тихо Браге, и пришел к выводу, что планеты движутся по эллипсам, стало возможным говорить, что с этого момента классическая космология стала наукой, способной делать предсказания. Другой пример – статистическая физика в XIX веке, во времена Больцмана. Статистическая физика опиралась на гипотезу о существовании молекул, но в то время не было средств для наблюдения таких мелких частиц. Это, в частности, стало причиной сомнений Больцмана в правильности его научного подхода, которые продолжались вплоть до его смерти [103].

После того, как Уилер и Де Витт предложили свое уравнение, теоретики столкнулись со сложностью его решения для полной гравитации и системы материальных полей. В качестве упрощения было предложено рассматривать гравитационное поле как классическое, а все остальные поля – как квантовые. Впервые эта идея обсуждалась в работах [104,105], а в более последовательной форме была изложена в работе Падманабхана [106]. В работе [106] предполагается, что гравитационное поле $g_{\mu\nu}$ – решение уравнений Эйнштейна в пустом пространстве, в то время как другие поля описываются волновой функцией, которая удовлетворяет некоторому уравнению Шредингера с гамильтонианом, зависящим от фонового гравитационного поля $g_{\mu\nu}$. Падманабхан использовал игрушечную квантовомеханическую модель, которая имитирует гравитацию, взаимодействующую с квантовыми полями. Модель описывается лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} M \dot{Q}^2 - MV(Q) + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(Q,q). \tag{1.41}$$

Можно считать, что этот лагранжиан описывает две частицы с массами $M$ и $m$. Если $M \geq m$, можно использовать приближение Борна – Оппенгеймера [107]. Положение тяжелой частицы меняется очень медленно, и воздействие легкой частицы на движение тяжелой пренебрежимо мало. Легкая частица быстро подстраивается под изменения в положении тяжелой частицы, но все же при описании легкой частицы мы должны принимать во внимание присутствие тяжелой. Предполагается, что движение тяжелой частицы может быть описано классическим уравнением, а поведение легкой частицы определяется временным уравнением Шредингера. В этом подходе используется как квазиклассическое приближение, так и разложение действия по степеням параметра $M^{-1}$.

Далее можно провести аналогию между тяжелой частицей и гравитационным полем, которое, по предположению, медленно меняется, и между легкой частицей и полями материи. Не вполне ясно, однако, почему гравитационное поле в ранней Вселенной, даже если его уже можно рассматривать с классической точки зрения, должно быть медленно меняющимся. Еще менее ясно, что является аналогом параметра $M^{-1}$. В [106] его аналогом является ньютоновская гравитационная постоянная $G$. В [108] роль этого параметра выполняет константа $\frac{c^3}{16\pi G}$, которая включена в определение гравитационного действия [37]. В других работах авторы рассматривают разложение в ряд по степеням квадрата планковской массы, $m_{Pl}^2 = \frac{\hbar c}{G}$ [109,110]. Во всех случаях предел $M \to \infty$ подразумевает, что $G \to 0$. Очевидно, что, когда приближение Борна – Оппенгеймера применяется к молекулам, предел $M \to \infty$ оправдан. Однако $G \to 0$ означает полное отсутствие гравитации, поэтому физический смысл этого предельного перехода сомнителен. Цель данного подхода состоит в получении временного уравнения Шредингера для негравитационных полей с медленно меняющимся классическим фоновым гравитационным полем, в порядке разложения $\mathcal{O}(M^0)$. В следующем порядке, $\mathcal{O}(M^{-1})$, получается уравнение Шредингера с квантовогравитационными поправками.

В 2012 году Кифер и Крэмер представили работу [110] на конкурс, ежегодно проводимый Фондом гравитационных исследований (Gravity Research Foundation), и впоследствии были удостоены первой премии. В этой работе они отмечали, что малые эффекты, такие, как прецессия перигелия Меркурия или лэмбовский сдвиг, часто играют решающую роль в развитии физики. Следовательно, было бы весьма важно выявить малые квантовогравитационные эффекты, которые могли бы быть проверены наблюдениями, в том числе наблюдениями спектра анизотропии космического микроволнового фонового излучения (CMB). Вычисление тех самых квантовогравитационных поправок, о которых говорилось выше, позволили бы сделать теоретические предсказания, которые можно непосредственно сравнить с результатами наблюдений. Таким образом, программа действий, основанная на использовании приближения Борна – Оппенгеймера для гравитации, получила новую сильную мотивацию.

Тем не менее, в недавней статье [111] применимость приближения Борна – Оппенгеймера для гравитации было подвергнуто серьезному сомнению. Авторы статьи отмечают, что, когда приближение Борна – Оппенгеймера используется для молекул, это оправдано не из-за разницы в массах частиц, но потому, что динамика частиц определяется различными временными масштабами, которые подразумеваются, когда мы говорим, что положение тяжелой частицы медленнее изменяется во времени по сравнению с положением легкой частицы. Иначе говоря, необходимо иметь временную шкалу, а применение приближения Борна – Оппенгеймера к гравитации, которое, по мнению Кифера [95] (см. вышеприведенную цитату и ее обсуждение), должно объяснить, каким образом появилось время, приводит нас в замкнутый круг: нам необходимо понятие времени (временной шкалы) для того, чтобы объяснить возникновение времени.

Начиная с 1990-х годов, квазиклассическому подходу посвящается достаточно много работ [112-128]. Несмотря на усилия многих исследователей, квантовогравитационные поправки к энергетическому спектру микроволнового фонового излучения, которые могут быть вычислены, слишком малы, чтобы их можно было реально наблюдать, как признается в работе [123].

Поэтому, несмотря на утверждение Хокинга [101], сделанное в 2016 году, квантовая космология все еще не стала наукой, способной делать точные проверяемые предсказания. Тем не менее, именно с развитием квантовой гравитации многие ученые связывают решение концептуальных теоретических вопросов, таких как гравитационная энтропия или проблема квантовых измерений.

**1.5.5. Петлевая квантовая гравитация.** В настоящее время существует большое число подходов к квантовой гравитации (см.

недавние сборники статей [129-131]), и в ограниченном по объему обзоре невозможно обсудить все эти подходы. В 1980-е годы на роль теории, объединяющей общую теорию относительности и квантовую теорию, претендовала супергравитация [132,133], позднее – теория суперструн [16,134,135]. В последнее время значительное место в исследованиях по квантованию гравитации занимает подход, получивший название петлевой квантовой гравитации [13,14,96]. Пространство в этом подходе считается дискретным, а для гравитационных переменных используется специальная параметризация – так называемые переменные Аштекара [136], которые введены для того, чтобы сделать формулировку теории гравитации ближе к формализму, используемому в теориях Янга – Миллса. Несмотря на такие отличия от других подходов, петлевая квантовая гравитация следует методу квантования Дирака, т. е. связи там также накладываются в качестве условий на волновую функцию, хотя и в измененной форме, будучи выраженными через переменные Аштекара, и сама волновая функция зависит от этих переменных. Уравнение Уилера – Де Витта в данном подходе сохраняет свой статус основного уравнения квантовой гравитации [32].

Как и другие подходы, петлевую квантовую гравитацию проще всего применить к космологическим моделям с конечным числом степеней свободы, что получило название петлевой квантовой космологии [137-139]. В рамках данного подхода пытаются предсказать энергетический спектр космического микроволнового фонового излучения [140-141]. Используя петлевую квантовую гравитацию, исследуются как общетеоретические вопросы, такие как энтропия черных дыр, так и развиваются новые направления (квантовая геометрия, спиновые сети и т. п.) [96,142-144].

В литературе по петлевой квантовой гравитации нередко утверждается (или предполагается по умолчанию), что эта теория имеет правильный классический предел, в котором квантовая геометрия переходит в пространственно-временной континуум и справедливы классические уравнения Эйнштейна. Однако высказывались и сомнения по поводу этого утверждения, а также по поводу того, что представляет собой пространство состояний в петлевой квантовой гравитации, и других вопросов (см., например, [145]). Этот подход, будучи достаточно радикальным, тем не менее не решает ни одну из проблем, унаследованных от квантовой геометродинамики Дирака – Уилера – Де Витта: проблему времени, существование которого в области квантовой гравитации просто отрицается, проблему интерпретации волновой функции Вселенной и другие.

В связи с тем, что многие проблемы квантования гравитации остаются нерешенными, имеет смысл рассмотреть еще один подход, также достаточно радикальный, основанный на формализме расширенного фазового пространства. Хотя этот поход не претендует на роль полной, окончательной квантовой теории гравитации, он предлагает решение некоторых из обсуждаемых выше проблем. Этот подход мы рассмотрим в последующих главах.

# ГЛАВА 2.
# ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА
# В РАСШИРЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы изложим способ построения гамильтоновой динамики системы со связями, альтернативный методу, предложенному Дираком. Как мы увидим, предлагаемый способ позволяет решить ряд проблем, присущих дираковскому методу.

## *2.1. Гамильтониан и гамильтонова система уравнений в расширенном фазовом пространстве*

**2.1.1. Калибровочные условия в дифференциальной форме и построение гамильтониана.** При построении гамильтоновой динамики мы будем исходить из следующих положений:

1. Все реалистические физические теории были первоначально сформулированы в лагранжевой форме, иначе говоря, лагранжева формулировка является исходной формулировкой физической теории.

2. В современной квантовой теории поля, имея в виду работу с континуальными интегралами, которые в случае калибровочных полей являются расходящимися, калибровочно-инвариантное действие исходной теории заменяется эффективным действием, содержащим слагаемые, нарушающие калибровочную инвариантность, в том числе член, фиксирующий калибровку (см. (1.26) – (1.28)).

В разделе 1.2.1 говорилось, что в случае теории со связями нельзя построить функцию Гамильтона по обычному правилу (1.1), поскольку часть обобщенных скоростей не могут быть выражены через сопряженные импульсы. К правилу (1.1) можно было бы вернуться, если только скомпенсировать слагаемое $\pi_\alpha \dot{\lambda}^\alpha$ соответствующим членом в эффективном лагранжиане.

Рассмотрим простую модель с конечным числом степеней свободы, действие для которой имеет вид:

$$S_{(grav)} = \int dt \left[ \frac{1}{2} g_{ab}\left(N,q\right)\dot{q}^a \dot{q}^b - U\left(N,q\right) \right]. \tag{2.1}$$

Здесь $q^a$ – физические степени свободы, $N$ – единственная калибровочная степень свободы (это может быть функция хода, компонента $g_{00}$ метрического тензора или другая переменная, которую можно выразить через функцию хода или $g_{00}$), $g_{ab}$ – метрика конфигурационного пространства системы, которая зависит не только от физических степеней свободы, но и от калибровочной, подобно метрике суперпространства Де Витта, которая зависит от функции хода [36]. Действие для многих космологических моделей сводится к виду (2.1).

Мы должны задать, как $N$ связана с физическими степенями свободы, т. е. задать калибровочное условие,

$$N = f\left(q\right). \tag{2.2}$$

Мы можем записать это условие в дифференциальной форме, взяв производную от (2.2) по времени, поскольку в гамильтоновой динамике время всегда имеет выделенный характер:

$$\dot{N} = \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a. \tag{2.3}$$

Член, фиксирующий калибровку, (1.27), для данной модели будет иметь вид

$$S_{(gauge)} = \int dt \lambda \left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a \right). \tag{2.4}$$

Таким образом, мы вводим в эффективный лагранжиан недостающую обобщенную скорость $\dot{N}$. Если $N$ – функция хода, из (1.35) следует, что инфинитезимальные преобразования для нее и физических переменных $q^a$ будут иметь вид (ср. (1.37)):

$$\delta N = -\dot{N}\eta - N\dot{\eta}; \quad \delta q^a = -\dot{q}^a \eta. \tag{2.5}$$

Это определяет вид духового действия. В итоге,

$$\begin{aligned} S_{(ghost)} &= i\int dt \bar{\Theta} \frac{d}{dt}\left( \dot{N}\Theta + N\dot{\Theta} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a\Theta \right) = \\ &= -i\int dt \left[ \dot{\bar{\Theta}}\left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a \right)\Theta + \dot{\bar{\Theta}} N \dot{\Theta} \right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $\Theta$, $\bar{\Theta}$ – духи Фаддеева – Попова. Имеет смысл переопределить духовые переменные,

$$\Theta \to \theta; \quad -i\bar{\Theta} \to \bar{\theta}, \tag{2.7}$$

чтобы духовая часть действия была действительной при условии действительности переменных $\theta$, $\bar{\theta}$. Тогда полное действие будет иметь вид:

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} g_{ab}(N,q)\dot{q}^a\dot{q}^b - U(N,q) + \pi\left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a \right) + \dot{\bar{\theta}} N \dot{\theta} \right]. \tag{2.8}$$

Здесь

$$\pi = \lambda + \dot{\bar{\theta}}\theta \tag{2.9}$$

– обобщенный импульс, сопряженный калибровочной переменной $N$. Выпишем остальные импульсы:

$$p_a = g_{ab}\dot{q}^b - \pi \frac{\partial f}{\partial q^a}; \tag{2.10}$$

$$\bar{\mathcal{P}} = N\dot{\bar{\theta}}; \quad \mathcal{P} = N\dot{\theta} \tag{2.11}$$

Теперь мы можем построить гамильтониан в расширенн6ом фазовом пространстве в соответствии с обычным правилом:

$$\begin{aligned} H &= p_a\dot{q}^a + \pi\dot{N} + \bar{\mathcal{P}}\dot{\theta} + \dot{\bar{\theta}}\mathcal{P} - L = \\ &= g^{ab}\left( \frac{1}{2}p_a p_b + \pi p_a \frac{\partial f}{\partial q^b} + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial f}{\partial q^b} \right) + \frac{1}{N}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + U(N,q) = \\ &= \frac{1}{2}g^{ab}\left( p_a + \pi\frac{\partial f}{\partial q^a} \right)\left( p_b + \pi\frac{\partial f}{\partial q^b} \right) + \frac{1}{N}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + U(N,q). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Гамильтониан (2.12) можно также записать в виде:

$$H = \frac{1}{2} G^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta + \frac{1}{N} \bar{\mathcal{P}} \mathcal{P} + U(Q), \tag{2.13}$$

где

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial f}{\partial q_a} & \frac{\partial f}{\partial q_a} \\ \frac{\partial f}{\partial q_a} & g^{ab} \end{pmatrix}; \quad Q^\alpha = \left(N, q^a\right); \quad P_\alpha = \left(\pi, p_a\right). \tag{2.14}$$

Таким же образом можно поступить и в полной гравитационной теории. Рассмотрим калибровочные условия в общем виде

$$f^\mu\left(g_{\nu\lambda}\right) = 0, \tag{2.15}$$

причем (2.15) мы будем рассматривать как символическую запись, которая может включать операторы, действующие на компоненты метрического тензора. Запишем дифференциальную форму условий (2.15), которая вводит в эффективный лагранжиан недостающие скорости $\dot{g}_{0\mu}$ :

$$\frac{d}{dt} f^\mu\left(g_{\nu\lambda}\right) = 0; \quad \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \dot{g}_{\nu\lambda} = 0, \tag{2.16}$$

или, более подробно,

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial g_{00}} \dot{g}_{00} + 2 \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{0i}} \dot{g}_{0i} + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{ij}} \dot{g}_{ij} = 0, \tag{2.17}$$

так что мы видим присутствие здесь скоростей $\dot{g}_{00}$ и $\dot{g}_{0i}$. Член, фиксирующий калибровку, (аналог (2.4)) будет иметь вид:

$$S_{(gauge)} = \int d^4 x \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \dot{g}_{\nu\lambda}. \tag{2.18}$$

Теперь, используя (1.35), запишем действие для духов:

$$S_{(ghost)} = -\int d^4x \bar{\theta}_\mu \frac{d}{dt}\left[ \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \left( \theta^\rho \partial_\rho g_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho}\partial_\lambda \theta^\rho + g_{\lambda\rho}\partial_\nu \theta^\rho \right) \right] =$$
$$= \int d^4x \dot{\bar{\theta}}_\mu \left[ \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \dot{g}_{\nu\lambda}\theta^0 + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \left( \theta^i \partial_i g_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho}\partial_\lambda \theta^\rho + g_{\lambda\rho}\partial_\nu \theta^\rho \right) \right]. \quad (2.19)$$

И полное действие будет иметь вид (ср. (2.8)):

$$S = S_{(grav)} + \int d^4x \left[ \Lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \dot{g}_{\nu\lambda} + \dot{\bar{\theta}}_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \left( \theta^i \partial_i g_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho}\partial_\lambda \theta^\rho + g_{\lambda\rho}\partial_\nu \theta^\rho \right) \right], \quad (2.20)$$

где $\Lambda_\mu = \lambda_\mu + \dot{\bar{\theta}}_\mu \theta^0$. Импульсы, сопряженные калибровочным степеням свободы $g_{0\mu}$, есть

$$\pi^{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{0\mu}} + \Lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial g_{0\mu}}. \quad (2.21)$$

Лагранжиан полной теории гравитации $\mathcal{L}_{(grav)}$ линеен по обобщенным скоростям $\dot{g}_{0\mu}$ [4], поэтому производные $\frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{0\mu}}$ не содержит этих скоростей. Мы предполагаем, что калибровочные условия (2.15) выбирается в таком виде, что $\frac{\partial f^\nu}{\partial g_{0\mu}}$ также не содержит $\dot{g}_{0\mu}$ (т. е. дифференциальная форма этих условий не может быть квадратична по скоростям и т. д.). В таком случае слагаемое $\pi^{0\mu}\dot{g}_{0\mu}$ в гамильтониане сократится подобно тому как $\pi\dot{N}$ сократилось в (2.12). При этом допустимые калибровочные условия составляют достаточно широкий класс калибровок, и мы приходим к тому, что гамильтониан для теории со связями может быть построен по обычному правилу (1.1), что и для невырожденных (некалибровочных) теорий.

**2.1.2. Расширенная система лагранжевых уравнений и система гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве.** В разделе 1.3.2 говорилось о расширенной системе лагранжевых уравнений, получаемых варьированием эффективного действия. Для модели, описываемой действием (2.8), мы будем иметь следующие уравнения:

1. Уравнения движения для физических степеней свободы, содержащие их вторые производные по времени:

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c + \frac{\partial g_{ab}}{\partial N}\dot{N}\dot{q}^b + \frac{\partial U}{\partial q^a} - \dot{\pi}\frac{\partial f}{\partial q^a} = 0. \quad (2.22)$$

2. Уравнение связи:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial N}\dot{q}^a\dot{q}^b - \frac{\partial U}{\partial N} - \dot{\pi} + \dot{\bar{\theta}}\dot{\theta} = 0. \quad (2.23)$$

3. Уравнения для духов:

$$\ddot{\bar{\theta}}N + \dot{\bar{\theta}}\dot{N} = 0; \quad (2.24)$$

$$N\ddot{\theta} + \dot{N}\dot{\theta} = 0. \quad (2.25)$$

4. Калибровочное условие (получается формальным варьированием по импульсу $\pi$, который в то же время играет роль лагранжева множителя при калибровочном условии):

$$\dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a = 0. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.22) содержит дополнительное слагаемое (последнее слагаемое в левой части) по сравнению со слагаемыми, которые получаются из чисто гравитационного действия исходной теории (2.1). Оно получается в результате варьирования члена, фиксирующего калибровку, и соответствует слагаемому $T^{\nu}_{\mu(gauge)}$ в правой части уравнения (1.29). Духовая часть действия в данном случае не зависит от физических степеней свободы и поэтому не дает вклада в (2.22), который соответствовал бы $T^{\nu}_{\mu(ghost)}$ в правой части уравнения (1.29). В уравнение (2.23) дают вклад и часть действия, фиксирующего калибровку, и действие для духов. Поэтому в этом уравнении появляются два дополнительных слагаемых – третий и четвертый члены.

Теперь мы перейдем к гамильтоновой динамике, которая вытекает из гамильтониана в расширенном фазовом пространстве (2.12).

1. Уравнения для физических степеней свободы

$\dot{q}^a = \dfrac{\partial H}{\partial p_a}; \quad \dot{p}_a = -\dfrac{\partial H}{\partial q^a}$:

$$\dot{q}^a = g^{ab}\left(p_b + \pi \frac{\partial f}{\partial q^b}\right); \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_a = &-\frac{\partial g^{bc}}{\partial q^a}\left(\frac{1}{2}p_b p_c + \pi p_b \frac{\partial f}{\partial q^c} + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\partial f}{\partial q^b}\frac{\partial f}{\partial q^c}\right) - \\ &- g^{bc}\left(\pi p_b \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^c} + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b}\frac{\partial f}{\partial q^c} + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\partial f}{\partial q^b}\frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^c}\right) - \frac{\partial U}{\partial q^a}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

2. Калибровочное условие $\dot{N} = \dfrac{\partial H}{\partial \pi}$:

$$\dot{N} = g^{ab}\left(p_a + \pi \frac{\partial f}{\partial q^a}\right)\frac{\partial f}{\partial q^b}. \tag{2.29}$$

3. Уравнение связи $\dot{\pi} = -\dfrac{\partial H}{\partial N}$:

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial g^{ab}}{\partial N}\left(\frac{1}{2}p_a p_b + \pi p_a \frac{\partial f}{\partial q^b} + \frac{1}{2}\pi^2 \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial f}{\partial q^b}\right) + \frac{1}{N^2}\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \frac{\partial U}{\partial N}. \tag{2.30}$$

4. Уравнения для духов

$\dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{\mathcal{P}}}; \quad \dot{\bar{\mathcal{P}}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}; \quad \dot{\bar{\theta}} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathcal{P}}; \quad \dot{\mathcal{P}} = -\dfrac{\partial H}{\partial \bar{\theta}}$:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{N}\mathcal{P}; \tag{2.31}$$

$$\dot{\bar{\mathcal{P}}} = 0; \tag{2.32}$$

$$\dot{\bar{\theta}} = \frac{1}{N}\bar{\mathcal{P}}; \tag{2.33}$$

$$\dot{\mathcal{P}} = 0. \tag{2.34}$$

Обратим внимание, что калибровочное условие (2.29) и уравнение связи (2.30) получают статус гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве. Однако, если уравнение для физических степеней свободы и духом можно свести к уравнениям второго порядка в лагранжевом формализме, уравнения (2.29), (2.30) после подстановки обобщенных импульсов остаются уравнениями первого порядка, эквивалентными (2.26), (2.23). Поэтому теория так и остается теорией со связями, хотя связи модифицируются вследствие наличия в них дополнительных слагаемых.

Можно непосредственно убедиться в том, что гамильтонова система уравнений (2.27) – (2.34) в расширенном фазовом пространстве эквивалентна расширенной лагранжевой системе уравнений (2.22) – (2.26). Гамильтонова система уравнений в расширенном фазовом пространстве была получена для различных космологических моделей (см. работы автора диссертации **[A6,B6]**). В работе автора **[B7]** были получены расширенная лагранжева система уравнений и гамильтонова система уравнений для более сложной сферически-симметричной гравитационной модели, которая является полевой и содержит две гравитационных связи. Во всех этих случаях прямой проверкой была установлена эквивалентность лагранжевой и гамильтоновой систем уравнений.

## *2.2. Канонические преобразования в расширенном фазовом пространстве*

**2.2.1. Канонические преобразования в механике.** Вернемся к вопросу, который был поднят в разделе 1.4.1, о преобразованиях, затрагивающих калибровочные степени свободы. Возможно ли так сформулировать гамильтонову динамику, чтобы преобразования типа (1.33) не были исключением, а имели бы статус канонических преобразований в расширенном фазовом пространстве? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, напомним, что представляют собой канонические преобразования для механической системы без связей [146].

Рассмотрим действие для механической системы, которое подобно действию (2.1), но отсутствует зависимость лагранжиана от переменной $N$:

$$S=\int dt\left[\frac{1}{2}g_{ab}\left(q\right)\dot{q}^{a}\dot{q}^{b}-U\left(q\right)\right]. \qquad (2.35)$$

Перейдем к новым обобщенным координатам

$$q^{a}=v^{a}\left(Q\right), \qquad (2.36)$$

где $v^{a}\left(Q\right)$ – обратимые функции своих аргументов. Действие (2.35) после преобразования (2.36) примет вид:

$$S=\int dt\left[\frac{1}{2}g_{cd}\left(Q\right)\frac{\partial v^{c}}{\partial Q^{a}}\frac{\partial v^{d}}{\partial Q^{b}}\dot{Q}^{a}\dot{Q}^{b}-U\left(Q\right)\right]. \qquad (2.37)$$

Новые импульсы $\left\{P_{a}\right\}$ выражаются через старые импульсы $\left\{p_{a}\right\}$ с помощью соотношений

$$P_{a}=p_{b}\frac{\partial v^{b}}{\partial Q^{a}}. \qquad (2.38)$$

Нетрудно убедиться, что преобразование (2.36), (2.38) является каноническим, причем производящая функция зависит от новых координат и старых импульсов:

$$\Phi\left(Q,p\right)=-p_{a}v^{a}\left(Q\right). \qquad (2.39)$$

Тогда уравнения

$$q^{a}=-\frac{\partial\Phi}{\partial p_{a}};\quad P_{a}=-\frac{\partial\Phi}{\partial Q^{a}} \qquad (2.40)$$

в точности воспроизводят преобразования (2.36), (2.38). Чтобы проверить, что данные преобразования являются каноническими, достаточно убедиться в том, что при переходе к новым переменным сохраняют свой вид скобки Пуассона:

$$\left\{Q^{a},Q^{b}\right\}=0;\quad \left\{P_{a},P_{b}\right\}=0;\quad \left\{Q^{a},P_{b}\right\}=\delta_{b}^{a}. \qquad (2.41)$$

Приняв этот пример за образец, рассмотрим преобразования для системы со связями, затрагивающие калибровочные степени свободы.

**2.2.2. Канонические преобразования для системы со связями в расширенном фазовом пространстве.** Вернемся к модели с конечным числом степеней свободы, рассмотренной в разделе 2.1.1, описываемой действием (2.8). Перейдем к новой калибровочной переменной

$$N = v\left(\tilde{N}, q\right), \tag{2.42}$$

при этом физические и духовые степени свободы оставляем неизменными:

$$q^a = \tilde{q}^a; \quad \theta = \tilde{\theta}; \quad \bar{\theta} = \tilde{\bar{\theta}}. \tag{2.43}$$

Мы видим, что данные преобразования являются аналогом преобразований из класса (1.33), который включат переход от компонент метрического тензора к переменным АДМ. Действительно, в обоих случаях преобразованию подвергаются только калибровочные переменные, в то время как остальные степени свободы остаются неизменными.

Запишем действие (2.8) после преобразования (2.42):

$$\begin{aligned} S = \int dt \Bigg[ & \frac{1}{2} g_{ab}\left(\tilde{N}, q\right) \dot{q}^a \dot{q}^b - U\left(\tilde{N}, q\right) + \\ & + \pi \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{N}} \dot{\tilde{N}} + \frac{\partial v}{\partial q^a} \dot{q}^a - \frac{\partial f}{\partial q^a} \dot{q}^a \right) + v\left(\tilde{N}, q\right) \dot{\bar{\theta}} \dot{\theta} \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Выпишем новые импульсы:

$$\tilde{p}_a = g_{ab} \dot{q}^b + \pi \frac{\partial v}{\partial q^a} - \pi \frac{\partial f}{\partial q^a} = p_a + \pi \frac{\partial v}{\partial q^a}; \tag{2.45}$$

$$\tilde{\pi} = \pi \frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}; \tag{2.46}$$

$$\tilde{\bar{\mathcal{P}}} = v\left(\tilde{N}, q\right) \dot{\bar{\theta}} = \bar{\mathcal{P}}; \tag{2.47}$$

$$\tilde{\mathcal{P}} = v\left(\tilde{N}, q\right) \dot{\theta} = \mathcal{P}. \tag{2.48}$$

Обратим внимание, что импульсы, сопряженные физическим степеням свободы, изменяются, в отличие от случая, рассмотренного в разделе

1.4.1. Изменение импульсов происходит из-за того, что мы теперь исходим из эффективного действия, в котором в результате замены (2.42) изменился член, фиксирующий калибровку.

Теперь мы можем доказать, что преобразования (2.42), (2.43), (2.45) – (2.48) являются каноническими в расширенном фазовом пространстве. Выберем производящую функцию зависящей от новых координат и старых импульсов, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе:

$$\Phi\left(\tilde{N},\tilde{q},\tilde{\bar{\theta}},\tilde{\theta},\pi,p,\bar{\mathcal{P}},\mathcal{P}\right)=-\pi v\left(\tilde{N},\tilde{q}\right)-p_a\tilde{q}^a-\bar{\mathcal{P}}\tilde{\theta}-\tilde{\bar{\theta}}\mathcal{P}. \quad (2.49)$$

Производящая функция имеет ту же форму, что и (2.39). Соотношения

$$N=-\frac{\partial\Phi}{\partial\pi};\quad q^a=-\frac{\partial\Phi}{\partial p_a};\quad \theta=-\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\mathcal{P}}};\quad \bar{\theta}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{P}}; \quad (2.50)$$

$$\tilde{p}_a=-\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{q}^a};\quad \tilde{\pi}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{N}};\quad \tilde{\bar{\mathcal{P}}}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\bar{\theta}}};\quad \tilde{\mathcal{P}}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\theta}} \quad (2.51)$$

в точности воспроизводят соотношения (2.42), (2.43), (2.45) – (2.48). Можно также непосредственно проверить, что скобки Пуассона между всеми переменными, которые входят в расширенное фазовое пространство, сохраняют свою каноническую форму после рассмотренного преобразования.

**2.2.3. Канонические преобразования в расширенном фазовом пространстве для полной гравитационной теории.** Теперь мы покажем для полной теории гравитации, что преобразования калибровочных переменных, связанных между собой соотношениями вида (1.33), являются каноническими.

В разделе 2.1.1 мы рассматривали калибровочные условия общего вида (2.15) для полной теории гравитации и увидели, что производные по времени от компонент метрического тензора входят во второе слагаемое в эффективном действии (2.20) в дополнение к тем, которые входят в чисто гравитационную часть. Это обстоятельство, как мы увидим, как раз и обеспечивает то, что преобразования являются каноническими.

Итак, введем новые переменные

$$g_{0\mu} = v_\mu\left(N_\nu, g_{ij}\right); \quad g_{ij} = \gamma_{ij}; \quad \theta^\mu = \tilde{\theta}^\mu; \quad \overline{\theta}_\mu = \tilde{\overline{\theta}}_\mu \,. \tag{2.52}$$

Это преобразование является обратным по отношению к (1.33) и затрагивает только компоненты метрического тензора $g_{0\mu}$ (калибровочные степени свободы). Вернемся к действию (2.20) и выпишем импульсы, сопряженные старым переменным:

$$\pi^{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{0\mu}} + \Lambda_\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial g_{0\mu}}; \tag{2.53}$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{ij}} + \Lambda_\lambda \frac{\partial f^\lambda}{\partial g_{ij}}. \tag{2.54}$$

Теперь перепишем действие через новые переменные:

$$\begin{aligned}
S = \int d^4x \Bigg[ & \mathcal{L}'_{(grav)} + \Lambda_\mu \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{00}} \frac{\partial v_0}{\partial N_\nu} \dot{N}_\nu + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{00}} \frac{\partial v_0}{\partial g_{ij}} \dot{g}_{ij} + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{0i}} \frac{\partial v_i}{\partial N_\nu} \dot{N}_\nu + \right. \\
& \left. + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{0k}} \frac{\partial v_k}{\partial g_{ij}} \dot{g}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial g_{ij}} \dot{g}_{ij} \right) + \\
& + \dot{\overline{\theta}}_\mu \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{00}} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial N_\nu} \partial_i N_\nu \theta^i + \frac{\partial v_0}{\partial g_{ij}} \partial_k g_{ij} \theta^k + 2 v_\nu \left(N_\lambda, g_{ij}\right) \dot{\theta}^\nu \right] + \right. \\
& + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{0i}} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial N_\nu} \partial_j N_\nu \theta^j + \frac{\partial v_i}{\partial g_{jk}} \partial_l g_{jk} \theta^l + \right. \\
& \qquad \left. + v_\nu\left(N_\lambda, g_{jk}\right) \partial_i \theta^\nu + v_i\left(N_\lambda, g_{jk}\right) \dot{\theta}^0 + g_{ij} \dot{\theta}^j \right] + \\
& + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{ij}} \Big[ \partial_k g_{ij} \theta^k + v_i\left(N_\lambda, g_{kl}\right) \partial_j \theta^0 + g_{ik} \partial_j \theta^k + \\
& \qquad \left. \left. + v_j\left(N_\lambda, g_{kl}\right) \partial_i \theta^0 + g_{jk} \partial_i \theta^k \Big] \right) \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Введем новые импульсы:

$$\Pi^{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{(grav)}}{\partial \dot{N}_\mu} + \Lambda_\nu \left( \frac{\partial f^\nu}{\partial g_{00}} \frac{\partial v_0}{\partial N_\mu} + \frac{\partial f^\nu}{\partial g_{0i}} \frac{\partial v_i}{\partial N_\mu} \right); \tag{2.56}$$

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{ij}} + \Lambda_\mu \left( \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{00}} \frac{\partial v_0}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{0k}} \frac{\partial v_k}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial g_{ij}} \right). \tag{2.57}$$

Найдем соотношения между старыми и новыми импульсами:

$$\Pi^{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_{(grav)}}{\partial \dot{N}_\mu} + \left( \pi^{0\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{0\nu}} \right) \frac{\partial v_\nu}{\partial N_\mu}; \tag{2.58}$$

$$\Pi^{ij} = \pi^{ij} + \left( \pi^{0\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{0\nu}} \right) \frac{\partial v_\mu}{\partial g_{ij}}. \tag{2.59}$$

Импульсы, сопряженные духовым переменным, как можно проверить, остаются неизменными при данном преобразовании:

$$\tilde{\mathcal{P}}^\mu = \mathcal{P}^\mu; \quad \tilde{\bar{\mathcal{P}}}_\mu = \bar{\mathcal{P}}_\mu. \tag{2.60}$$

Поскольку любой лагранжиан определен с точностью до полных производных, мы можем этим воспользоваться для того, чтобы изменить плотность гравитационного лагранжиана исходной теории таким образом, чтобы она не зависела от обобщенных скоростей $\dot{g}_{0\mu}$, при этом первичные связи исходной теории принимают вид $\pi^{0\mu} = 0$. Именно так поступил Дирак [4], чтобы упростить вычисления. Подобное изменение плотности лагранжиана было сделано в работе АДМ [5], где из плотности лагранжиана были исключены 3-дивергенция и полная производная по времени. Таким образом,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(grav)}}{\partial \dot{g}_{0\nu}} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}'_{(grav)}}{\partial \dot{N}_\mu} = 0. \tag{2.61}$$

Тогда соотношения (2.58), (2.59) упрощаются и принимают вид

$$\Pi^{0\mu} = \pi^{0\nu} \frac{\partial v_\nu}{\partial N_\mu}; \tag{2.62}$$

$$\Pi^{ij} = \pi^{ij} + \pi^{0\mu} \frac{\partial v_\mu}{\partial g_{ij}}. \tag{2.63}$$

Теперь мы запишем производящую функцию, которая вновь зависит от новых координат и старых импульсов и имеет ту же структуру, что и в случае системы без связей (2.39), и для модели с конечным числом степеней свободы (2.49).

$$\begin{aligned} &\Phi\left(N_\mu, \gamma_{ij}, \tilde{\theta}^\mu, \tilde{\bar{\theta}}_\mu, \pi^{0\mu}, \pi^{ij}, \bar{\mathcal{P}}_\mu, \mathcal{P}^\mu\right) = \\ &= -\pi^{0\mu} v_\mu\left(N_\nu, \gamma_{ij}\right) - \pi^{ij}\gamma_{ij} - \bar{\mathcal{P}}_\mu \tilde{\theta}^\mu - \tilde{\bar{\theta}}_\mu \mathcal{P}^\mu. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Тогда имеют место следующие соотношения,

$$g_{0\mu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \pi^{0\mu}}; \quad g_{ij} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \pi^{ij}}; \tag{2.65}$$

$$\theta^\mu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\mathcal{P}}_\mu}; \quad \bar{\theta}_\mu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{P}^\mu}; \tag{2.66}$$

$$\Pi^{0\mu} = -\frac{\partial \Phi}{\partial N_\mu}; \quad \Pi^{ij} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ij}}; \tag{2.67}$$

$$\tilde{\bar{\mathcal{P}}}_\mu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\theta}^\mu}; \quad \tilde{\mathcal{P}}^\mu = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\bar{\theta}}_\mu}, \tag{2.68}$$

которые в точности дают преобразования

$$g_{0\mu} = v_\mu\left(N_\nu, \gamma_{ij}\right); \quad g_{ij} = \gamma_{ij}; \tag{2.69}$$

$$\theta^\mu = \tilde{\theta}^\mu; \quad \bar{\theta}_\mu = \tilde{\bar{\theta}}_\mu; \tag{2.70}$$

$$\Pi^{0\mu} = \pi^{0\nu} \frac{\partial v_\nu}{\partial N_\mu}; \quad \Pi^{ij} = \pi^{ij} + \pi^{0\mu} \frac{\partial v_\mu}{\partial g_{ij}}; \tag{2.71}$$

$$\tilde{\bar{\mathcal{P}}}_\mu = \bar{\mathcal{P}}_\mu; \quad \tilde{\mathcal{P}}^\mu = \mathcal{P}^\mu. \tag{2.72}$$

Для того, чтобы вычислить скобки Пуассона, понадобятся два вспомогательных соотношения. Первое соотношение можно получить, дифференцируя первую из формул в (1.33) по $g_{ij}$:

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{0\nu}} \frac{\partial v_\nu}{\partial g_{ij}} = 0\,. \tag{2.73}$$

Дифференцируя ту же формулу по $N_\nu$, приходим к соотношению

$$\delta_\mu^\nu - \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{0\lambda}} \frac{\partial v_\lambda}{\partial N_\nu} = 0\,. \tag{2.74}$$

Вычисление скобок Пуассона (1.34), как мы помним, приводит к противоречию в рамках формализма Дирака (к так называемой "загадке неканоничности", "non-canonicity puzzle", [59-63]). Вычислим заново ту же скобку в формализме расширенного фазового пространства:

$$\begin{aligned} \left\{N_\mu, \Pi^{ij}\right\}\Big|_{g_{\nu\lambda},\, p^{\rho\sigma}} &= \frac{\partial N_\mu}{\partial g_{0\nu}} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial \pi^{0\nu}} + \frac{\partial N_\mu}{\partial g_{kl}} \frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial \pi^{kl}} = \\ &= \left\{ V_\mu\left(g_{0\nu}, g_{kl}\right),\ \pi^{ij} + \pi^{0\lambda} \frac{\partial v_\lambda}{\partial g_{ij}} \right\} = \\ &= \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{0\rho}} \frac{\partial v_\lambda}{\partial g_{ij}} \delta_\rho^\lambda + \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{kl}} \frac{1}{2}\left(\delta_k^i \delta_l^j + \delta_l^i \delta_k^j\right) = \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{0\lambda}} \frac{\partial v_\lambda}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{ij}} = 0. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Как и следовало ожидать, мы получили нуль. Приведем еще один пример вычисления скобок Пуассона:

$$\begin{aligned} \left\{N_\mu, \Pi^{0\nu}\right\}\Big|_{g_{\lambda\rho},\, p^{\sigma\tau}} &= \frac{\partial N_\mu}{\partial g_{0\lambda}} \frac{\partial \Pi^{0\nu}}{\partial \pi^{0\lambda}} = \left\{ V_\mu\left(g_{0\rho}, g_{ij}\right),\ \pi^{0\lambda} \frac{\partial v_\lambda}{\partial N_\nu} \right\} = \\ &= \frac{\partial V_\mu}{\partial g_{0\lambda}} \frac{\partial v_\lambda}{\partial N_\nu} = \delta_\mu^\nu. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Остальные скобки Пуассона проверяются аналогично. Это доказывает, что в формализме расширенного фазового пространства калибровочные степени свободы получают статус канонических переменных. Доказательство того, что преобразования в расширенном фазовом пространстве, затрагивающие калибровочные степени свободы, являются каноническими, было получено в работах автора **[B3, B4]**.

## *2.3. БРСТ-заряд как генератор калибровочных преобразований в расширенном фазовом пространстве*

**2.3.1. БРСТ-преобразования в теориях Янга – Миллса и в гравитации.** Как известно, введение в эффективное действие дополнительных слагаемых – члена, фиксирующего калибровку, и духового действия – нарушает калибровочную инвариантность исходной теории. Однако эффективное действие обладает остаточной симметрией, впервые обнаруженной Бекки, Руэ, Стора и Тютиным и называемой БРСТ-симметрией [54,55,147]. Эта остаточная симметрия является глобальной, параметром преобразований является грассманова константа $\bar{\varepsilon}$. БРСТ-преобразования для полевых переменных (компонент поля Янга – Миллса, компонент метрического тензора) в лагранжевом формализме совпадают с калибровочными преобразованиями, в которых калибровочный параметр заменяется произведением духового поля на константу $\bar{\varepsilon}$, например, для гравитации $\eta^{\mu}=\theta^{\mu}\bar{\varepsilon}$,

$$\delta g_{\mu\nu}=-\left(\theta^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}-g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\theta^{\lambda}-g_{\nu\lambda}\partial_{\mu}\theta^{\lambda}\right)\bar{\varepsilon}\,. \tag{2.77}$$

В гамильтоновом (дираковском) формализме БРСТ-преобразования для полевых переменных совпадают с преобразованиями, генерируемыми связями. Как уже говорилось в разделе 1.3.3, генератор БРСТ-преобразований в подходе БФВ строится в виде ряда (1.31). Если теория является абелевой, разложение (1.31) ограничивается слагаемыми нулевого порядка, которые представляют собой линейную комбинацию дираковских связей, тогда становится очевидным, что БРСТ-преобразования совпадают с преобразованиями, генерируемыми связями. Некоторые космологические модели в силу своей простоты имеют набор коммутирующих связей и дают пример абелевой теории. В [56] аргументируется, что теоретически любой набор некоммутирующих связей может быть преобразован к эквивалентному набору коммутирующих связей, однако на практике, учитывая операторный характер связей в квантовой теории, это возможно сделать в очень редких случаях.

**2.3.2. Построение БРСТ-генератора по теореме Нетер для полей Янга – Миллса.** Обратим внимание, что существует другой способ построить БРСТ-генератор, кроме метода, предложенного БФВ. Мы можем использовать глобальную БРСТ-симметрию и теорему Нетер. В случае полей Янга – Миллса оба метода приводят к одному и тому же результату. Рассмотрим действие Фаддеева – Попова для полей Янга – Миллса в калибровке Лоренца:

$$S_{YM} = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a - i\bar{\theta}_a\partial^\mu D_\mu\theta^a + \pi_a\partial^\mu A^a_\mu\right). \tag{2.78}$$

($D_\mu$ означает ковариантную производную). Известно, что действие (2.78) является БРСТ-инвариантным [147]. Действие содержит вторые производные, и чтобы построить сохраняющуюся величину – БРСТ-заряд, нужно использовать теорему Нетер, обобщенную на случай теорий с высшими производными. В данном случае мы имеем:

$$\Omega_{Noether} = \int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\phi^a\right)}\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\partial_\mu\phi^a\right)}\delta\left(\partial_\mu\phi^a\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\partial_\mu\phi^a\right)}\right)\delta\phi^a\right]. \tag{2.79}$$

$\phi^a$ обозначает полевые либо духовые переменные. Для полей Янга – Миллса это приводит к выражению

$$\Omega_{YM} = \int d^3x\left(-\theta^a D_i p^i_a - i\pi_a\mathcal{P}^a + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{P}}_a g f^a_{bc}\theta^b\theta^c\right). \tag{2.80}$$

Здесь $p^i_a$, $\mathcal{P}^a$, $\bar{\mathcal{P}}_a$ – импульсы, сопряженные $A^a_i$, $\bar{\theta}_a$, $\theta^a$. Выражение (2.80) в точности совпадает с тем, которое получается в соответствии с методом БФВ при условии замены духов БФВ духами Фаддеева – Попова. Однако в теории гравитации ситуация другая.

**2.3.3. БРСТ-заряд в теории гравитации.** В случае гравитации мы имеем дело не с внутренней симметрией, как в теории Янга – Миллса, а с пространственно-временной симметрией. Поэтому мы должны принимать во внимание явную зависимость плотности лагранжиана и элемента объема от пространственно-временных координат. Выражение (2.79) для БРСТ-заряда должно быть заменено следующим:

$$\Omega_{Noether} = \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \phi^a\right)} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \partial_\mu \phi^a\right)} \delta\left(\partial_\mu \phi^a\right) - \right.$$
$$\left. - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \partial_\mu \phi^a\right)} \right) \delta\phi^a + \partial_0\left(\mathcal{L} x^0\right) \right]. \tag{2.81}$$

Вернемся к нашей модели с конечным числом степеней свободы (2.8). Действие запишем следующим образом:

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} g_{ab}\left(N, q\right) \dot{q}^a \dot{q}^b - U\left(N, q\right) + \lambda \left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \dot{q}^a \right) - \right.$$
$$\left. - \bar{\theta} \frac{d}{dt} \left( \dot{N}\theta + N\dot{\theta} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \dot{q}^a \theta \right) \right]. \tag{2.82}$$

Мы записали это действие, как оно выглядело до того, как был введен импульс $\pi$, сопряженный калибровочной переменной $N$. Однако это действие, как можно проверить, не является БРСТ-инвариантным, в отличии от действия для полей Янга – Миллса (2.78). Тем не менее, БРСТ-инвариантность действия можно восстановить, если добавить к нему дополнительное слагаемое

$$S_1 = \int dt \frac{d}{dt} \left[ \bar{\theta} \left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \dot{q}^a \right) \theta \right]. \tag{2.83}$$

Это слагаемое содержит только полную производную и не влияет на уравнения движения. Однако без этого слагаемого не будет выполнено условие теоремы Нетер: чтобы получить правильное выражение для сохраняющейся величины (заряда), действие должно быть инвариантно относительно рассматриваемых преобразований. Подчеркнем, что мы не используем никаких условий на границах временного интервала, которые могли бы обеспечить БРСТ-инвариантность действия без добавления дополнительных слагаемых. (Асимптотические) граничные условия соответствовали бы предположению о наличии асимптотических состояний у гравитирующей системы, что по причинам, изложенным в разделе 1.3.2, мы считаем некорректным. Теорема Нетер дает следующее выражение для БРСТ-заряда:

$$\Omega_{mod} = -H\theta - \pi\mathcal{P}, \tag{2.84}$$

где $H$ – гамильтониан модели в расширенном фазовом пространстве (2.12).

С помощью генератора (2.84) получим преобразование калибровочной переменной $N$:

$$\delta N = \left\{N, \Omega_{mod}\right\}\bar{\varepsilon} = -\frac{\partial H}{\partial \pi}\theta\bar{\varepsilon} - \mathcal{P}\bar{\varepsilon} = -\dot{N}\theta\bar{\varepsilon} - N\dot{\theta}\bar{\varepsilon}. \tag{2.85}$$

Здесь было использовано уравнение $\dot{N} = \dfrac{\partial H}{\partial \pi}$, которое, напомним, в формализме расширенного фазового пространства имеет статус одного из уравнений Гамильтона, и определение духового импульса (2.11). Заменяя $\theta\bar{\varepsilon}$ параметром $\eta$, мы получаем правильное выражение (1.37) для $\delta N$. Можно проверить, что для всех остальных переменных генератор (2.84) также дает правильные БРСТ-преобразования.

Обратимся к исследованию более сложной модели. Рассмотрим обобщенную сферически-симметричную гравитационную модель, для которой квадрат пространственно-временного интервала имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[-N^2(t,r) + \left(N^r(t,r)\right)^2 V^2(t,r)\right]dt^2 \\ &+ 2N^r(t,r)V^2(t,r)dtdr + V^2(t,r)dr^2 + W^2(t,r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{2.86}$$

Здесь $N^r = N^1$ – единственная компонента вектора сдвига. Модель имеет две связи (гамильтонову и одну импульсную связь), и поэтому лучше имитирует полную теорию гравитации.

Выпишем по отдельности фиксирующий калибровку член и духовую часть действия:

$$S_{(gauge)} = \int dt \int_0^\infty dr \left[ \lambda_0 \left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial V}\dot{V} - \frac{\partial f}{\partial W}\dot{W} \right) + \lambda_r \left( \dot{N}^r - \frac{\partial f^r}{\partial V}\dot{V} - \frac{\partial f^r}{\partial W}\dot{W} \right) \right]; \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned} S_{(ghost)} = \int dt \int_0^\infty dr \Bigg[ \bar{\theta}_0 \frac{d}{dt} \Bigg( & -\dot{N}\theta^0 - N'\theta^r - N\dot{\theta}^0 + NN^r \left(\theta^0\right)' - \\ & -\frac{\partial f}{\partial V}\left[ -\dot{V}\theta^0 - V'\theta^r - V\left(\theta^r\right)' - VN^r\left(\theta^0\right)' \right] - \frac{\partial f}{\partial W}\left[ -\dot{W}\theta^0 - W'\theta^r \right] \Bigg) + \\ & + \bar{\theta}_r \frac{d}{dt}\Bigg( -\dot{N}^r\theta^0 - \left(N^r\right)'\theta^r - N^r\dot{\theta}^0 - \dot{\theta}^r + N^r\left(\theta^r\right)' + \frac{N^2}{V^2}\left(\theta^0\right)' + \left(N^r\right)^2\left(\theta^0\right)' - \\ & -\frac{\partial f^r}{\partial V}\left[ -\dot{V}\theta^0 - V'\theta^r - V\left(\theta^r\right)' - VN^r\left(\theta^0\right)' \right] - \frac{\partial f^r}{\partial W}\left[ -\dot{W}\theta^0 - W'\theta^r \right] \Bigg) \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Сумма этих членов неинвариантна относительно БРСТ-преобразований. Гравитационная часть действия инвариантна, поскольку БРСТ-преобразования для гравитационных переменных совпадают с калибровочными, и гравитационная часть действия калибровочно-инвариантна. Как и в случае модели с конечным числом степеней свободы, чтобы обеспечить БРСТ-инвариантность полного действия, к нему нужно добавить следующие слагаемые, содержащие полные производные и не влияющие на уравнения движения:

$$S_2 = \int dt \int_0^\infty dr \left( \frac{d}{dt} \left[ \bar{\theta}_0 \left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial V} \dot{V} - \frac{\partial f}{\partial W} \dot{W} \right) \theta^0 \right] + \right.$$

$$+ \frac{d}{dr} \left[ \bar{\theta}_0 \left( \dot{N} - \frac{\partial f}{\partial V} \dot{V} - \frac{\partial f}{\partial W} \dot{W} \right) \theta^r \right] + \frac{d}{dt} \left[ \bar{\theta}_r \left( \dot{N}^r - \frac{\partial f^r}{\partial V} \dot{V} - \frac{\partial f^r}{\partial W} \dot{W} \right) \theta^0 \right] +$$

$$\left. + \frac{d}{dr} \left[ \bar{\theta}_r \left( \dot{N}^r - \frac{\partial f^r}{\partial V} \dot{V} - \frac{\partial f^r}{\partial W} \dot{W} \right) \theta^r \right] \right). \tag{2.89}$$

С помощью теоремы Нетер после достаточно длинных вычислений получается следующее выражение для БРСТ-заряда:

$$\Omega_{spher} = \int_0^\infty dr \left[ -\mathcal{H} \theta^0 - P_V V' \theta^r - P_N \frac{\partial f}{\partial V} V' \theta^r - P_{N^r} \frac{\partial f^r}{\partial V} V' \theta^r - P_W W' \theta^r - \right.$$

$$- P_N \frac{\partial f}{\partial W} W' \theta^r - P_{N^r} \frac{\partial f^r}{\partial W} W' \theta^r - P_V V N^r \left( \theta^0 \right)' - P_N \frac{\partial f}{\partial V} V N^r \left( \theta^0 \right)' -$$

$$- P_{N^r} \frac{\partial f^r}{\partial V} V N^r \left( \theta^0 \right)' - P_V V \left( \theta^r \right)' - P_N \frac{\partial f}{\partial V} V \left( \theta^r \right)' - P_{N^r} \frac{\partial f^r}{\partial V} V \left( \theta^r \right)' - \tag{2.90}$$

$$\left. - \bar{P}_{\theta^0} \left( \theta^0 \right)' \theta^r - \bar{P}_{\theta^r} \left( \theta^r \right)' \theta^r - P_N P_{\bar{\theta}_0} - P_{N^r} P_{\bar{\theta}_r} - \frac{N W W' \left( \theta^0 \right)'}{V} \right].$$

Здесь $\mathcal{H}$ – плотность гамильтониана в расширенном фазовом пространстве для сферически-симметричной модели, ее явный вид приведен в работе автора **[B7]**, $P_N$, $P_{N^r}$ $P_V$, $P_W$, $\bar{P}_{\theta^0}$, $\bar{P}_{\theta^r}$, $P_{\bar{\theta}_0}$, $P_{\bar{\theta}_r}$ – импульсы, сопряженные соответствующим переменным. Как мы видим, даже для такой, не самой сложной модели выражение для БРСТ-заряда получается достаточно громоздким. БРСТ-заряд (2.90) генерирует правильные преобразования для гравитационных переменных, которые согласованы с (1.35), а именно,

$$\delta N = \left[ -\dot{N} \theta^0 - N' \theta^r - N \dot{\theta}^0 + N N^r \left( \theta^0 \right)' \right] \bar{\varepsilon}; \tag{2.91}$$

$$\delta N^r = \Big[ -\dot{N}^r\theta^0 - \left(N^r\right)'\theta^r - N^r\dot{\theta}^0 - \dot{\theta}^r + N^r\left(\theta^r\right)' + \\ + \frac{N^2}{V^2}\left(\theta^0\right)' + \left(N^r\right)^2\left(\theta^0\right)' \Big]\bar{\varepsilon}; \tag{2.92}$$

$$\delta V = \left[ -\dot{V}\theta^0 - V'\theta^r - V\left(\theta^r\right)' - VN^r\left(\theta^0\right)' \right]\bar{\varepsilon}\,; \tag{2.93}$$

$$\delta W = \left[ -\dot{W}\theta^0 - W'\theta^r \right]\bar{\varepsilon}\,, \tag{2.94}$$

а также преобразования для духов и лагранжевых множителей:

$$\delta\theta^0 = \left[ \dot{\theta}^0\theta^0 + \left(\theta^0\right)'\theta^r \right]\bar{\varepsilon}\,; \tag{2.95}$$

$$\delta\theta^r = \left[ \dot{\theta}^r\theta^0 + \left(\theta^0\right)'\theta^r \right]\bar{\varepsilon}\,; \tag{2.96}$$

$$\delta\bar{\theta}_0 = -\lambda_0\bar{\varepsilon}\,; \tag{2.97}$$

$$\delta\bar{\theta}_r = -\lambda_r\bar{\varepsilon}\,; \tag{2.98}$$

$$\delta\lambda_0 = 0; \quad \delta\lambda_r = 0\,. \tag{2.99}$$

Например, вычислим (2.91):

$$\delta N = \left\{N, \Omega_{spher}\right\}\bar{\varepsilon} = \frac{\delta\Omega_{spher}}{\delta P_N}\bar{\varepsilon} = \\ = \left[ -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_N}\theta^0 - \frac{\partial f}{\partial V}V'\theta^r - \frac{\partial f}{\partial W}W'\theta^r - \frac{\partial f}{\partial V}VN^r\left(\theta^0\right)' - \frac{\partial f}{\partial V}V\left(\theta^r\right)' - P_{\bar{\theta}_0} \right]\bar{\varepsilon} = \\ = \left[ -\dot{N}\theta^0 - N'\theta^r - N\dot{\theta}^0 + NN^r\left(\theta^0\right)' \right]\bar{\varepsilon}. \tag{2.100}$$

В этом вычислении было использовано одно из уравнений Гамильтона $\dot{N} = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta P_N}$, а также явное выражение для духового импульса $P_{\bar{\theta}_0}$, которое можно получить из эффективного лагранжиана модели.

Можно также получить преобразования импульсов, например, вычисляя скобки Пуассона

$$\delta P_V = \left\{ P_V, \Omega_{spher} \right\} \bar{\varepsilon} . \tag{2.101}$$

Результат можно проверить, вычислив явное выражение для импульса $P_V$ и найдя его преобразование в расширенном фазовом пространстве.

БРСТ-генератор для изотропной модели Вселенной, полученный в соответствии с теоремой Нетер, обсуждается в работах автора **[B3, B8]** и других; получение БРСТ-генератора для обобщенной сферически-симметричной модели рассматривается в работах **[B7, B8]**.

Используя ту же самую схему, можно построить гамильтонову динамику в расширенном фазовом пространстве и БРСТ-заряд по теореме Нетер для полной гравитационной теории. Разумеется, вычисления становятся еще более громоздкими, чем в случае сферически-симметричной модели, но никаких формальных препятствий нет. Член, фиксирующий калибровку и духовое действие запишем в виде (см.(2.18), (2.19)):

$$\begin{gathered} S_{(gauge)} + S_{(ghost)} = \int d^4 x \left( \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \dot{g}_{\nu\lambda} - \right. \\ \left. - \bar{\theta}_\mu \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f^\mu}{\partial g_{\nu\lambda}} \left( \theta^\rho \partial_\rho g_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho} \partial_\lambda \theta^\rho + g_{\lambda\rho} \partial_\nu \theta^\rho \right) \right] \right). \end{gathered} \tag{2.102}$$

Для того, чтобы обеспечить БРСТ-инвариантность полного действия в отсутствие специальных граничных условий, к действию следует добавить слагаемое следующего вида:

$$S_3 = \int d^4 x \partial_\mu \left[ \bar{\theta}_\nu \frac{d}{dt} f^\nu \left( g_{\lambda\rho} \right) \theta^\mu \right]. \tag{2.103}$$

Сравнивая (2.103) с (2.83), (2.89), мы видим, что структура дополнительного слагаемого одинакова во всех трех случаях. В БРСТ-инвариантности эффективного действия для полной теории гравитации с дополнительным членом (2.103) можно убедиться прямой проверкой. Следует ожидать, что в случае полной теории гравитации структура

БРСТ-заряда, построенного в соответствии с теоремой Нетер, будет отличаться от структуры генератора, полученного по алгоритму БФВ.

**2.3.4. О требовании БРСТ-инвариантности физических состояний.** Идея расширенного фазового пространства возникла, как мы знаем, в формализме континуального интегрирования, когда Баталин, Фрадкин и Вилковыский предложили свой метод квантования калибровочных теорий. Однако эта идея наводит на следующую мысль: можно сформулировать правила канонического квантования в расширенном фазовом пространстве, когда операторами заменяются не только обобщенные координаты и импульсы, соответствующие физическим (в дираковском смысле) степеням свободы, но также калибровочные и духовые переменные и сопряженные им импульсы. Все они удовлетворяют квантовым коммутационным соотношениям. Выбирая координатное представление для духов БФВ, произвольный волновой функционал можно представить в виде ряда по духовым переменным:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_\alpha c^\alpha + \Psi_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta + \ldots \qquad (2.104)$$

При этом возникает вопрос, какие из векторов описывают физические состояния. Обычно ответ заключается в том, что это те векторы, которые удовлетворяют условию

$$\Omega_{BFV}\Psi = 0, \qquad (2.105)$$

где $\Omega_{BFV}$ – БРСТ-генератор (1.31), построенный по алгоритму БФВ. Как уже говорилось в разделе 2.3.1, с теоретической точки зрения любой набор некоммутирующих связей может быть преобразован к эквивалентному набору коммутирующих связей, хотя практически это бывает невозможно осуществить. В этом случае все структурные функции первого порядка и выше равны нулю, и разложение БРСТ-генератора (1.31) ограничивается слагаемыми нулевого порядка. Учитывая, что структурные функции нулевого порядка – это дираковские связи, среди которых в случае гравитации присутствует гамильтонова связь (1.7), учитывая также независимость духов БФВ $c^{\alpha}$, мы получаем, что условие (2.105) эквивалентно уравнению Уилера – Де Витта (1.14). При таком подходе получается, что уравнение Уилера – Де Витта есть следствие требования БРСТ-инвариантности физических состояний, а сама БРСТ-инвариантность – аналог калибровочной инвариантности в теориях, где конфигурационное и фазовое пространства расширяются за счет духовых степеней свободы.

Однако здесь мы сталкиваемся с новой проблемой, которая заключается в том, что у нас есть два генератора – один, построенный в соответствии с алгоритмом БФВ, и другой, построенный по теореме Нетер, которые не совпадают друг с другом. Существование этих двух генераторов объясняется тем, что они отвечают БРСТ-преобразованиям в лагранжевом и гамильтоновом (дираковском) формализмах, а те, в свою очередь, соответствуют калибровочным преобразованиям и преобразованиям, генерируемым связями, которые в случае гравитации не совпадают и представляют собой, как уже отмечалось, две разные группы преобразований. Данная проблема обсуждалась в работах автора **[В7, В12]** и других.

Если мы строим гамильтонову динамику в расширенном фазовом пространстве, она обладает рядом преимуществ, о которых уже говорилось: гамильтонова система уравнений полностью эквивалентна лагранжевой, преобразования в расширенном фазовом пространстве, включающие калибровочные степени свободы, являются каноническими, и есть математически корректный способ построить БРСТ-заряд по теореме Нетер, который дает правильные преобразования для всех степеней свободы. Однако из выражений (2.84), (2.90) для модельных случаев видно, что наложение условия $\Omega_{NT}\Psi = 0$, где $\Omega_{NT}$ – БРСТ-заряд, построенный по теореме Нетер, не приведет к уравнению Уилера – Де Витта. Мы видели, что не существует бесспорного способа вывода этого уравнения, поскольку оно либо просто постулируется (как в подходе Дирака), либо выводится из континуального интеграла с асимптотическими граничными условиями, что представляется неоправданным в случае гравитации. Наконец, попытка вывести его из требования БРСТ-инвариантности физических состояний в предлагаемом подходе к построению гамильтоновой динамики в расширенном фазовом пространстве также оказывается несостоятельной.

В этой ситуации должны ли мы по-прежнему считать уравнение Уилера – Де Витта фундаментальным уравнением квантовой гравитации, хотя к этому, по существу, нет никаких оснований, или же попытаться построить квантовую теорию гравитации, рассматривая предложенный здесь формализм в качестве отправной точки? Мы выбираем второй путь, чему будет посвящена следующая глава.

# ГЛАВА 3.
# КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИИ, ОСНОВАННОЕ НА ФОРМАЛИЗМЕ РАСШИРЕННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

## *3.1. Уравнение Шредингера против уравнения Уилера – Де Витта*

**3.1.1. Рождение уравнения Уилера – Де Витта.** В статье "Странное уравнение квантовой гравитации" [32] Ровелли описывает следующим образом, как было найдено уравнение, получившее впоследствии имена Уилера и Де Витта:

> "Однажды в 1965 году у Джона Уилера была двухчасовая остановка между перелетами в аэропорту Роли-Дарэм в Северной Каролине. Он позвонил Брайсу Де Витту, который тогда работал в Университете Северной Каролины в Чепел Хилл, и предложил встретиться в аэропорту во время остановки. Брайс пришел с уравнением Гамильтона – Якоби для общей теории относительности, незадолго до этого опубликованного Ашером Пересом…[9]
>
> Брайс проговорил об идее, что можно повторить то, что Шредингер сделал для атома водорода…[10]
>
> Уилер пришел в чрезвычайное возбуждение (он часто становился восторженным) и объявил, не сходя с этого места, что *уравнение* квантовой гравитации найдено."[11]

Перес в статье, о которой идет речь [148], говорит, что, поскольку гамильтониан гравитационного поля равен нулю в "слабом" смысле (т. е.

---

[9] "One day in 1965, John Wheeler had a two-hour stopover between flights at the Raleigh–Durham airport in North Carolina. He called Bryce DeWitt, then at the University of North Carolina in Chapel Hill, proposing to meet at the airport during the wait. Bryce showed up with the Hamilton–Jacobi equation of general relativity, published by Asher Peres a little earlier…".

[10] "Bryce mumbled the idea of repeating what Schrödinger did for the hydrogen atom…".

[11] "Wheeler got tremendously excited (he was often enthusiastic) and declared on the spot that *the* equation for quantum gravity had been found." [32, p. 1].

он представляет собой линейную комбинацию связей), правая часть уравнения Гамильтона – Якоби

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{3.1}$$

( $q$ – обобщенные координаты) должна быть равна нулю, и функционал $S$ в уравнении (3.1) не должен содержать явной зависимости от времени. Вспоминая о том, что сделал Шредингер для атома водорода, можно сказать, что он формально заменил в уравнении Гамильтона – Якоби производные функционала $S$ (умноженными на $(-i)$) производными волновой функции [149]. Однако нужно иметь в виду, что в левой части уравнения Гамильтона – Якоби, предложенного Пересом, стоит не полный гравитационный гамильтониан (линейная комбинация связей), а только гамильтонова связь (часть полного гамильтониана). Перес аргументирует, что в случае гравитации уравнение Гамильтона – Якоби сводится к гамильтоновой связи.

Де Витт в знаменитой статье [6] вводит уравнение, носящее его имя, просто следуя методу Дирака. Строго говоря, волновая функция Вселенной – решение уравнения Уилера – Де Витта – должна удовлетворять не только этому уравнению, но и трем остальным уравнениям связей, и это подразумевается в формулировке квантовой геометродинамики Уилера – Де Витта, но на практике мне не приходилось встречать работы, где содержалась бы попытка найти решение всех четырех уравнений, поскольку технически это чрезвычайно сложно. На практике большинство авторов ограничиваются моделями с конечным числом степеней свободы, когда в силу симметрии задачи вместо четырех уравнений связи можно рассматривать только одно уравнение Уилера – Де Витта.

Вспомним, что Уилер считал, что волновая функция Вселенной должна зависеть только от геометрии трехмерного пространства, $\mathcal{G}^{(3)}$.

Чтобы выразить эту идею, Уилер записывал уравнение (1.14) в символическом виде [31]:

$$-\frac{\delta^2\Psi}{\left(\delta\mathcal{G}^{(3)}\right)^2}+R^{(3)}\Psi=0\,, \tag{3.2}$$

$R^{(3)}$ – кривизна трехмерного пространства. Де Витт, в свою очередь, указывал в работе [6], что один из способов выразить идею о зависимости волновой функции только от геометрии пространства – это считать, что она зависит от бесконечного дискретного множества геометрических инвариантов, таких как

$$\int\sqrt{\gamma}d^3x;\quad \int\sqrt{\gamma}R^{(3)}d^3x;\quad \int\sqrt{\gamma}\left(R^{(3)}\right)^2d^3x;\quad \ldots$$

Однако реализовать эту идею математически не представляется возможным, и волновая функция Вселенной зависит не от абстрактного понятия 3-геометрии, а от конкретной метрики.

Уравнение Уилера – Де Витта должно (вместе с другими связями) обеспечивать инвариантность относительно преобразований группы диффеоморфизмов, а в случае моделей с конечным числом степеней свободы – относительно той части группы диффеоморфизмов, которые затрагивают преобразования временной координаты. Однако в Главе 1 указывалось, что доказательство этого факта отсутствует. В классической теории, действительно, наличие связей говорит о калибровочной инвариантности теории [150]. Но в квантовой теории все обстоит сложнее. Если уравнение Уилера – Де Витта не обеспечивает калибровочную инвариантность квантовой геометродинамики, оно теряет смысл, который изначально ему приписывался. Идея о том, что оно является фундаментальным уравнением квантовой гравитации, остается гипотезой, не обоснованной теоретически и не подкрепленной экспериментально (в отличии от уравнения Шредингера, которое блестяще объяснило спектр атома водорода). Должны ли мы разделить энтузиазм

Уилера, который он испытывал в 1965 году в аэропорту штата Северная Каролина?

**3.1.2. Уравнение Шредингера и квантовая теория поля.** Уравнение Шредингера принадлежит нерелятивистской квантовой механике, и с первого взгляда кажется, что оно совершенно не подходит на роль основного уравнения квантовой гравитации. Однако квантовая теория поля не может быть полностью отделена от квантовой механики, развитием которой она является. В сущности, первая и наиболее успешная квантовая теория поля – квантовая электродинамика – была основана на теории возмущений, которая строилась аналогично тому, как строилась теория возмущений в нерелятивистской квантовой механике. Основное отличие заключалось в требованиях, которым должны удовлетворять амплитуды состояний, чтобы обеспечить нужные трансформационные свойства при преобразованиях координат и полевых функций [151-153]. Обобщением уравнения Шредингера в квантовой теории поля является уравнение Томонага – Швингера [154].

Уравнение Шредингера было и остается фундаментальным уравнением квантовой теории, и, если уравнение Уилера – Де Витта не выполняет приписываемой ему роли – обеспечения калибровочной инвариантности теории, – возможно, имеет смысл обратиться к уравнению Шредингера как к уравнению для волновой функции Вселенной. При этом мы не станем утверждать, как Уилер, что основное уравнение квантовой гравитации уже найдено. Мы просто исследуем, какие возможности открываются в теории, если заменить уравнение Уилера – Де Витта уравнением Шредингера. Дальнейшее развитие теории может привести к тому, что на уравнение Шредингера будут наложены какие-либо условия, обеспечивающие определенные свойства этого уравнения; основным уравнением квантовой гравитации может стать его обобщение (подобно тому, как в квантовой теории поля его обобщением является уравнение Томонага – Швингера); наконец, основным уравнением квантовой гравитации может стать какое-то другое уравнение, полученное исходя из совершенно новых, сегодня еще неизвестных соображений.

Уравнение Шредингера имеет еще и то преимущество, что существует математически хорошо разработанная процедура его вывода, основы которой заложены еще Фейнманом [155,156]. Эта процедура была обобщена для динамической системы, описываемой квадратичным по скоростям лагранжианом, в работе Ченга [157]. Однако она еще нуждается в дальнейшем обобщении для систем со связями и калибровочным теориям с эффективным действием Фаддеева – Попова. Это обобщение будет представлено в следующем разделе.

Хотя в целом мы отвергаем метод Дирака, и наш подход является альтернативой этому методу, сейчас мы поступаем в соответствии с утверждением Дирака, которое было приведено выше: "Любая динамическая система первым делом должна быть приведена к гамильтоновой форме прежде, чем ее можно было бы проквантовать". В Главе 2 была построена гамильтонова динамика в расширенном фазовом пространстве, и теперь мы можем перейти к процедуре квантования.

**3.1.3. Выбор формы континуального интеграла как исходного объекта для процедуры вывода уравнения Шредингера.** Исходным объектом для вывода уравнения Шредингера в данном подходе является континуальный интеграл с эффективным действием Фаддеева – Попова в лагранжевой форме без асимптотических граничных условий. Отсутствие асимптотических граничных условий было обосновано раньше, учитывая тот факт, что большинство гравитирующих систем не имеют асимптотических состояний. Вывод уравнения Шредингера подразумевает, что в континуальном интеграле используется лагранжева форма действия. Мы знаем, что система уравнений Лагранжа, которая получается из эффективного действия Фаддеева – Попова, полностью эквивалентна системе гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве. Существует два метода квантования калибровочных теорий, в которых используется лагранжева форма эффективного действия – метод Фаддеева – Попова и его обобщение – метод Баталина – Вилковыского, но для гравитации эффективное действие Баталина – Вилковыского совпадает с действием Фаддеева – Попова, поэтому форма континуального интеграла однозначно определена.

Разумеется, проводить вычисления гораздо проще для системы с конечным числом степеней свободы, чем для полевого случая. Вернемся к модели, рассмотренной в разделе 2.1.1, описываемой действием (2.8). Гамильтониан в расширенном фазовом пространстве для данной модели имеет вид (2.12). Заменим обобщенные координаты и импульсы операторами, как это принято делать при каноническом квантовании. В результате мы получим оператор Гамильтона

$$\begin{aligned}\hat{H} = -\frac{1}{2}\Bigg(&\frac{\partial}{\partial q^a} g^{ab} \frac{\partial}{\partial q^b} + \frac{\partial}{\partial q^a} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial q^b}\frac{\partial}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial N} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial}{\partial q^b} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial N} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial f}{\partial q^b}\frac{\partial}{\partial N}\Bigg) - \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + U(N,q).\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Здесь выбран такой порядок операторов, который обеспечивает эрмитовость оператора Гамильтона, однако он соответствует тривиальной мере в континуальном интеграле. Если же мера нетривиальна и равна $\mathcal{M}$, выражение (3.3) следует обобщить и представить в виде

$$\begin{aligned}\hat{H} = -\frac{1}{2\mathcal{M}}\Bigg(&\frac{\partial}{\partial q^a} \mathcal{M} g^{ab} \frac{\partial}{\partial q^b} + \frac{\partial}{\partial q^a} \mathcal{M} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial q^b}\frac{\partial}{\partial N} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{M} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial}{\partial q^b} + \frac{\partial}{\partial N} \mathcal{M} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial f}{\partial q^b}\frac{\partial}{\partial N}\Bigg) - \\ &- \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + U(N,q).\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Именно в таком виде мы получим оператор Гамильтона в результате вывода уравнения Шредингера из континуального интеграла в следующем разделе.

## *3.2. Вывод уравнения Шредингера*

**3.2.1. Вывод уравнения Шредингера для динамической системы без связей.** Как известно, процедура вывода уравнения Шредингера из континуального интеграла была предложена Фейнманом в работе [155]. Рассматривалось изменение волновой функции на малом временном отрезке $\left[t,t'\right]$. Исходным для вывода уравнения Шредингера является соотношение

$$\psi\left(x',t'\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\left(x,x'\right)\right)\psi\left(x,t\right)dx. \tag{3.5}$$

При этом $t'=t+\varepsilon$, $x'=x+z$. Действие на таком временном отрезке аппроксимируется на классической траектории. В работе [155] Фейнман для примера рассматривал частицу во внешнем поле, для которой действие имеет вид

$$S=\int_{t}^{t'}dt\left[\frac{m\dot{x}^2}{2}-V\left(x\right)\right]. \tag{3.6}$$

В этом случае в силу простоты оказывается достаточным аппроксимировать траекторию частицы отрезками прямых, и аппроксимированное действие запишется как

$$S\left(x,x'\right)=\frac{mz^2}{2\varepsilon}-\varepsilon V\left(x'\right). \tag{3.7}$$

Волновая функция в левой и правой части (3.5) раскладывается в ряды, от интегрирования по $x$ переходим к интегрированию по $z$ и вводим нормировочный множитель $\frac{1}{A}$. В результате получаем:

$$\psi(x',t)+\varepsilon\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial t}+\ldots=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mz^2}{2\varepsilon}-\varepsilon V(x')\right)\right]\times$$
$$\times\left[\psi(x',t)-z\frac{\partial\psi(x',t)}{\partial x'}+\frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2\psi(x',t)}{\partial x'^2}-\ldots\right]dz. \quad (3.8)$$

Из последнего соотношение в первом порядке по $\varepsilon$ получается уравнение Шредингера для частицы во внешнем поле, в нулевом порядке получается выражение для нормировочного множителя.

Следующий шаг был сделан Ченгом [157]. Он обобщил вывод уравнения Шредингера на случай динамической системы общего вида, с лагранжианом, квадратичным по скоростям, описываемой действием

$$S=\frac{1}{2}\int_{t}^{t'}dtg_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\ , \quad (3.9)$$

где $g_{ij}(x)$ – метрика конфигурационного пространства системы. Здесь и далее $x$ без верхнего индекса означает всю совокупность обобщенных координат системы. К лагранжиану можно добавить еще потенциальный член, что приведет к появлению соответствующего потенциального слагаемого в уравнении Шредингера.

В данном случае уже недостаточно аппроксимировать траекторию отрезками прямых, так как при этом теряются слагаемые, которые вносят вклад в уравнение Шредингера. Для того, чтобы получить правильный ответ, нужно найти разложение скоростей, а потом и действия по степеням $z^i$. Для этого используется разложение в ряд Тейлора,

$$x^i(t)=x^i(t')-\varepsilon\dot{x}^i(t')+\frac{\varepsilon^2}{2}\ddot{x}^i(t')-\frac{\varepsilon^3}{3!}\dddot{x}^i(t')+\ldots, \quad (3.10)$$

откуда выразим скорость $\dot{x}^i(t')$:

$$\dot{x}^i(t')=\frac{z^i}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\ddot{x}^i(t')-\frac{\varepsilon^2}{3!}\dddot{x}^i(t')+\ldots \quad (3.11)$$

При аппроксимации действия (3.6) мы ограничились первым членом разложения в (3.11). В более общем случае необходимо выразить производные второго и третьего порядков $\ddot{x}^i(t')$, $\dddot{x}^i(t')$ из уравнений движения. Уравнения движения, которые следуют из (3.9), представляют собой уравнения геодезических в конфигурационном пространстве с метрикой $g_{ij}(x)$:

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k, \tag{3.12}$$

где $\Gamma^i_{jk}$ – символы Кристоффеля, построенные по метрике $g_{ij}$. После получения разложения для скоростей ряды подставляются в действие, и экспонента от действия также раскладывается в ряд по степеням $z^i$. Нужно учесть также еще одно обстоятельство. Мера в интеграле (3.5) была выбрана равной 1, что соответствовало решаемой задаче и ожидаемому виду уравнения Шредингера для частицы во внешнем поле, который известен и согласуется с экспериментом.

В общем же случае встает вопрос о том, как аппроксимировать меру на временном отрезке $[t,t']$. Как правило, предполагают, что мера определяется своим значением в единственной точке, $\mu(x,x') = \mu(x)$. Далее меру можно разложить в ряд, подобно тому как была разложена волновая функция в правой части (3.8). После этого все ряды в правой части соотношения, которое обобщает (3.5), перемножаются, и после интегрирования (выполнения так называемых гауссовых квадратур) в первом порядке по $\varepsilon$ получается уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\right) + \frac{\hbar^2}{6}R\psi. \tag{3.13}$$

В этом уравнении $g$ – определитель метрического тензора конфигурационного пространства $g_{ij}$, $R$ – скалярная кривизна, построенная по метрике конфигурационного пространства $g_{ij}$. Дифференциальный оператор, действующий на волновую функцию в правой части (3.13), представляет собой лапласиан, обобщенный на случай криволинейных координат. Обобщенный лапласиан и все уравнение в целом инвариантно относительно замен переменных в конфигурационном пространстве. В нулевом порядке по $\varepsilon$ получается уравнение, которое определяет меру в континуальном интеграле. В данном случае мера $\mu(x)=\sqrt{g(x)}$, так что обобщенный лапласиан автоматически получается эрмитовым. Как мы увидим в следующем разделе, та же самая мера входит в определение скалярного произведения волновых функций в координатном представлении. В следующих разделах постоянная Планка $\hbar$ принята равной 1.

**3.2.2. Мера в континуальном интеграле и в скалярном произведении.** Как известно, к континуальному интегралу можно прийти, начиная с амплитуды перехода и вставляя полные наборы (тождественные операторы):

$$\begin{aligned}&\langle x_N,t_N|x_0,t_0\rangle=\langle x_N|\hat{U}(t_N,t_0)|x_0\rangle=\\&=\langle x_N|\hat{U}(t_N,t_{N-1})\hat{U}(t_{N-1},t_{N-2})\ldots\hat{U}(t_1,t_0)|x_0\rangle=\\&=\int\ldots\int dx_{N-1}dx_{N-2}\ldots dx_1\langle x_N|\hat{U}(t_N,t_{N-1})|x_{N-1}\rangle\times\\&\quad\times\langle x_{N-1}|\hat{U}(t_{N-1},t_{N-2})|x_{N-2}\rangle\ldots\langle x_1|\hat{U}(t_1,t_0)|x_0\rangle,\end{aligned}\tag{3.14}$$

и заменяя каждую из амплитуд перехода экспонентой от действия. Здесь $x_0$ означает всю совокупность обобщенных координат системы в момент времени $t_0$, $x_1$ – всю совокупность координат в момент времени $t_1$ и т. д. В формуле (3.14) мера тривиальна, но если метрика конфигурационного пространства системы зависит от обобщенных координат, как для системы с действием (3.9), то формула (3.14) изменится следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left\langle x_N, t_N \middle| x_0, t_0 \right\rangle = \left\langle x_N \middle| \hat{U}(t_N, t_0) \middle| x_0 \right\rangle = \\&= \left\langle x_N \middle| \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \hat{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) \ldots \hat{U}(t_1, t_0) \middle| x_0 \right\rangle = \\&= \int \ldots \int \sqrt{g(x_{N-1})} dx_{N-1} \sqrt{g(x_{N-2})} dx_{N-2} \ldots \sqrt{g(x_1)} dx_1 \times \\&\quad \times \left\langle x_N \middle| \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \middle| x_{N-1} \right\rangle \left\langle x_{N-1} \middle| \hat{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) \middle| x_{N-2} \right\rangle \times \\&\quad \times \ldots \left\langle x_1 \middle| \hat{U}(t_1, t_0) \middle| x_0 \right\rangle.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Следовательно, тождественный оператор в этом случае должен быть определен так:

$$\int \sqrt{g(x)} dx \left| x \right\rangle \left\langle x \right|. \tag{3.16}$$

Действительно, пусть мы имеем абстрактное скалярное произведение векторов в гильбертовом пространстве, $\left\langle \Psi \middle| \Phi \right\rangle$. Для перехода к координатному представлению мы должны вставить полный набор, состоящий из собственных векторов оператора координаты:

$$\left\langle \Psi \middle| \Phi \right\rangle = \int \sqrt{g(x)} dx \left\langle \Psi \middle| x \right\rangle \left\langle x \middle| \Phi \right\rangle = \int \sqrt{g(x)} dx \Psi^*(x) \Phi(x). \tag{3.17}$$

Итак, мы имеем определение скалярного произведения в координатном представлении с мерой $\mu(x) = \sqrt{g(x)}$. Эти замечания мы будем использовать в дальнейшем.

**3.2.3. Вывод уравнения Шредингера для системы со связями.** Теперь мы рассмотрим вывод уравнения Шредингера из континуального интеграла с эффективным действием Фаддеева – Попова, которое по сравнению с предыдущем случаем содержит два дополнительных слагаемых.

Духовая часть действия представляет собой билинейную форму по духовым "скоростям", и оно аппроксимируется, в принципе, так же, как квадратичная форма по "скоростям" физических переменных, однако нужно учитывать грассманов характер духовых переменных [158-160], а также тот факт, что духовые переменные входят в уравнения для физических степеней свободы и, наоборот, физические входят в уравнения для духов, вследствие чего разложения типа (3.11) становятся более громоздкими. Интегрирование по духовым переменным проводится в соответствии с правилами интегрирования грассмановых переменных.

Что же касается аппроксимации члена, фиксирующего калибровку, беря производную по времени от калибровочного условия (2.3), получим:

$$\ddot{N} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q}^a \dot{q}^b + \frac{\partial f}{\partial q^a} \ddot{q}^a . \tag{3.18}$$

Используя разложения типа (3.11),

$$\dot{q}^a(t') = \frac{z^a}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^a(t') - \frac{\varepsilon^2}{3!} \dddot{q}^a(t') + \ldots \tag{3.19}$$

$$\dot{N}(t') = \frac{n}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \ddot{N}(t') - \frac{\varepsilon^2}{3!} \dddot{N}(t') + \ldots \tag{3.20}$$

опуская зависимость от $t'$, приходим к следующей аппроксимации:

$$\begin{aligned}
\dot{N} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \dot{q}^a &= \frac{n}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \ddot{N} - \ldots - \frac{\partial f}{\partial q^a} \left( \frac{z^a}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \ddot{q}^a - \ldots \right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left( n - \frac{\partial f}{\partial q^a} z^a \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q}^a \dot{q}^b + \frac{\partial f}{\partial q^a} \ddot{q}^a - \frac{\partial f}{\partial q^a} \ddot{q}^a \right) - \ldots = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left( n - \frac{\partial f}{\partial q^a} z^a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b} z^a z^b - \ldots \right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

В эффективном действии калибровочное условие умножается на лагранжев множитель, который входит в определение (2.9) обобщенного импульса, сопряженного калибровочной переменной $N$. Поскольку этот импульс невозможно выразить через обобщенные скорости, континуальный интеграл должен включать дополнительное интегрирование по импульсу $\pi$. В результате интегрирования по $\pi$ получается $\delta$-функция от выражения в скобках в третьей строчке (3.21). На следующем этапе можно с помощью $\delta$-функции снять интеграл по калибровочной переменной. В конечном итоге это приводит к замене калибровочной переменной $N$ функцией $f\left(q\right)$, фиксирующей калибровку, и уравнение Шредингера оказывается калибровочно-зависимым. В этом принципиальное отличие от работы [57], в которой с самого начала было выбрано конкретное калибровочное условие $N=0$ ; при таком выборе, разумеется, никакой зависимости от функции $f\left(q\right)$ , фиксирующей калибровку, не могло появится.

На заключительном этапе проводится интегрирование по физическим степеням свободы (выполняются гауссовы квадратуры). В итоге получается уравнение Шредингера в следующем виде:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi; \tag{3.22}$$

$$H=-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial Q^{\alpha}}\left(MG^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial Q^{\beta}}\right)-\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}+U\left(Q\right)+V\left[f\right]. \tag{3.23}$$

$M$ – мера в континуальном интеграле; в случае модели с конечным числом степеней свободы, описываемом действием (2.8), мера будет иметь вид

$$M\left(N,q\right)=\frac{\sqrt{g}}{N}, \tag{3.24}$$

где $g$, как и в (3.13), определитель метрического тензора конфигурационного пространства. Важное значение, как мы увидим, имеет то, что мера зависит от калибровочной переменной $N$, а через нее – от функции $f\left(q\right)$. Зависимость меры от $N$ обусловлена, с одной стороны, зависимостью от калибровочной переменной метрики конфигурационного пространства $g_{ab}\left(N,q\right)$ и, следовательно, определителя $g$, с другой стороны, эта зависимость приходит из духового действия. Множитель $\frac{1}{N}$ в (3.24) появляется из-за включения духов в эффективное действие. Оператор (3.23) является эрмитовым относительно меры $M$ .

$G^{\alpha\beta}$ определена в (2.14). Оператор Гамильтона (3.23) с учетом упорядочения, отвечающему требованию эрмитовости, в точности соответствует гамильтониану в расширенном фазовом пространстве (2.13), что является косвенным подтверждением правильности выбранного подхода.

$V[f]$ – квантовая поправка к потенциалу $U(Q)$, аналог поправки $\frac{\hbar^2}{6}R$ в уравнении (3.13). $V[f]$ включает в себя кривизну конфигурационного пространства, построенную по его метрике $g_{ab}$, и вклад духовых степеней свободы. Роль духовых степеней свободы пока не изучена до конца, но мы видим, что они вносят вклад и в меру, и в квантовую поправку к потенциалу, и это не удивительно, так как даже в электродинамике духи вносят вклад в *S*-матрицу, присутствуя во внутренних линиях диаграмм Фейнмана [151].

Приведем конкретный пример. В работе автора **[B23]** рассматривалась произвольная параметризация калибровочной переменной. Новая калибровочная переменная $\tilde{N}$ связана с функцией хода соотношением

$$N = \frac{1}{v\left(\tilde{N}, q\right)} \tag{3.25}$$

(ср. (2.42)). Метрика конфигурационного пространства была выбрана следующим образом:

$$g_{ab}(N, q) = v\left(\tilde{N}, q\right)\gamma_{ab}, \tag{3.26}$$

причем $\gamma_{ab}$ – постоянная матрица. При выборе новой калибровочной переменной изменится и духовое действие. Учитывая связь (3.25) между старой и новой переменными, можно найти калибровочные преобразования новой переменной, и последнее слагаемое в (2.8) заменится на

$$S_{(ghost)} = \int dt\; w\left(\tilde{N}, q\right)\dot{\bar{\theta}}\dot{\theta}\,, \tag{3.27}$$

где

$$w\left(\tilde{N}, q\right) = v\left(\tilde{N}, q\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\right)^{-1}. \tag{3.28}$$

Калибровка накладывается на новую переменную $\tilde{N}$, т. е.

$$\dot{\tilde{N}} = \frac{\partial f}{\partial q^a}\dot{q}^a\,. \tag{3.29}$$

В этом случае, после довольно длинных вычислений получается следующий вид квантовой поправки к потенциалу $V[f]$:

$$\begin{aligned}
V[f] = {} & \frac{5}{12w^2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \tilde{N}}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + 2\frac{\partial w}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial w}{\partial q^a} + \frac{\partial w}{\partial q_a}\frac{\partial w}{\partial q^a}\right] + \\
& + \frac{1}{3w}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{N}^2}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{N}\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + \frac{\partial w}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial^2 f}{\partial q_a \partial q^a} + \frac{\partial^2 w}{\partial q_a \partial q^a}\right] + \\
& + \frac{K-2}{6vw}\left[\frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial w}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial w}{\partial q^a} + \frac{\partial w}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial v}{\partial q^a} + \frac{\partial v}{\partial q_a}\frac{\partial w}{\partial q^a}\right] - \\
& - \frac{K^2 - 7K + 6}{24v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + 2\frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial v}{\partial q^a} + \frac{\partial v}{\partial q_a}\frac{\partial v}{\partial q^a}\right] + \\
& + \frac{1-K}{6v}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{N}^2}\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{N}\partial q_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\frac{\partial^2 f}{\partial q_a \partial q^a} + \frac{\partial^2 v}{\partial q_a \partial q^a}\right].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Здесь $K$ – число физических степеней свободы.

Волновая функция $\Psi$, удовлетворяющая уравнению (3.22), (3.23) , определена на расширенном конфигурационном пространстве с координатами $N$, $q$, $\theta$, $\bar{\theta}$.

В полевом случае действие включает интеграл по всему пространству. В наиболее простой полевой модели центрально-симметричного гравитационного поля действие включает интеграл от 0 до $\infty$ по радиальной переменной $r$. Экспоненту, в показателе которой стоит такой интеграл, можно формально представить как произведение бесконечного числа экспонент, каждая из которых соответствует определенному значению координаты $r$. Для каждого значения координаты $r$ вычисления проводятся точно также, как в конечномерном случае. Таким образом, процедура вывода уравнения Шредингера, предложенная Фейнманом [155] и обобщенная Ченгом [157], обобщается, с одной стороны, на случай систем со связями и, с другой стороны, на случай бесконечномерных полевых систем.

**3.2.4. Структура общего решения уравнения Шредингера.** Используя тот факт, что калибровочное условие (2.3) эквивалентно одному из гамильтоновых уравнений в расширенном фазовом пространстве, удается установить структуру общего решения уравнения Шредингера (3.22). В соответствии с общими правилами мы можем записать:

$$\frac{d}{dt}\left(N - f\left(q\right)\right) = \left\{H, N - f\left(q\right)\right\} = 0. \qquad (3.31)$$

При переходе к квантовой теории это подразумевает, что оператор Гамильтона и оператор калибровочного условия $N - f\left(q\right)$ коммутируют,

$$\left[H, N - f\left(q\right)\right] = 0, \qquad (3.32)$$

следовательно, они имеют общий набор собственных функций. Обозначим собственную функцию оператора $N - f\left(q\right)$ как $\varphi_k$. Решение уравнения

$$\left(N - f\left(q\right)\right)\varphi_k = k\varphi_k \qquad (3.33)$$

в координатном представлении имеет вид

$$\varphi_k = \delta\left(N - f\left(q\right) - k\right). \qquad (3.34)$$

Мы можем рассматривать функции (3.34) как базис, по которому можно разложить общее решение уравнение Шредингера, а именно, мы представляем его следующим образом:

$$\Psi\left(N,q,\theta,\bar{\theta};t\right)=\int\Psi_k\left(q,\theta,\bar{\theta};t\right)\delta\left(N-f\left(q\right)-k\right)dk\,. \qquad (3.35)$$

Для калибровочной переменной $N$ не существует других независимых интегралов движения, функции (3.34) составляют единственный базис, зависящий от $N$. Это означает, что общее решение уравнения Шредингера (3.22) однозначно имеет структуру (3.35).

Подстановка решения (3.35) в уравнение Шредингера (3.22) приводит к тому, что из оператора (3.23) уходят производные по калибровочной переменной $Q^0=N$, а сама калибровочная переменная $N$ везде заменяется на $f\left(q\right)+k$. Формально это можно записать следующим образом. Мы получаем уравнение для функции $\Psi_k\left(q,\theta,\bar{\theta};t\right)$:

$$i\frac{\partial\Psi_k}{\partial t}=H_k\Psi_k; \qquad (3.36)$$

$$H_k=\left[-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial q^a}\left(Mg^{ab}\frac{\partial}{\partial q^b}\right)-\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}+U\left(N,q\right)+V\left[f\right]\right]\Bigg|_{N=f(q)+k} \qquad (3.37)$$

При этом остается неизвестной зависимость от духов и параметра $k$. Зависимость от духов для моделей с конечным числом степеней свободы была определена еще в первых работах, посвященных данному подходу **[A1, A6]**. Идея заключается в следующем. Мы раскладываем $\Psi_k\left(q,\theta,\bar{\theta};t\right)$ в ряд по грассмановым переменным:

$$\Psi_k\left(q,\theta,\bar{\theta};t\right)=\Phi_k^0\left(q,t\right)+\Phi_k^1\left(q,t\right)\theta+\Phi_k^{\bar{1}}\left(q,t\right)\bar{\theta}+\Phi_k^2\left(q,t\right)\bar{\theta}\theta\,. \qquad (3.38)$$

Подставляя это разложение в (3.36), получаем уравнения

$$i\frac{\partial\Phi_k^0}{\partial t}=H_{(phys)}\Phi_k^0-\frac{1}{N}\Phi_k^2\Bigg|_{N=f(q)+k}; \qquad (3.39)$$

$$i\frac{\partial\Phi_k^n}{\partial t}=H_{(phys)}\Phi_k^n;\quad n=1,\bar{1},2; \qquad (3.40)$$

$$H_{(phys)}=\left[-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial q^a}\left(Mg^{ab}\frac{\partial}{\partial q^b}\right)+U\left(N,q\right)+V\left[f\right]\right]\Bigg|_{N=f(q)+k}\,. \qquad (3.41)$$

Из (3.39) следует, что $\Phi_k^2 = 0$. Запишем также условие нормировки по духовым переменным. Учитывая, что мы сделали замену (2.7), а также свойства грассмановых переменных,

$$d\Theta d\bar{\Theta} = d\theta d\bar{\theta}\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{\Theta}} = -id\theta d\bar{\theta}, \qquad (3.42)$$

условие нормировки примет вид:

$$-i\int\left(\Phi_k^{0*}\Phi_k^2 - \Phi_k^{2*}\Phi_k^0 + \Phi_k^{\bar{1}*}\Phi_k^1 - \Phi_k^{1*}\Phi_k^{\bar{1}}\right)\bar{\theta}\theta d\theta d\bar{\theta} > 0. \qquad (3.43)$$

Поскольку $\Phi_k^2 = 0$, удовлетворить условию нормировки возможно, если $\Phi_k^{\bar{1}} = -i\Phi_k^1$. Мы можем положить равным нулю также $\Phi_k^0$, поскольку это никак не влияет на условие (3.43). Итак, получаем:

$$\Psi_k\left(q,\theta,\bar{\theta};t\right) = \Phi_k\left(q,t\right)\left(\bar{\theta} + i\theta\right). \qquad (3.44)$$

Здесь $\Phi_k\left(q,t\right)$ – решение уравнения (3.40) с "физическим" оператором Гамильтона (3.41):

$$i\frac{\partial\Phi_k}{\partial t} = H_{(phys)}\Phi_k. \qquad (3.45)$$

Функция $\Phi_k\left(q,t\right)$ зависит только от физических переменных и может быть названа *физической частью волновой функции*. Именно она представляет основной интерес при рассмотрении конкретных моделей.

Уравнение (3.45) может быть названо *физическим уравнением Шредингера*. Как следует из определения оператора Гамильтона (3.41), оно оказывается зависимым от выбранного калибровочного условия, т. е. от системы отсчета. Информация о наблюдаемом объекте (геометрии пространства-времени и полях материи в этом пространстве-времени) зависит от того, в какой системе отсчета находится наблюдатель. Как представляется, такая картина отвечает общей теории относительности, ведь и там наблюдаемые физические явления зависят от выбранной системы отсчета. В Главе 4 мы подробно обсудим интерпретацию полученных результатов.

Подставляя (3.44) в (3.35), для полной волновой функции получим:

$$\Psi\left(N,q,\theta,\bar{\theta};t\right)=\int\Phi_k\left(q,t\right)\left(\bar{\theta}+i\theta\right)\delta\left(N-f\left(q\right)-k\right)dk. \qquad (3.46)$$

Вернемся к примеру, рассмотренному в разделе 3.2.3. Как уже говорилось, при переходе от уравнения (3.22) к уравнению (3.36) и затем к физическому уравнению Шредингера (3.45) калибровочная переменная $N$ заменяется на $f\left(q\right)+k$. Это подразумевает, что функция $v\left(\tilde{N},q\right)$ (3.25) приобретает дополнительную зависимость от $q$: $v\left(f\left(q\right)+k,q\right)$. Тогда можно определить "полные производные" по $q$ в соответствии с формулой

$$\frac{\delta v}{\delta q^a}=\left.\left(\frac{\partial v}{\partial\tilde{N}}\frac{\partial f}{\partial q^a}+\frac{\partial v}{\partial q^a}\right)\right|_{\tilde{N}=f(q)+k} \qquad (3.47)$$

(и аналогично для $w\left(\tilde{N},q\right)$ (3.28)). Введение таких производных дает возможность записать квантовую поправку $V\left[f\right]$ в физическом уравнении Шредингера (3.45) в более компактном виде, чем (3.30):

$$\begin{aligned}V\left[f\right]\Big|_{\tilde{N}=f(q)+k}=&\frac{5}{12w^2}\frac{\delta w}{\delta q_a}\frac{\delta w}{\delta q^a}+\frac{1}{3w}\frac{\delta^2 w}{\delta q_a\delta q^a}+\frac{K-2}{6vw}\frac{\delta v}{\delta q_a}\frac{\delta w}{\delta q^a}-\\&-\frac{K^2-7K+6}{24v^2}\frac{\delta v}{\delta q_a}\frac{\delta v}{\delta q^a}+\frac{1-K}{6v}\frac{\delta^2 v}{\delta q_a\delta q^a}.\end{aligned} \qquad (3.48)$$

Однако дело не только в математическом удобстве записи формул. В разделе 1.2.4 мы говорили о том, что для того, чтобы зафиксировать систему отсчета, необходимо выбрать параметризацию калибровочных переменных и калибровочные условия для этих переменных. Только совместно эти действия определяют систему отсчета, но по отдельности их будет недостаточно. Разбиение процедуры фиксации системы отсчета на выбор параметризации калибровочных переменных и наложение калибровочных условий весьма условно, что иллюстрируется зависимостью от $q$ функции $v\left(f\left(q\right)+k,q\right)$. Физическая часть волновой функции, удовлетворяющая уравнению (3.45), не зависит от этого разбиения.

Теперь запишем нормировочное условие для полной волновой функции (3.35):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{2}\int \Phi_k^*(q,t)\Phi_{k'}(q,t)\left(\bar{\theta}-i\theta\right)\left(\bar{\theta}+i\theta\right)\times\\
&\times\delta\left(N-f(q)-k\right)\delta\left(N-f(q)-k'\right)M(N,q)\,dk\,dk'd\theta d\bar{\theta}dN\prod_a dq^a=\\
&=\int \Phi_k^*(q,t)\Phi_{k'}(q,t)\delta(k-k')M\left(f(q)+k,q\right)dk\,dk'\prod_a dq^a=\\
&=\int \Phi_k^*(q,t)\Phi_k(q,t)M\left(f(q)+k,q\right)dk\prod_a dq^a=1.
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Теория не фиксирует зависимости $\Phi_k(q,t)$ от $k$, однако можно предположить, что общее решение (3.35) представляет собой достаточно узкий пакет по $k$, что обеспечивает сходимость интеграла (3.49). Пакет должен быть достаточно узким, но не $\delta$-образным, что означает, что существует некоторый разброс значений $k$. Это полностью согласуется с представлениями квантовой теории: мы не можем жестко фиксировать систему отсчета, не можем представлять ее в виде системы жестких стержней и линеек, как представлял себе Эйнштейн в период работы над специальной теорией относительности [18]. К интерпретации общего решения (3.35) мы еще вернемся в Главе 4.

В случае полной теории гравитации общее решение будет иметь аналогичную структуру с учетом того, что имеется четыре калибровочных условия и, соответственно, четыре пары духов.

**3.2.5. Уравнение Уилера – Де Витта в контексте предлагаемого подхода к квантованию гравитации.** Теперь мы зададимся вопросом, есть ли в предлагаемом подходе место для уравнения Уилера – Де Витта, или мы должны отбросить его как несовместимое с полученным уравнением Шредингера? Для ответа на этот вопрос вернемся к модели, описываемой действием (2.1). В (2.1) предполагается, что метрика конфигурационного пространства $g_{ab}(N,q)$ и потенциальная часть $U(N,q)$ зависят от калибровочной переменной $N$, но эта калибровочная переменная может быть выбрана достаточно произвольно: это может быть функция хода, но может быть какая-то функция функции хода, например, $g_{00}$-компонента метрического тензора. Но в подходе Уилера – Де Витта выбор параметризации калибровочной переменной является важным. Действие (2.1) в случае параметризации АДМ примет вид

$$S_{(grav)} = \int dt \left[ \frac{1}{2N} \tilde{g}_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - N\tilde{U}(q) \right]. \tag{3.50}$$

Соответственно, мы получим гравитационный гамильтониан

$$H = p_a \dot{q}^a - L = \frac{1}{2} N \tilde{g}^{ab}(q) p_a p_b + N\tilde{U}(q) \tag{3.51}$$

и гамильтонову связь

$$\frac{1}{2} \tilde{g}^{ab}(q) p_a p_b + \tilde{U}(q) = 0. \tag{3.52}$$

Далее нужно перейти к операторам и выбрать способ упорядочения. Как правило, выбирается способ упорядочения, который дает лапласиан, поскольку он инвариантен относительно замен переменных в физическом конфигурационном пространстве. Это приводит к уравнению Уилера – Де Витта:

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \frac{\partial}{\partial q^a} \left( \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial q^b} \right) + \tilde{U}(q) \Psi = 0. \tag{3.53}$$

Сравним это уравнение с уравнением (3.45) для физической части волновой функции с оператором (3.41). Сравнивать два уравнения имеет смысл только в параметризации АДМ. В общем случае, разумеется, дифференциальный оператор в (3.41) зависит от выбранного калибровочного условия: от него зависит мера $M$ (3.24) и обратная метрика конфигурационного пространства $g^{ab}$. Однако, если выбрать калибровочное условие $N=1$, метрика конфигурационного пространства $g_{ab}(N,q)=\frac{1}{N}\tilde{g}_{ab}(q)$ совпадет с $\tilde{g}_{ab}(q)$. Обратная величина, $\tilde{g}^{ab}(q)$, является аналогом суперметрики Де Витта (1.8) для систем с конечным числом степеней свободы. Также мера (3.24) сведется к $\sqrt{\tilde{g}}$. Для полного совпадения уравнений (3.45) и (3.53) следует положить, что физическая волновая функция не зависит от времени, $\frac{\partial\Phi_k}{\partial t}=0$.

Мы могли бы не обращать внимание на поправку $V[f]$ в операторе (3.41) так как, во-первых, она может появиться в уравнении Шредингера только при выводе его из континуального интеграла, но не при операторном квантовании, и, во-вторых, поправка имеет порядок $\hbar^2$. В примере, рассмотренном в разделе 3.2.3, при выборе параметризации АДМ $v(\tilde{N},q)=\frac{1}{\tilde{N}}$, и функции $v(\tilde{N},q)$, $w(\tilde{N},q)$ не зависят от $q$, и их производные по $q$, так же, как и производные $f(q)$ при выборе условия $N=1$, зануляются, и все поправка (3.30) обращается в нуль.

Итак, мы видим, что в рамках предлагаемого подхода мы можем получить уравнение Уилера – Де Витта из физического уравнения Шредингера при выполнении следующих условий:

1. Выбор параметризации АДМ.

2. Наложение условия $N=1$ (в полной теории гравитации, учитывая, что гравитационный гамильтониан представляет собой линейную комбинацию связей, следует также наложить условия $N_i=0$).

3. Требование независимости физической части волновой функции от времени.

Требование независимости волновой функции от времени не выглядит обоснованно с точки зрения предлагаемого подхода. Что же касается первых двух, они совместно фиксируют систему отсчета.

Отметим, что некоторые авторы указывали, что выбор параметризации АДМ означает введение в пространстве-времени (3+1)-разбиения, что неявно влечет за собой выбор системы отсчета [161-163].

Напомним, что условия $N = 1$, $N_i = 0$ использовались во многих работах по квантовой геометродинамике [6,35,36,57 и др.]. Однако в подходе Уилера – Де Витта признается несомненным, что теория является калибровочно-инвариантной, и выбор калибровочных условий – лишь вопрос удобства, как, например, в классической электродинамике. С точки зрения предлагаемого подхода, наоборот, выбор параметризации и калибровки говорит о том, что уравнение (3.53) справедливо *только* в системе отсчета, зафиксированной с помощью данных условий. Его вид отвечает частному случаю (напомним, что Хокинг и Пейдж писали [36], что существует целое семейство разных по форме уравнений Уилера – Де Витта, каждое из которых отвечает определенной зависимости $N$ от трехмерной метрики $\gamma_{ij}$). Более того, в силу наложения требования независимости волновой функции от времени уравнение (3.53) отвечает единственной линии $E = 0$ в спектре гамильтониана. В предлагаемом подходе спектр гамильтониана не сужен до единственной линии $E = 0$, как это имеет место в квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта, но должен быть определен при решении уравнения Шредингера. Этот момент мы обсудим более подробно ниже.

Таким образом, несмотря на огромную роль, которую уравнение Уилера – Де Витта сыграло в развитии квантовой геометродинамики, мы не можем признать его фундаментальным. Для этого у нас нет ни физических, ни математических аргументов.

## *3.3. Физическая картина, к которой приводит уравнение Шредингера для волновой функции Вселенной*

**3.3.1. Переход к стационарному уравнению Шредингера.** В разделе 1.3.2 были выписаны модифицированные уравнения Эйнштейна (1.29), которые содержат два дополнительных члена, $T^{\nu}_{\mu(gauge)}$ и $T^{\nu}_{\mu(ghost)}$, получающихся при варьировании члена, фиксирующего калибровку, и духового действия. (00)-уравнение Эйнштейна эквивалентно модифицированной гамильтоновой связи. Умножив это уравнение на $\sqrt{-g}$ (здесь $g$ – определитель метрического тензора), перенеся $T^{\nu}_{\mu(ghost)}$ в левую часть и записав левую часть через обобщенные координаты и импульсы, мы получим в этой части плотность гамильтониана в расширенном фазовом пространстве. Интегрируя по трехмерному пространству, получим полный гамильтониан. В правой части этого уравнения в результате интегрирования получим величину

$$E = \int d^3x \sqrt{-g}\, T^{0}_{0(gauge)}\,. \qquad (3.54)$$

Как указывалось ранее, $T^{\nu}_{\mu(gauge)}$ и $T^{\nu}_{\mu(ghost)}$ зависят от выбранных калибровочных условий и не являются истинными тензорами. В ряде случаев, используя явный вид калибровочных условий, можно показать, что величина (3.54) сохраняется. В одной из ранних работ автора, **[A5]**, это было продемонстрировано для калибровочных условий $\partial_0\left(\sqrt{-g}\,g^{0\mu}\right)=0$. Это также может быть продемонстрировано для класса калибровочных условий (2.2), которые используются в моделях с конечным числом степеней свободы.

Таким образом, модифицированная гамильтонова связь в расширенном фазовом пространстве может быть записана в виде $H = E$, причем $E$ определяется формулой (3.54). Это дает возможность перейти от временного уравнения Шредингера к стационарному; стационарное уравнение Шредингера для физической части волновой функции примет вид

$$H_{(phys)}\Phi_k = E\Phi_k\,. \qquad (3.55)$$

Однако, уравнение (3.55) ставит вопрос о физической интерпретации величины $E$.

**3.3.2. Интерпретация системы отсчета Ландау и Лифшица. Гравитационный вакуум.** Появление в эффективном действии двух дополнительных членов, $S_{(gauge)}$ и $S_{(ghost)}$, означает введение в рассмотрение двух дополнительных подсистем, одна из которых связана с духовыми полями, а другая – с системой отсчета наблюдателя. Роль этих подсистем на данном этапе развития теории неясна, но в подходе, который *не предполагает* исключение этих слагаемых с помощью асимптотических граничных условий, они должны вносить свой вклад в общую картину.

Как известно, Ландау и Лифшиц в "Теории поля" дали следующую интерпретацию системы отсчета в общей теории относительности [37, стр. 297]:

> «…для точного определения положения частицы в пространстве необходимо, строго говоря, иметь совокупность бесконечного числа тел, заполняющих все пространство, наподобие некоторой "среды". Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.»

Заметим, что в следующем абзаце Ландау и Лифшиц проясняют смысл калибровочной инвариантности в общей теории относительности. Здесь ясно указывается на ту особенность общей теории относительности, что вид наблюдаемых в разных системах отсчета физических явлений оказывается различным:

"В связи с произвольностью выбора системы отсчета законы природы должны записываться в общей теории относительности в виде, формально пригодном в любой четырехмерной системе координат (или, как говорят, в ковариантном виде). Это обстоятельство, однако, разумеется не означает физической эквивалентности всех этих систем отсчета (подобной физической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета в специальной теории). Напротив, конкретный вид физических явлений, в том числе свойства движения тел, во всех системах отсчета становится различным."

Интересно сравнить представление о системе отсчета как о некоей среде с идеей Эйнштейна, высказанной им в лекции "Эфир и теория относительности" о том, что общая теория относительности допускает представление об эфире как среде, определяющей метрические соотношения в пространственно-временном континууме [164, стр. 687 русского перевода]:

"Отрицать эфир – это в конечном счете значит принимать, что пустое пространство не имеет никаких физических свойств."

И далее, [164, стр. 687–688]:

«Представление о физически пустом пространстве окончательно устраняется такой пространственно-временной изменяемостью масштабов и часов; соответственно, признание того факта, что "пустое пространство" в физическом отношении не является однородным и изотропным, вынуждает нас описывать его состояние с помощью десяти функций – гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$. Но, таким образом, и понятие эфира снова приобретает определенное содержание, которое совершенно отлично от содержания понятия эфира механической теории света. Эфир общей теории относительности есть среда, сама по себе лишенная всех механических и кинематических свойств, но в то же время определяющая механические (и электромагнитные) процессы.»

Таким образом, говоря о новом эфире в контексте общей теории относительности, Эйнштейн подразумевал отнюдь не эфир XIX века, который пытались обнаружить Майкельсон и Морли, в который верил Лоренц и другие физики его поколения, а некую среду, заполняющую все пространство, которая служит для определения расстояний в пространстве и промежутков времени, т. е. выполняет функцию системы отсчета. Эта среда очень близка по своим свойствам к той, что описана Ландау и Лифшицем. Сегодня вопрос о природе гравитационного эфира (как его понимал Эйнштейн), или, говоря современным языком, гравитационного вакуума, остается открытым. Однако он является наилучшим кандидатом на роль среды, выполняющей функцию системы отсчета.

**3.3.3. Моделирование сред с различными уравнениями состояния с помощью выбора калибровочных условий.** Мы далее покажем, что, выбирая разные калибровочные условия, мы можем описывать среды с различными уравнениями состояния. Продемонстрируем это на примере простой модели замкнутой изотропной Вселенной, заполненной разными видами материи, которые описываются феноменологически, без указания на природу полей материи. На классическом уровне такая модель описывается действием

$$S = \int dt \left[ -\frac{1}{2}\frac{a\dot{a}^2}{N} + \frac{1}{2}Na - Na^3\varepsilon(a) \right] \tag{3.56}$$

Третье слагаемое в (3.56) феноменологически описывает материю; $\varepsilon(a)$ есть плотность энергии материи. Зависимость $\varepsilon$ от масштабного фактора $a$ определяет уравнение состояния материальной среды. Даже такая простая зависимость как

$$\varepsilon(a)=\frac{\varepsilon_n}{a^n}, \tag{3.57}$$

где $n$ – целое число, $\varepsilon_n=\mathrm{const}$ для каждого вида материи, позволяет описать целый ряд материальных сред [165-167]. Эти среды включают гравитационный вакуум с отличной от нуля космологической постоянной ($n=0$), пылевую материю ($n=3$), релятивистский газ или излучение ($n=4$) и т. д.

Здесь используются планковские единицы $G=\hbar=c=1$. Константа $\varepsilon_n$ имеет размерность $\left[\text{масса}\times(\text{длина})^{n-3}\right]=\left[\rho_{Pl}\times l_{Pl}^{n}\right]$.

Прямым вычислением можно убедиться, что соответствующий третьему слагаемому в (3.56) тензор энергии-импульса материи $T_{\mu(mat)}^{\nu}$ имеет диагональный вид,

$$T_{\mu(mat)}^{\nu}=\operatorname{diag}\left(\varepsilon_{(mat)},-p_{(mat)},-p_{(mat)},-p_{(mat)}\right), \tag{3.58}$$

и имеет место уравнение состояния

$$p_{(mat)}=\left(\frac{n}{3}-1\right)\varepsilon_{(mat)}. \tag{3.59}$$

Даже в подходе Уилера – Де Витта введение различных видов материи в совокупности с различным выбором параметризации калибровочной переменной позволяет свести уравнение Уилера – Де Витта к уравнению типа стационарного уравнения Шредингера $H\Psi=E\Psi$. В самом деле, гамильтонова связь для модели (3.56) будет иметь вид

$$\frac{1}{2a}p^2+\frac{1}{2}a-a^3\varepsilon(a)=0 \tag{3.60}$$

($p$ – импульс, сопряженный масштабному фактору). Введем произвольную параметризацию калибровочной переменной

$$N=v\left(\tilde{N},a\right). \tag{3.61}$$

Тогда мы получим более общую форму гамильтоновой связи,

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{N}}\left(\frac{1}{2a}p^2+\frac{1}{2}a-a^3\frac{\varepsilon_n}{a^n}\right)=0. \tag{3.62}$$

Заметим, что если мы выбираем не параметризацию АДМ, а произвольную параметризацию калибровочной переменной, то связь оказывается зависимой от этой переменной. Выберем параметризацию

$$v\left(\tilde{N},a\right)=\tilde{N}a^{n-3}, \tag{3.63}$$

и связь примет вид

$$\frac{1}{2}a^{n-4}p^2+\frac{1}{2}a^{n-2}-\varepsilon_n=0. \tag{3.64}$$

Выбирая способ упорядочения, при котором оператор в уравнении Уилера – Де Витта является эрмитовым, запишем это уравнение в форме, совпадающей с формой уравнения Шредингера:

$$-\frac{1}{2}a^{\frac{n}{2}-2}\frac{d}{da}\left(a^{\frac{n}{2}-2}\frac{d\Psi}{da}\right)+\frac{1}{2}a^{n-2}\Psi=E\Psi,\quad E=\varepsilon_n. \tag{3.65}$$

В частности, при $n=0$ (вакуум с космологической постоянной) из (3.64) и (3.65) получаем уравнения

$$\frac{1}{2a^4}p^2+\frac{1}{2a^2}-\varepsilon_0=0; \tag{3.66}$$

$$-\frac{1}{2a^4}\frac{d^2\Psi}{da^2}+\frac{1}{a^5}\frac{d\Psi}{da}+\frac{1}{2a^2}\Psi=E\Psi,\quad E=\varepsilon_0=\Lambda. \tag{3.67}$$

При $n=4$ (излучение) соответствующие уравнения запишутся как

$$\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}a^2-\varepsilon_4=0; \tag{3.68}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi}{da}+\frac{1}{2}a^2\Psi=E\Psi,\quad E=\varepsilon_4. \tag{3.69}$$

В подходе, основанном на формализме расширенного фазового пространства, вместо действия (3.56) мы должны рассмотреть действие с фиксирующим калибровку членом:

$$S=\int dt\left[-\frac{1}{2}\frac{a\dot{a}^2}{N}+\frac{1}{2}Na+\pi\left(\dot{N}-\frac{df}{da}\dot{a}\right)\right] \tag{3.70}$$

Мы исключили из действия вклад материальных сред. Также в модель не включен духовый сектор, который вносит свой вклад в меру $M$ в физическом уравнении Шредингера (см. (3.41), (3.24)). Это сделано для сопоставления с подходом Уилера – Де Витта.

Аналогично тому, как ранее был получен тензор энергии-импульса материи (3.58), в результате варьирования члена, фиксирующего калибровку, получаем, что (квази)тензор $T^{\nu}_{\mu(gauge)}$ имеет диагональный вид:

$$T^{\nu}_{\mu(gauge)} = \mathrm{diag}\left(\varepsilon_{(gauge)}, -p_{(gauge)}, -p_{(gauge)}, -p_{(gauge)}\right), \tag{3.71}$$

причем

$$p_{(gauge)} = \frac{1}{3}\frac{f'(a)}{f(a)} a\varepsilon_{(gauge)}. \tag{3.72}$$

Если мы выберем функцию, фиксирующую калибровку, в форме

$$f(a) = a^{n-3}, \tag{3.73}$$

мы получим уравнение состояния среды, описываемой (квази)тензором $T^{\nu}_{\mu(gauge)}$, которое полностью совпадает с (3.59):

$$p_{(gauge)} = \left(\frac{n}{3} - 1\right)\varepsilon_{(gauge)}. \tag{3.74}$$

Физическое уравнение Шредингера для данной модели выглядит следующим образом:

$$\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{d}{da}\left(\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{d\Psi}{da}\right) + \frac{1}{2}Na\Psi\right]\Bigg|_{N=f(a)} = E\Psi. \tag{3.75}$$

Нетрудно убедиться, что, подставляя вместо $N$ функцию (3.73), мы получим уравнение (3.65), а в частных случаях $n = 0$ и $n = 4$ – уравнения (3.67) и (3.69), соответственно.

Таким образом, мы продемонстрировали, что, выбирая разные калибровочные условия, мы получаем среды с различными уравнениями состояния. Кроме того, мы получили результаты, совпадающие с теми, которые могут быть получены в рамках подхода Уилера – Де Витта при введении различных материальных сред и различных параметризаций калибровочной переменной. В подходе, основанном на формализме расширенного фазового пространства, мы также можем ввести произвольную параметризацию в соответствии с (3.61), (3.63) и наложить на новую калибровочную переменную условие $\tilde{N}=1$. Ясно, что это эквивалентно выбору (3.73) функции, фиксирующей калибровку. Это еще раз демонстрирует тезис о том, что выбор параметризации калибровочных переменных и выбор калибровочных условий для этих переменных совместно фиксируют систему отсчета. Эти результаты приведены в работе автора **[B21]**.

В следующем разделе мы далее покажем, что новая подсистема, описываемая (квази)тензором $T^{\nu}_{\mu(gauge)}$, проявляет себя как фактор космологической эволюции.

**3.3.4. Гравитационный вакуум как фактор космологической эволюции.** В работе автора **[B25]** рассматривается простая модель замкнутой изотропной Вселенной, заполненную излучением. Модель описывается действием

$$S=\int dt\left[-\frac{1}{2}\frac{a\dot{a}^2}{N}+\frac{1}{2}Na-Na^3\varepsilon(a)+\pi\left(\dot{N}-\frac{df}{da}\dot{a}\right)\right]. \qquad (3.76)$$

Модель включает материю, описываемую феноменологически. Так же, как и в (3.70), в модель не включен духовый сектор. Материя представлена излучением, следовательно,

$$\varepsilon(a)=\frac{\varepsilon_4}{a^4} \qquad (3.77)$$

и имеет место уравнение состояния $p_{(mat)}=\frac{1}{3}\varepsilon_{(mat)}$, характерное для ультрарелятевистского газа (излучения).

Таким образом, в данной модели учитываются две составляющих – материя, представленная излучением, и среда, выполняющая функцию системы отсчета, с уравнением состояния (3.72).

Уравнение для физической части волновой функции для данной модели аналогично (3.75) с добавлением слагаемого, описывающего материю:

$$\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{d}{da}\left(\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{d\Psi}{da}\right)+\frac{1}{2}Na\Psi-N\frac{\varepsilon_4}{a}\Psi\right]\Bigg|_{N=f(a)}=E\Psi \qquad (3.78)$$

Рассмотрим калибровочное условие

$$N=a+\frac{1}{a^3}. \qquad (3.79)$$

Соответственно, уравнение состояния (3.72) запишется как

$$p_{(gauge)}=\frac{1}{3}\frac{a^4-3}{a^4+1}\varepsilon_{(gauge)}. \qquad (3.80)$$

Это калибровочное условие интересно тем, что в пределе малых значений масштабного фактора, $a\to 0$, оно переходит в условие $Na^3=1$, которое является аналогом более общего условия $\det\|g_{\mu\nu}\|=1$ для данной модели. Варьирование гравитационного действия при учете этого дополнительного условия приводит к уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной [168]. Уравнение (3.80) в этом пределе принимает форму

$$p_{(gauge)}=-\varepsilon_{(gauge)}. \qquad (3.81)$$

Такое уравнение состояния, как известно, характерно для вакуума [48]. Это говорит в пользу гипотезы о том, что гравитационный вакуум является наилучшим кандидатом на роль среды, выполняющей функцию системы отсчета. Уравнение Шредингера (3.78) будет иметь вид

$$-\frac{1}{2a^4}\frac{d^2\Psi}{da^2}+\frac{1}{a^5}\frac{d\Psi}{da}+\frac{1}{2a^2}\Psi-\frac{\varepsilon_4}{a^4}\Psi=E\Psi. \qquad (3.82)$$

Можно предполагать, что два последних слагаемых в левой части (3.82) определяют эффективный потенциал,

$$U(a) = \frac{1}{2a^2} - \frac{\varepsilon_4}{a^4}. \tag{3.83}$$

Он представляет собой потенциальный барьер, форма которого зависит от параметра $\varepsilon_4$. Чем меньше параметр $\varepsilon_4$, тем выше и уже барьер. Это согласуется с современными космологическими представлениями, согласно которым Вселенная могла возникнуть в метастабильном состоянии под барьером и затем туннелировать через него. Вид этого барьера для значения параметра $\varepsilon_4 = \frac{1}{50}$ в планковских единицах представлен на Рис. 1а. Этот случай соответствует инфляционно расширяющейся вселенной.

Существует ненулевая вероятность того, что масштабный фактор может принимать сколь угодно большие значения. Это подразумевает, что Вселенная может расширяться бесконечно. Это находится в противоречии с тем, что перед вторым слагаемым в (3.76) стоит знак "+", что соответствует закрытой изотропной модели. Этот факт показывает, что наивное предположение о соответствии между типом космологической модели и формой эффективного потенциала безосновательно.

В пределе больших значений масштабного фактора, $a \to \infty$, калибровочное условие (3.79) переходит в конформную калибровку $N = a$. Уравнение состояния среды то же самое, что и у излучения:

$$p_{(gauge)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{(gauge)}. \tag{3.84}$$

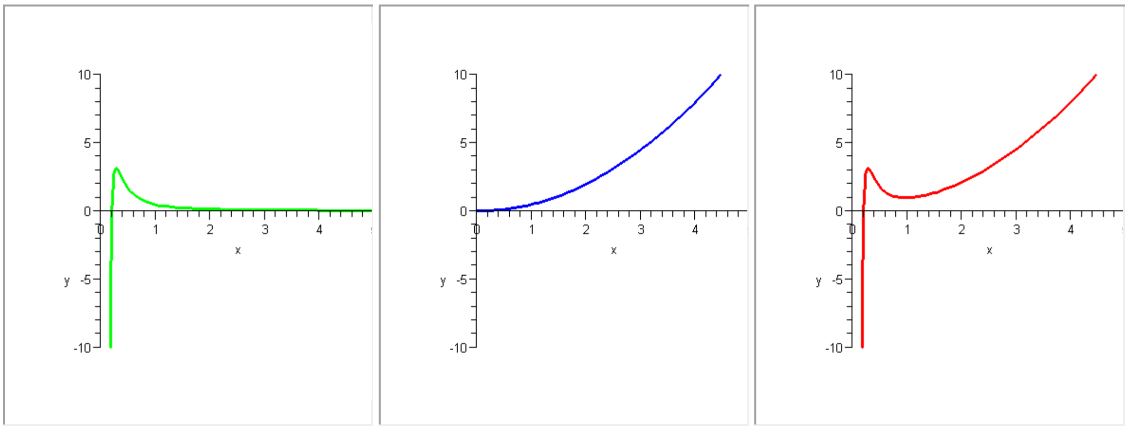
Уравнение Шредингера (3.78) принимает вид:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi}{da} + \frac{1}{2}a^2\Psi - \varepsilon_4\Psi = E\Psi. \tag{3.85}$$

После переопределения

$$E + \varepsilon_4 \to E \tag{3.86}$$

мы придем к уравнению (3.69), которое в данном случае следует интерпретировать как описывающее Вселенную, заполненную средой с уравнением состояния $p = \frac{1}{3}\varepsilon$, причем часть энергии этой среды – это энергия обычной материи (излучения), в то время как другая часть может быть обусловлена квантово-гравитационными калибровочными эффектами. Эффективный потенциал $U(a) = \frac{1}{2}a^2$ представлен на Рис. 1b. Этот случай соответствует замкнутой вселенной Фридмана, в которой расширение должно смениться сжатием.




a) $N = \frac{1}{a^3}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{50}$ b) $N = a$ c) $N = a + \frac{1}{a^3}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{50}$

**Рис. 1. Вид эффективных потенциалов для уравнений (3.82), (3.69) и (3.87).**

Наконец, мы возвращаемся к калибровке (3.79). Уравнение Шредингера после переопределения (3.86) принимает вид:

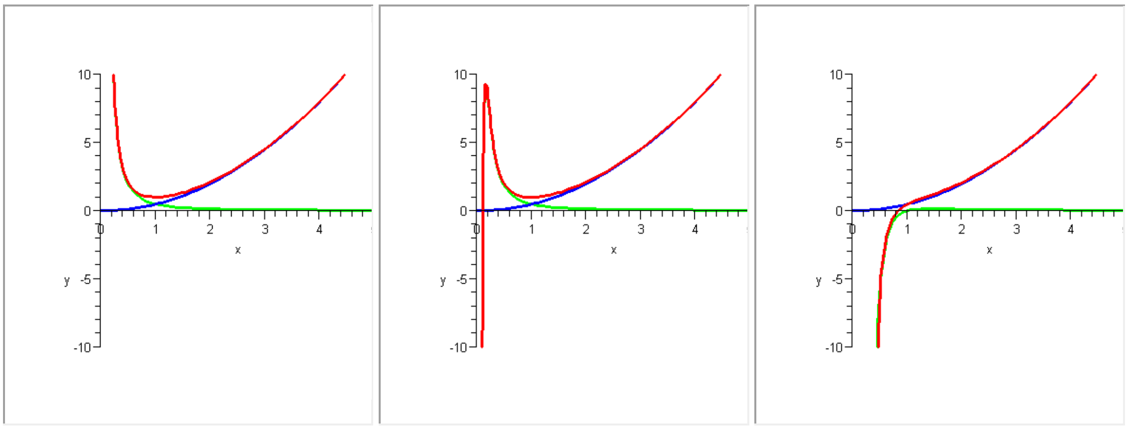
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a^4}\right)\frac{d^2\Psi}{da^2}+\frac{1}{a^5}\frac{d\Psi}{da}+\frac{1}{2}a^2\Psi+\frac{1}{2a^2}\Psi-\frac{\varepsilon_4}{a^4}\Psi=E\Psi. \qquad (3.87)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (3.82) и (3.69) являются предельными случаями уравнения (3.87) при $a \to 0$ и $a \to \infty$, соответственно. В этом случае можно сказать, что во Вселенной присутствует, наряду с излучением, гравитационный вакуум с уравнением состояния (3.80). Вследствие переопределения (3.86) в численное значение $E$ вносит вклад как материя (излучение), так и калибровочные эффекты, связанные с наличием среды с уравнением состояния (3.80). Как и в случае уравнения (3.82), эффективный потенциал

$$U(a)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2a^2}-\frac{\varepsilon_4}{a^4} \tag{3.88}$$

зависит от параметра $\varepsilon_4$ и изображен на рис. 1с для значения $\varepsilon_4=\frac{1}{50}$. Барьер исчезает при малых $a$, если $\varepsilon_4=0$ и $\varepsilon_4\geq 0{,}1$. Потенциалы для некоторых значений параметра $\varepsilon_4$ показаны на Рис. 2. Видно, что потенциал, соответствующий уравнению (3.82) (зеленая линия) и потенциал, соответствующий уравнению (3.69) (синяя линия) асимптотически приближаются к потенциалу (3.88), соответствующему уравнению (3.87).

Этот случай наиболее реалистический. Вселенная рождается в области очень малых значений масштабного фактора, а затем туннелирует через барьер в область достаточно больших значений $a$. По мере того, как масштабный фактор возрастает, инфляционная стадия сменяется медленным фридмановским расширением.



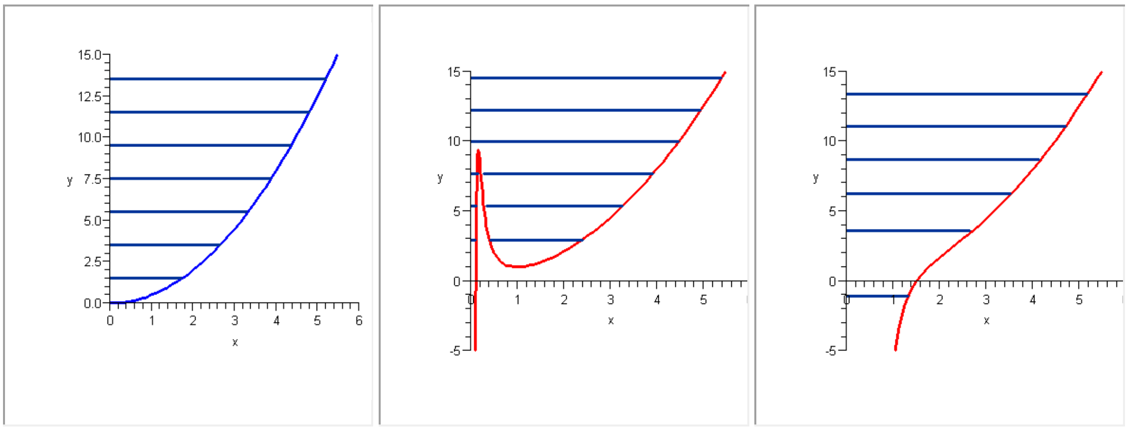

| | | |
|---|---|---|
| a) $\varepsilon_4=0$ | b) $\varepsilon_4=\frac{1}{150}$ | c) $\varepsilon_4=\frac{1}{2}$ |

**Рис. 2. Эффективные потенциалы для некоторых значений параметра $\varepsilon_4$.**

Оператор Гамильтона в уравнении (3.82) имеет непрерывный спектр, а в уравнениях (3.69) и (3.87) – дискретный. Собственные значения величины $E$ в двух последних случаях можно найти стандартными численными методами. Результаты приведены в работе **[15]**.

Для уравнения (3.69) (конформная калибровка, $N = a$) спектр получается эквидистантным. В случае уравнения (3.87) собственные значения отличаются незначительно для $\varepsilon_4 \le \dfrac{1}{50}$ и сходятся к предельным значениям при $\varepsilon_4 = 0$. Для $\varepsilon_4 > \dfrac{1}{50}$ уровни спектра уходят вниз в потенциальную яму. Спектры схематически представлены на Рис. 3.

Таким образом, в зависимости от состояния среды, выполняющей функцию системы отсчета, мы получаем разные космологические сценарии.




| | | |
|---|---|---|
| a) Ур-е (3.69) | b)Ур-е (3.87), $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{150}$ | c) Ур-е (3.87), $\varepsilon_0 = 7$ |

**Рис. 3. Уровни спектров для некоторых потенциалов.**

**3.3.5. Первый набросок космологического сценария.** Принято считать, что полная энергия замкнутой вселенной равна нулю, отрицательная энергия притяжения равна по модулю положительной энергии материи. Возникает вопрос, могла ли Вселенная возникнуть в состоянии с отличным от нуля значением параметра $E$? Этот вопрос связан с вопросом о том, что представляет собой так называемое состояние "Ничего" ("Nothing"), из которого предположительно появилась Вселенная?

Возможный ответ на этот вопрос дает подход, известный как "третичное квантование", который обсуждался в разделе 1.5.2. В этом подходе состояние "Ничего" ассоциируется с вакуумом вселенных. Непосредственно после рождения вселенная с малым значение масштабного фактора может исчезнуть, сжаться в точку. В этом подходе подразумевается аналогия между появлением и исчезновением вселенных и рождением и уничтожением частиц в квантовой теории поля [88-94]. Развивая аналогию с рождением частиц из вакуума, можно предположить, что, рождаясь, вселенная может обладать некоторой ненулевой энергией, которую она заимствует и которую позднее должна вернуть "вакууму вселенных". Это подразумевает, что принцип неопределенностей для энергии и времени должен выполняться и на уровне появления и исчезновения вселенных, что не противоречит концепции "третичного квантования". Рожденная вселенная может вернуть энергию, сжавшись в точку, так и не достигнув достаточно больших значений масштабного фактора.

Однако гипотетически существует и отличная от нуля вероятность, что вселенная достигнет достаточно больших значений масштабного фактора (например, вступив в инфляционную стадию) и станет макроскопической. В расширяющейся ранней вселенной должны идти процессы рождения частиц [169]. Рождение частиц действует как возмущение, изменяя эффективный потенциал и стимулируя квантовые переходы между уровнями $E$. Можно предположить, что в результате квантовых переходов такая вселенная окажется в состоянии с минимальным значением $E$, которое может быть принято равным нулю. Таким образом происходит возвращение энергии, заимствованной вселенной при рождении. Разумеется, в принципе, вселенная может родиться в состоянии с $E = 0$, если таковая линия присутствует в спектре, но в нашем подходе нет оснований для того, чтобы отбрасывать ненулевые значения $E$.

Как было показано в предыдущих разделах, при определенных условиях, включающих выбор параметризации и/или калибровки, а также условие $E = 0$, физическое уравнение Шредингера формально совпадает с уравнением Уилера – Де Витта. Поэтому можно считать, что на определенном этапе своей эволюции Вселенная описывается решением уравнения Уилера – Де Витта. Это уравнение имеет правильный классический предел, поэтому можно ожидать, что уравнение Уилера – Де Витта справедливо в период времени, непосредственно предшествующий той стадии эволюции Вселенной, когда достаточно хорошо описывается классической общей теорией относительности. Это отнюдь не возвращает уравнению Уилера – Де Витта его фундаментального характера. Напротив, мы допускаем, что наша Вселенная может описываться его решением лишь в течение достаточно малого переходного интервала времени, когда Вселенная оказывается в состоянии с $E = 0$, но еще не может описываться (квази)классически. На более ранней стадии должны проявлять себя калибровочно-неинвариантные эффекты квантовой гравитации, что, в частности, выражается в том, что Вселенная может находиться в состоянии с ненулевым значением $E$, и тогда она должна описываться решением физического уравнения Шредингера. Эффекты квантовой гравитации слабеют по мере того, как Вселенная расширяется, как она становится макроскопической.

Возможный космологический сценарий состоит в том, что Вселенная рождается в состоянии со значением параметра $E$, вероятно, отличным от нуля. В этом состоянии она локализована в области малых значений масштабного фактора. Затем, в результате квантовых переходов Вселенная оказывается в состоянии, в котором она описывается решением уравнения Уилера – Де Витта, и на следующем этапе ее состояние описывается квазиклассической волновой функцией.

В последующих разделах мы еще вернемся к вопросу о рождении Вселенной и ее эволюции и увидим, какие возможности заключает в себе подход, основанный на формализме расширенного фазового пространства.

**3.3.6. Зависимость физического уравнения Шредингера от калибровочных условий.** В разделе 3.2.4 было получено нормировочное условие (3.49) для волновой функции. В частности, для физической части волновой функции мы получили условие

$$\int \Phi_k^*(q,t)\Phi_k(q,t)M\left(f(q)+k,q\right)dk\prod_a dq^a = 1. \tag{3.89}$$

Из (3.89) видно, что мера $M$ в физическом конфигурационном пространстве зависит от выбора калибровки. От этого выбора также зависит оператор (3.41) в физическом уравнении Шредингера. Предположим, что мы немного изменили калибровочное условие, и вместо условия $N = f(q)+k$ рассмотрим

$$N = f(q)+\delta f(q)+k, \tag{3.90}$$

где $\delta f(q)$ мало. Это означает, что вместо (3.34) мы выбрали новый базис, и вместо (3.46) должны записать

$$\Psi\left(N,q,\theta,\bar{\theta};t\right) = \int \Phi_k(q,t)\left(\bar{\theta}+i\theta\right)\delta\left(N-f(q)-\delta f(q)-k\right)dk. \tag{3.91}$$

Теперь функция $\Phi_k(q,t)$ будет удовлетворять уравнению (3.45) с оператором Гамильтона

$$\begin{aligned} &H_{(phys)}[f+\delta f] = \\ &= \left[-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial q^a}\left(Mg^{ab}\frac{\partial}{\partial q^b}\right)+U(N,q)+V[f+\delta f]\right]\Bigg|_{N=f(q)+\delta f(q)+k}. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Учитывая малость $\delta f(q)$, оператор (3.92) можно представить в виде

$$H_{(phys)}[f+\delta f] = H_{(phys)}[f]+W[\delta f]+\delta U+V_1[\delta f], \tag{3.93}$$

где $H_{(phys)}[f]$ определяется формулой (3.41), оператор $W[\delta f]$ имеет вид

$$W[\delta f]=\left[\frac{1}{2M^2}\frac{\partial M}{\partial N}\delta f\frac{\partial}{\partial q^a}\left(Mg^{ab}\frac{\partial}{\partial q^b}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2M}\frac{\partial}{\partial q^a}\left(\left(\frac{\partial M}{\partial N}g^{ab}+M\frac{\partial g^{ab}}{\partial N}\right)\delta f\frac{\partial}{\partial q^b}\right)\right]\right|_{N=f(q)+k}, \tag{3.94}$$

$\delta U$ – изменение потенциала вследствие изменения калибровки и $V_1[\delta f]$ – изменение квантового потенциала $V$ в первом порядке по $\delta f$.

Оператор Гамильтона (3.92) является эрмитовым по построению в пространстве с мерой $M\left(f(q)+\delta f(q)+k,q\right)$, однако он не является эрмитовым в пространстве с мерой $M\left(f(q)+k,q\right)$, в котором нормированы решения уравнения (3.45) с оператором (3.41). В последнем случае оператор (3.94) будет иметь, вообще говоря, антиэрмитову часть. Посмотрим, к каким следствиям это приводит.

**3.3.7. Эволюция в случае, когда в различных областях пространства-времени наложены разные калибровочные условия.** Случай, когда пространственно-временное многообразие может быть покрыто только одной координатной системой, достаточно редкий. Как отмечалось в разделе 1.2.5, основанный на каноническом квантовании подход Дирака требует, чтобы пространство-время имело топологию $R\times\Sigma$, где $\Sigma$ – некоторое трехмерное многообразие; тогда необходимо ввести семейство пространственноподобных гиперповерхностей, которое бы заполняло все пространство-время. Если мы допускаем нетривиальную топологию, этого сделать невозможно, и это серьезная проблема подхода Дирака. В таком случае пространство-время может состоять из нескольких областей, в каждой из которых введена своя система координат. В разных областях нужно вводить различные калибровочные условия. Подход, основанный на континуальном интегрировании, более соответствует данной ситуации, поскольку континуальный интеграл допускает, по крайней мере формально, введение различных калибровочных условий в разных областях пространства-времени. В подходе, представленном в данной диссертации, волновая функция может удовлетворять физическим уравнениям Шредингера, чья форма различна в разных областях пространства-времени; форма уравнений в каждой области определяется выбранной системой отсчета.

Как известно, в подходе Уилера – Де Витта волновая функция (функционал) определена на суперпространстве – пространстве всех возможных 3-геометрий некоторого многообразия $\mathcal{M}$. Если мы обозначим как $\mathrm{Riem}(\mathcal{M})$ пространство всех возможных римановых метрик на $\mathcal{M}$, а $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ – группа диффеоморфизмов многообразия $\mathcal{M}$, то пространство всех возможных 3-геометрий есть фактор-пространство $\mathrm{Riem}(\mathcal{M})/\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ [170]. Каждая точка этого пространства является геометрией.

Все метрики, связанные друг с другом калибровочными преобразованиями, объединяются в класс эквивалентности, который представляет эту 3-геометрию. Две метрики, $g_{\mu\nu}$ и $g'_{\mu\nu}$, которые могут быть получены одна из другой с помощью преобразования координат, соответствуют одной и той же 3-геометрии, но отвечают разным калибровочным условиям. В нашем подходе разные калибровочные условия соответствуют разным операторам Гамильтона, скажем, $H_1$ и $H_2$, и разным физическим уравнениям Шредингера. Каждый из операторов Гамильтона действует в своем собственном гильбертовом пространстве, причем мера в скалярном произведении также определяется выбранным калибровочным условием. Это иллюстрируется на Рис. 4.

Вернемся к случаю, когда пространство-время состоит из нескольких областей, в каждой из которых нужно вводить различные калибровочные условия.

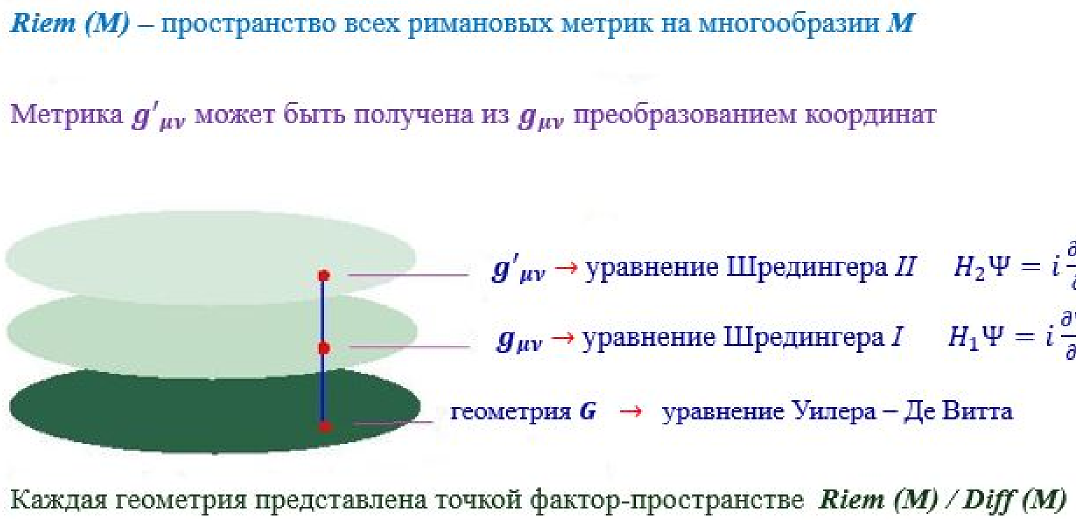



**Рис. 4. Метрикам, связанным между собой калибровочным преобразованием, соответствуют различные физические уравнения Шредингера**

Пусть пространственно-временное многообразие $\mathcal{M}$ состоит из нескольких областей $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \ldots$, в каждой из которых наложены различные калибровочные условия $C_1, C_2, C_3, \ldots$. Естественно думать, что такие области должны существовать во вселенной с нетривиальной топологией. Но для простоты мы сейчас предположим, что границы $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2, \ldots$ между областями пространственноподобны и соответствуют определенным моментам времени $t_1, t_2, \ldots$ (см. Рис. 5).

Для того, чтобы исследовать этот случай в рамках подхода, основанного на континуальном интегрировании, нет необходимости обобщать известный формализм. Континуальный интеграл по пространственно-временному многообразию $\mathcal{M}$ запишется как

$$\int \exp\left(iS\left[g_{\mu\nu}\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{M}} M\left[g_{\mu\nu}\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x) =$$
$$= \int \exp\left(iS_{(eff)}\left[g_{\mu\nu}, C_1, \mathcal{R}_1\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{R}_1} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{R}_1\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x)\times$$
$$\times \exp\left(iS_{(eff)}\left[g_{\mu\nu}, C_2, \mathcal{R}_2\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{R}_2} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{R}_2\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x)\times \tag{3.95}$$
$$\times \prod_{x\in\mathcal{S}_1} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{S}_1\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x)\times\ldots$$


**Рис. 5. Пространство-время, состоящее из нескольких областей с различными калибровочными условиями**

Здесь $S_{(eff)}\left[g_{\mu\nu}, C_1, \mathcal{R}_1\right]$ – эффективное действие в области $\mathcal{R}_1$ с заданными калибровочными условиями $C_1$, которое включает член, фиксирующий калибровку, и духовое действие.

С точки зрения калибровочно-инвариантного подхода континуальный интеграл не должен зависеть от калибровочных условий, и можно было бы записать:

$$\int \exp\left(iS\left[g_{\mu\nu}\right]\right)\prod_{x\in\mathcal{M}} M\left[g_{\mu\nu}\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x) =$$
$$= \int \left\langle g^{(0)}_{\mu\nu}, \mathcal{S}_0 \middle| g^{(1)}_{\mu\nu}, \mathcal{S}_1 \right\rangle \left\langle g^{(1)}_{\mu\nu}, \mathcal{S}_1 \middle| g^{(2)}_{\mu\nu}, \mathcal{S}_2 \right\rangle \times \tag{3.96}$$
$$\times \prod_{x\in\mathcal{S}_1} M\left[g_{\mu\nu}, \mathcal{S}_1\right]\prod_{\mu,\nu} dg_{\mu\nu}(x)\times\ldots$$

В этом случае начальное состояние $\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle$, а также промежуточные состояния $\left|g_{\mu\nu}^{(1)},\mathcal{S}_1\right\rangle$, $\left|g_{\mu\nu}^{(2)},\mathcal{S}_2\right\rangle$ и т. д. должны быть калибровочно-инвариантны, независимы от духов и калибровочных условий. Такое предположение было бы оправдано, только если бы все состояния были бы асимптотическими, но для промежуточных состояний это, очевидно, не так. Континуальный интеграл (3.96) должен быть регуляризован, что подразумевает наложение калибровочных условий на поверхности $\mathcal{S}_1$. Формула (3.96) является аналогом приведенной ранее формулы (1.23), которую обсуждал Хокинг в работе [44]. В обоих случаях это обобщение известной квантовомеханической операции "разложения единицы", когда вставляется полный набор состояний в некоторый момент времени $t_1$. Проблема состоит в том, что в данном случае состояния в областях $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ принадлежат разным гильбертовым пространствам.

Внутри области $\mathcal{R}_1$ эволюция физической подсистемы определяется унитарным оператором $\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1-t_0\right)\right]$, где $H_{1(phys)}$ – физический оператор Гамильтона в области $\mathcal{R}_1$ с калибровочными условиями $C_1$. Пусть в начальное время $t_0$ на поверхности $\mathcal{S}_0$ состояние системы описывается вектором $\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle$. Тогда состояние на границе $\mathcal{S}_1$ есть

$$\left|g_{\mu\nu}^{(1)},\mathcal{S}_1\right\rangle=\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1-t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)},\mathcal{S}_0\right\rangle. \tag{3.97}$$

Однако, если мы перейдем из области $\mathcal{R}_1$ в область $\mathcal{R}_2$, мы обнаружим, что в области $\mathcal{R}_2$ векторы состояний принадлежат уже другому гильбертову пространству, базис которого образуют собственные векторы оператора $H_{2(phys)}$ – физического оператора Гамильтона в области $\mathcal{R}_2$. Переход к новому базису в данном случае не является унитарной операцией, что следует из того факта, что мера в физическом подпространстве зависит от калибровочных условий (см. (3.89)). Обозначим оператор перехода к новому базису в области $\mathcal{R}_2$ как $\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_1, t_1\right)$. Тогда начальное состояние в области $\mathcal{R}_2$ есть

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_1, t_1\right)\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1 - t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)}, \mathcal{S}_0\right\rangle, \tag{3.98}$$

и

$$\begin{aligned}\left|g_{\mu\nu}^{(3)}, \mathcal{S}_3\right\rangle = \exp\left[-iH_{3(phys)}\left(t_3 - t_2\right)\right]\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_2, t_2\right)\exp\left[-iH_{2(phys)}\left(t_2 - t_1\right)\right]\times \\ \times\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_1, t_1\right)\exp\left[-iH_{1(phys)}\left(t_1 - t_0\right)\right]\left|g_{\mu\nu}^{(0)}, \mathcal{S}_0\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.99}$$

Таким образом, на любой границе $\mathcal{S}_i$ между областями, в которых наложены разные калибровочные условия, унитарная эволюция нарушается. Операторы $\mathcal{P}\left(\mathcal{S}_i, t_i\right)$ играют роль операторов проектирования, которые проектируют состояния, полученные в результате унитарной эволюции в области $\mathcal{R}_i$ на базис в гильбертовом пространстве в соседней области $\mathcal{R}_{i+1}$.

**3.3.8. Виды калибровочных преобразований.** Обычно предполагается, что калибровочные условия

$$F^{\mu}\left[g_{\nu\lambda}(x), \eta^{\rho}(x)\right] = 0 \tag{3.100}$$

выбираются таким образом, чтобы полностью фиксировать параметры калибровочных преобразований $\eta^{\mu}(x)$. Однако, как известно, эти условия фиксируют калибровочные параметры лишь с точностью до остаточных калибровочных преобразований, параметры которых удовлетворяют уравнениям, следующим из (3.100):

$$\delta F^{\mu}\left[g_{\nu\lambda}(x), \eta^{\rho}(x)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{M}_{\nu}^{\mu}\eta^{\nu} = \frac{\delta F^{\mu}}{\delta g_{\nu\lambda}}\frac{\delta g_{\nu\lambda}}{\delta \eta^{\rho}}\eta^{\rho} = 0. \tag{3.101}$$

Этот вид калибровочных преобразований не должен нас беспокоить, так как они не изменяют калибровочных условий (3.100) и поэтому не влияют на структуру гильбертова пространства.

Более интересны те преобразования, чьи параметры могут быть связаны гомотопией. Рассмотрим два набора калибровочных условий

$$F_1^{\mu}\left[g_{\nu\lambda}(x),\eta_1^{\rho}(x)\right]=0; \tag{3.102}$$

$$F_2^{\mu}\left[g_{\nu\lambda}(x),\eta_2^{\rho}(x)\right]=0, \tag{3.103}$$

которые фиксируют точки на калибровочной орбите, соответствующие элементам группы с параметрами $\eta_1^{\mu}(x)$ и $\eta_2^{\mu}(x)$. Предположим, что существует непрерывная функция $L^{\mu}(\tau,x)$, такая, что

$$L^{\mu}(\tau,x):\quad L^{\mu}(0,x)=\eta_1^{\mu}(x),\quad L^{\mu}(1,x)=\eta_2^{\mu}(x), \tag{3.104}$$

или, в более общем виде,

$$L^{\mu}(\tau,x):\quad L^{\mu}(\tau_1,x)=\eta_1^{\mu}(x),\quad L^{\mu}(\tau_2,x)=\eta_2^{\mu}(x). \tag{3.105}$$

Можно сказать, что $\eta_1^{\mu}(x)$ и $\eta_2^{\mu}(x)$ принадлежат к одному и тому же гомотопическому классу.

Далее, мы вводим множество калибровочных условий

$$F^{\mu}\left[g_{\nu\lambda}(x),\eta_{\tau}^{\rho}(x);\tau\right]=0:\quad \eta_{\tau}^{\mu}(x)=L^{\mu}(\tau,x), \tag{3.106}$$

и отождествляем $\tau$ с временной переменной $t$. Тогда зависящие от времени калибровочные условия (3.106) можно рассматривать как условия, осуществляющие гладкий переход от калибровки (3.102) к (3.103) . Возможность наложить семейство калибровочных условий (3.106) зависит от структуры группы и связано с возможностью ввести специальные координаты в групповом пространстве [170].

В простой изотропной модели гравитационное действие

$$S=\int dt\left(-\frac{1}{2}\frac{a\dot{a}^2}{N}+\frac{1}{2}Na\right) \tag{3.107}$$

инвариантно относительно однопараметрической абелевой группы преобразований

$$\delta N = -\dot{N}\eta - N\dot{\eta}; \quad \delta a = -\dot{a}\eta; \quad \delta t = \eta\,. \tag{3.108}$$

Поэтому любое зависящее от времени калибровочное условие

$$N = f\left(a,t\right) + k \tag{3.109}$$

будет представлять собой аналог семейства условий (3.106).

Любая каноническая калибровка, накладываемая на физические степени свободы (обобщенные координаты $q$ и сопряженные им импульсы $p$) и явно зависящая от времени,

$$\chi\left(q,p,t\right) = 0\,, \tag{3.110}$$

может быть приведена к виду, подобному (3.109). Напомним, что в дираковском формализме функции хода и сдвига $N$ и $N_i$ выполняют роль множителей Лагранжа, а гамильтониан представляет собой линейную комбинацию связей (1.6). Требуя сохранения во времени связей и калибровочных условий, множители Лагранжа в формализме Дирака можно выразить как функции координат и импульсов [2].

В модели с конечным числом степеней свободы канонический гамильтониан системы $H_c = N\mathcal{T}$ пропорционален гамильтоновой связи $\mathcal{T}$. Если потребовать сохранения во времени условия (3.110) (т. е. потребовать равенства нулю полной производной по времени от этого условия), то получим:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial\chi}{\partial t} + N\left\{\chi,\mathcal{T}\right\} = 0\,, \tag{3.111}$$

откуда

$$N = -\frac{\partial\chi}{\partial t}\left\{\chi,\mathcal{T}\right\}^{-1} = \tilde{f}\left(q,p,t\right). \tag{3.112}$$

Условие (3.112) может быть представлено в дифференциальной форме.

Зависящие от времени канонические калибровки неоднократно использовались в работах Барвинского [51,52,171,83]. В этих работах предполагалось, что квантование с использованием зависимых от времени канонических калибровок эквивалентно калибровочно-инвариантному дираковскому квантованию. Однако, с точки зрения подхода, предлагаемого в настоящей диссертации, зависящие от времени калибровочные условия подразумевают непрерывный переход от одной калибровки к другой и калибровочно-зависимую структуру физического гильбертова пространства.

Предлагаемый здесь формализм может быть обобщен на случай явно зависящих от времени калибровочных условий. Метод континуального интеграла включает аппроксимацию эффективного действия, в том числе калибровочного условия, на каждом временном интервале $\left[t_i, t_{i+1}\right]$ (см. (3.21)). Будем предполагать, что изменение калибровочного условия на каждом таком интервале есть

$$\delta f_i\left(q\right) = \alpha f_i\left(q\right), \tag{3.113}$$

где $\alpha$ – малый параметр, так что, используя $\theta$-функцию, калибровочное условие для модели с конечным числом степеней свободы можно представить в виде ступенчатой функции

$$N\left(t\right) = f\left(q\right) + \sum_{i=0}^{n} \alpha f_i\left(q\right) \theta\left(t - t_i\right) + k, \tag{3.114}$$

причем на каждом временном интервале калибровочное условие не зависит от времени. Например, на интервале $\left[t_n, t_{n+1}\right]$ из (3.114) следует:

$$N = f\left(q\right) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha f_i\left(q\right) + \delta f_n\left(q\right) + k. \tag{3.115}$$

Таким образом, мы приходим к случаю малого изменения калибровочного условия, рассмотренного в разделе 3.3.6. Как мы видели, малое изменение калибровочного условия приводит к появлению дополнительных слагаемых, которые являются неэрмитовыми по отношению к физическому пространству состояний, которое мы имели до того, как изменили калибровочное условие. В случае калибровки, зависящей от времени, это означает, что в каждый момент времени мы имеем оператор Гамильтона, действующий в своем собственном, "мгновенном" гильбертовом пространстве. "Мгновенный" оператор Гамильтона является эрмитовым оператором в каждый момент времени, но он неэрмитов по отношению к гильбертову пространству, которое мы имели в предыдущий момент. Ситуация отличается от той, которую мы рассматриваем в обычной квантовой механике: если оператор Гамильтона зависит от времени, он действует во все моменты времени в одном и том же гильбертовом пространстве, при этом мера в скалярном произведении с течением времени не изменяется. Однако мы можем провести аналогию между рассматриваемой ситуацией и рождением частиц в нестационарном гравитационном поле, где мы также имеем "мгновенный" оператор Гамильтона и "мгновенный" фоковский базис [172-174].

Гладкое изменение калибровочного условия со временем предполагает, что решения уравнения Шредингера для физической части волновой функции также изменяются непрерывно и гладко. С другой ситуацией мы сталкиваемся, когда калибровочные условия в двух областях пространства-времени фиксируют калибровочные параметры, которые принадлежат к разным гомотопическим классам, и, как правило, пространственно-временные координаты в этих областях связаны сингулярным преобразованием. Тогда калибровочные условия и сама форма уравнения Шредингера изменяются дискретным образом, когда переходим из одной области пространства-времени с определенными калибровочными условиями в область с другими калибровочными условиями. Этот случай наиболее интересный с точки зрения изменения структуры гильбертова пространства и наиболее трудный для рассмотрения. Во всяком случае, начальное состояние в области $\mathcal{R}_{i+1}$, которое является результатом предшествующей эволюции в области $\mathcal{R}_i$ , можно записать как суперпозицию состояний в "новом" гильбертовом пространстве в $\mathcal{R}_{i+1}$. Здесь возникает целый ряд новых вопросов, например: будет ли такая суперпозиция состояний стабильна? Является ли нарушение унитарной эволюции, которое имеет место в данном случае, причиной необратимости? Можно ли определить изменение энтропии физической подсистемы при переходе в область с другими калибровочными условиями? Для получения ответов на эти вопросы необходимо развивать новые математические методы, которые выходят за рамки теории возмущений.

Как было указано еще фон Нейманом [175], в квантовой механике мы имеем дело с двумя возможными способами изменения состояния физической системы: унитарная эволюция – гладкое изменение состояние системы со временем в соответствии с временным уравнением Шредингера, и редукция волновой функции физической системы в результате проведения над ней измерения. Вся эволюция системы может быть представлена формулой

$$\begin{aligned} \left|\Psi\left(t_N\right)\right\rangle = U\left(t_N, t_{N-1}\right)\mathcal{P}\left(t_{N-1}\right)U\left(t_{N-1}, t_{N-2}\right)\ldots\times \\ \times\ldots U\left(t_3, t_2\right)\mathcal{P}\left(t_2\right)U\left(t_2, t_1\right)\mathcal{P}\left(t_1\right)U\left(t_1, t_0\right)\left|\Psi\left(t_0\right)\right\rangle, \end{aligned} \tag{3.116}$$

где $\mathcal{P}\left(t_i\right)$ – проекционные операторы, соответствующие измерениям в моменты времени $t_1$, $t_2$, … , $t_{N-1}$ [176]. С такой же последовательностью операторов, как и в (3.116), мы встречались в (3.99), но там проекционные операторы $\mathcal{P}\left(t_i\right)$ имели другой смысл. Можно объяснить аналогию между (3.99) и (3.116), если принять интерпретацию системы отсчета как измерительного прибора, представляющего наблюдателя в квантовой теории гравитации. Калибровочные условия определяют взаимодействие между измерительным прибором (системой отсчета) и физической подсистемой Вселенной. Изменение взаимодействия с измерительным прибором заставляет нас перейти к другому гильбертову пространству. Материал разделов 3.3.6–3.3.8 основан на работах автора **[B22, B24]**.

### *3.4. Возможность изменения сигнатуры метрики с точки зрения подхода, основанного на формализме расширенного фазового пространства*

**3.4.1. Изменение сигнатуры метрики.** В разделе 1.5.2 упоминалось о гипотезе А. Д. Сахарова о том, что существуют состояния физического континуума, которые включают области с различной сигнатурой метрики [76]. Сахаров писал:

> "Различия в сигнатурной структуре… представляются столь же естественными, как различия в топологической структуре."

В этом разделе мы рассмотрим некоторые следствия гипотезы Сахарова с точки зрения предлагаемого в настоящей диссертации подхода. Прежде всего нас будет интересовать вопрос, как предполагаемое существование областей с различной сигнатурой может повлиять на эволюцию Вселенной.

Предположим, что физический континуум включает области $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, … , с сигнатурой (–, +, +, +) и области $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, … , с сигнатурой (+, +, +, +). Обозначения этих областей буквами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{P}$ соответственно было предложено Сахаровым, и, по его мысли, происходят от слова "Universe" и от имени древнегреческого философа Парменида, рассуждавшего о мире без движения. Однако области, обозначенные буквой $\mathcal{P}$ – это области, в которых отсутствует именно время, а не движение. Этим они отличаются от статических моделей вселенной, в которой существуют время и наблюдатель. Первая из таких моделей была предложена еще Эйнштейном в работе [177], где он ввел космологическую постоянную. Широко известна также теория устойчивого состояния расширяющейся вселенной, предложенная Бонди, Голдом и Хойлом [178,179]. Как уже говорилось, на планковских масштабах структура пространства-времени не может быть экспериментально определена в принципе, и поэтому можно предположить, что существование областей с различной сигнатурой метрики возможно на таких масштабах. Существование таких областей большего размера тем менее вероятно, чем больше размер.

Как правило, в литературе, посвященной изменению сигнатуры, обсуждается переход из области $\mathcal{P}$ в область $\mathcal{U}$ [77,78,80,82,84]. Формально переход с изменением сигнатуры может быть описан, если расширить допустимый класс преобразований координат преобразованиями в комплексной плоскости вида $t=-iy$, в результате которых $g_{00}$-компонента метрического тензора меняет знак. Класс преобразований можно расширить еще больше, включив в него преобразования координат, первоначально рассматриваемых как пространственные. Это позволило бы рассмотреть такую ситуацию, когда временная координата становится пространственной, в то время как пространственная координата становится временной. Однако особых оснований для изучения таких ситуаций нет, и мы ограничимся здесь только преобразованиями, которые затрагивают только координату $x_0$.

Сахаров [76] предполагал, что амплитуда вероятности различных состояний определяется континуальным интегралом, однако он не дал строгого определения континуального интеграла, проигнорировав такие вопросы, как наложение калибровочных условий. Континуальный интеграл по физическому континууму, в котором имеется некоторое распределение полей материи, можно представить в виде

$$\int\prod_{x\in\mathcal{U}_1}\left\{\prod_{\mu,\nu}dg_{\mu\nu}(x)d\phi(x)M\left[g_{\mu\nu}(x),\phi(x),\mathcal{U}_1\right]\exp\left(iS\left[\mathcal{U}_1\right]\right)\right\}\times$$
$$\times\prod_{x'\in\mathcal{P}_1}\left\{\prod_{\mu,\nu}dg_{\mu\nu}(x')d\phi(x')M\left[g_{\mu\nu}(x'),\phi(x'),\mathcal{P}_1\right]\exp\left(iS\left[\mathcal{P}_1\right]\right)\right\}\ldots \tag{3.117}$$

Поля материи обозначены как $\phi(x)$. Как видно, континуальный интеграл распадается на произведение интегралов по областям $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, … и $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, … . $M\left[g_{\mu\nu},\phi\right]$ – мера в континуальном интеграле, которая может быть различной в разных областях.

Рассмотрим физический континуум, который состоит из трех областей $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{U}_2$ (Рис. 6). Область $\mathcal{P}$ имеет пространственноподобные границы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. В областях $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ континуальный интеграл дает амплитуду вероятности $\langle g_2,\phi_2,\mathcal{S}_2|g_1,\phi_1,\mathcal{S}_1\rangle$ перехода из состояния с пространственно-временной метрикой $g_1$ и полями материи $\phi_1$ на гиперповерхности $\mathcal{S}_1$ в состояние с пространственно-временной метрикой $g_2$ и полями материи $\phi_2$ на гиперповерхности $\mathcal{S}_2$, понимаемая как сумма по всем полевым конфигурациям $g$ и $\phi$ (см. (1.21)). Предполагая, что гиперповерхности $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ соответствуют некоторым моментам времени $t_1$ и $t_2$, мы можем формально рассматривать амплитуду вероятности как матричный элемент оператора эволюции

$$\langle g_2,\phi_2|\exp\left[-iH\left(t_2-t_1\right)\right]|g_1,\phi_1\rangle. \tag{3.118}$$

Сахаров обсуждает следующий пример изменения сигнатуры (который кажется несколько искусственным). Пусть $g_{00}$-компонента метрического тензора меняет знак на границах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ области $\mathcal{P}$. Ее зависимость от времени определяется формулой

$$g_{00}=\frac{l(x)}{x_0-a}. \tag{3.119}$$

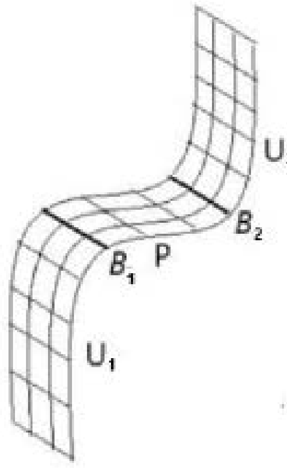



**Рис. 6. Физический континуум, состоящий из областей с различной сигнатурой метрики**

В работе Сахарова предполагается, что $l(x)$ может быть функцией пространственных координат, но она практически не меняется по порядку величины. Это предположение выводит нас за рамки класса преобразований, который обсуждался выше, поэтому мы будем считать что $l$ – постоянная или же ее производные пренебрежимо малы. Точка $x_0 = a$ лежит на одной из границ. Как мы видим, $g_{00}$ сингулярна в этой точке. Используя стандартную формулу преобразования компонент ковариантного тензора, несложно убедиться в том, что сингулярность $g_{00}$ может быть исключена с помощью преобразования координат

$$\begin{aligned} x_0 - a &= \frac{y^2}{4l}, \quad g_{00} \to g'_{00} = 1 \quad (\text{в области } \mathcal{P}); \\ a - x_0 &= \frac{t^2}{4l}, \quad g_{00} \to g'_{00} = -1 \quad (\text{в области } \mathcal{U}). \end{aligned} \tag{3.120}$$

Таким образом, переход через границу соответствует замене $t = -iy$, которая напоминает поворот Вика. Поэтому континуальный интеграл по области $\mathcal{P}$ можно представить как

$$\left\langle g_2, \phi_2 \middle| \exp\left[-H\left(y_2 - y_1\right)\right] \middle| g_1, \phi_1 \right\rangle. \tag{3.121}$$

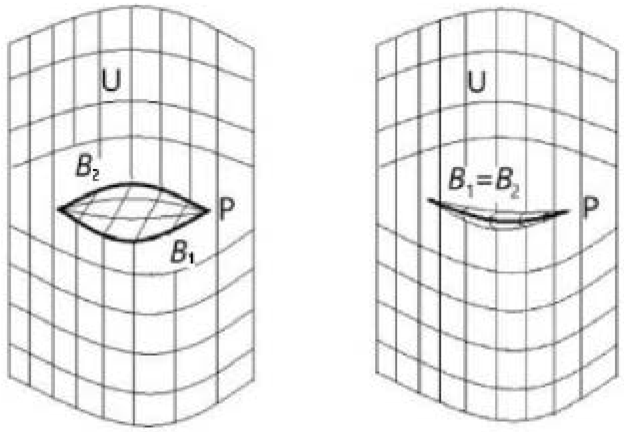
Границы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ играют роль гиперповерхностей $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Выражение (3.121) – это матричный элемент неунитарного оператора, причем значения полей на границах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ не обязательно совпадают, другими словами, состояния $|g_1,\phi_1\rangle$ и $|g_2,\phi_2\rangle$ могут быть различными.

Предположение о существовании областей с различной сигнатурой подразумевает введение различных координат в разных областях физического континуума. С подобной ситуацией мы сталкивались в разделе 3.3.7, где рассматривался случай, когда в различных областях пространства-времени наложены разные калибровочные условия (что неизбежно, если пространство-время имеет нетривиальную топологию). Тогда рассмотрение областей физического континуума выглядит как дальнейшее обобщение.

С точки зрения предлагаемого подхода сигнатура в различных областях физического континуума может быть зафиксирована специальными калибровочными условиями на компоненты метрического тензора. Например, наложение условий $g_{00}=-1$ в области $\mathcal{U}$ и $g_{00}=1$ в области $\mathcal{P}$ запрещают преобразования, обратные (3.120):

$$\begin{array}{ll} y=2\sqrt{l\left(x_0-a\right)} & \left(\text{в области } \mathcal{P}\right) \\ t=2\sqrt{l\left(a-x_0\right)} & \left(\text{в области } \mathcal{U}\right) \end{array} \qquad g_{00}\to g'_{00}=\frac{l}{x_0-a}. \qquad (3.122)$$

Теперь мы возвращаемся к вопросу, как предполагаемое существование областей с различной сигнатурой может повлиять на эволюцию Вселенной. Представим область $\mathcal{P}$ внутри области $\mathcal{U}$, например, так, как показано на Рис. 7а. Положение области $\mathcal{P}$ соответствует моменту $t_0$ мирового времени. Наблюдатель, живущий в области $\mathcal{U}$, может обнаружить самопроизвольное изменение полей в момент $t_0$. При пересечении границы области $\mathcal{P}$ временная координата становится пространственной. В пределах области $\mathcal{P}$ поля могут непрерывно изменяться с изменением этой координаты. Но, если наблюдатель способен измерить значения полей в моменты времени $t_0-\varepsilon$ и $t_0+\varepsilon$ при $\varepsilon\to 0$, он обнаружит скачок их значений, что будет воспринято наблюдателем, который не может существовать в области $\mathcal{P}$, как беспричинное нарушение непрерывности. Следовательно, существование области $\mathcal{P}$ может приводить к дополнительной квантовой неопределенности из-за разницы в состояниях на границах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$, которые относятся к одному и тому же моменту времени.




a) b)

**Рис. 7. Область $\mathcal{P}$ внутри области $\mathcal{U}$**

Для наблюдателя в области $\mathcal{U}$ скачкообразное изменение значений полей воспринимается как не имеющее причины ни в одном из предшествующих событий. В этой связи я позволю себе небольшое отступление, чтобы вспомнить, что Кант в "Критике чистого разума" допускал два вида причинности: наряду с причинностью согласно законам природы, он предполагал также так называемую "свободную причинность", которую сделал предметом третьей антиномии. Он писал [180, стр. 380 русского перевода]:

> "… необходимо допустить причинность, благодаря которой нечто происходит так, что причина не определяется в свою очередь никакой другой предшествующею причиной согласно необходимым законам, иными словами, необходимо допустить *абсолютную самопроизвольность* причин, т. е. [способность] *самостоятельно* начинать ряд явлений, развивающийся далее согласно законам природы, или трансцендентальную свободу…"

Русский философ Владимир Соловьев отмечал [181], что противоречие между двумя видами причинности может быть снято, если только относить причинность согласно законам природы к явлениям, а "свободную причинность" – к непознаваемым "вещам самим по себе". Именно такими непознаваемыми объектами должны представляться наблюдателю, живущему во времени, области $\mathcal{P}$, если даже наблюдатель допускает их существование.

Возвращаясь к обсуждению физического континуума, можно представить, что границы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ склеены, как схематически изображено на Рис. 7b, если существует взаимно однозначное отображение границы $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$. В таком случае область $\mathcal{P}$ компактифицирована. Как и в случае, изображенном на Рис. 7a, поля могут изменяться внутри области $\mathcal{P}$, и наблюдатель может зафиксировать скачок значений полей. Наблюдатель, существующий во времени в области $\mathcal{U}$, едва ли заметит разницу между ситуациями, изображенными на Рис. 7a и Рис. 7b. Состояние на границе $\mathcal{B}_2$ можно рассматривать как результат действия неунитарного оператора, как уже обсуждалось в связи с формулой (3.121). Этот оператор можно обозначить как $\mathcal{P}(t)$, что соответствует обозначению области $\mathcal{P}$. Изменение физических состояний в области $\mathcal{U}$ описывается матричным элементом унитарного оператора (3.118). Любопытное совпадение: общепринятое обозначение унитарного оператора буквой $U$ совпадает с предложенным Сахаровым обозначением таких областей, – буква "U" является первой буквой как слова "Universe", так и слова "unitary".

Предположим, что в нашей Вселенной существует некоторое количество областей $\mathcal{P}$, относящиеся к моментам времени $t_1$, $t_2$, … , $t_{N-1}$. Тогда временная эволюция может быть представлена последовательностью операторов

$$
\begin{aligned}
&U\left(t_N,t_{N-1}\right)\mathcal{P}\left(t_{N-1}\right)U\left(t_{N-1},t_{N-2}\right)\ldots\times \\
&\qquad\times\ldots U\left(t_3,t_2\right)\mathcal{P}\left(t_2\right)U\left(t_2,t_1\right)\mathcal{P}\left(t_1\right)U\left(t_1,t_0\right),
\end{aligned}
\tag{3.123}
$$

которая отличается от последовательности операторов в (3.116) тем, что операторы $\mathcal{P}(t)$ имеют иной смысл. Рассматриваемая ситуация, конечно, отличается от той, которая в разделе 3.3.8 привела к формуле (3.99) (аналогу формулы (3.116)). Однако в обоих случаях можно сказать, что нетривиальная топологическая структура континуума (в широком смысле) может стать причиной возможного нарушения унитарной эволюции.

**3.4.2. Рождение Вселенной как результат изменения сигнатуры метрики.** Выше мы предполагали, что некоторое количество областей $\mathcal{P}$ находится внутри области $\mathcal{U}$. Сахаров рассматривал и иную ситуацию, когда области $\mathcal{U}$ (может быть, даже бесконечное число таких областей) находятся внутри области $\mathcal{P}$. Эта ситуация более интересна, поскольку рождение нашей Вселенной, так же, как и многих других вселенных, может быть описано как результат квантового перехода с изменением сигнатуры метрики.

В 1992 году Эллис и его соавторы опубликовали работу [77], посвященную изменению сигнатуры в классической общей теории относительности. Их целью было найти решения уравнений Эйнштейна, которые бы описывали классический аналог того, что подразумевалось в статье Хартла и Хокинга [7], а именно, что Вселенная появляется из области $\mathcal{P}$ с "евклидовой" сигнатурой (+, +, +, +), которая представляет собой половину 4-сферы, не содержащей сингулярности. Эта половина 4-сферы склеена с областью $\mathcal{U}$ – 4-мерным пространством временем, имеющем "лоренцеву" сигнатуру (–, +, +, +), как показано на Рис. 8. На границе происходит изменение сигнатуры. Для определенности мы можем принять, что изменение сигнатуры имеет место, когда масштабный фактор равен планковской длине, $a = l_{Pl}$; удобно использовать планковские единицы, тогда $a = 1$. Классические решения в областях $\mathcal{P}$ и $\mathcal{U}$ должны быть непрерывны на границе областей. Однако в работе [77] $g_{00}$-компонента метрики меняет знак на границе, так что полное решение не является непрерывным. Авторы статьи объяснили этот недостаток тем, что $g_{00}$-компонента метрики не является физической переменной и может быть выбрана произвольно, поэтому тот факт, что она терпит разрыв, не влияет на физическое содержание. Их вывод состоял в том, что решения уравнений Эйнштейна в "евклидовой" и "лоренцевой" областях допускают изменение сигнатуры и описывают физический континуум, представленный на Рис. 8.


**Рис. 8. Рождение Вселенной в результате изменения сигнатуры метрики**

Однако в работе Хартла и Хокинга [7] подразумевалось нечто иное. В этой работе центральное место занимает так называемое предположение "об отсутствии границ", согласно которому волновая функция Вселенной определяется через континуальный интеграл по компактным "евклидовым" геометриям, так что Вселенная вовсе не должна иметь границ, по крайней мере, в "евклидовом" режиме, и представлена полной 4-сферой, которая представляет историю Вселенной в мнимом времени. Хокинг допускал [64], что волновая функция может быть аналитически продолжена в "лоренцеву" область, но это не эквивалентно изменению сигнатуры, предполагаемому в [77]. В своей знаменитой популярной книге [182] Хокинг предполагает, что имеются два описания истории Вселенной: в действительном времени и в мнимом времени, и отмечает, что бессмысленно спрашивать, какое время реально – "действительное" или "мнимое".

Авторы работы [77] не ссылаются на Сахарова, хотя представляется, что рассмотрение физического континуума, состоящего из областей с различной сигнатурой, гораздо ближе к идеям Сахарова, чем к тому, что подразумевает предположение Хартла – Хокинга "об отсутствии границ". В [77] изменение сигнатуры происходит благодаря изменению знака $g_{00}$-компоненты метрики. Как уже говорилось, эта компонента может быть зафиксирована наложением специального условия (которое, фактически, является калибровочным условием для $g_{00}$). Волновая функция Хартла – Хокинга удовлетворяет уравнению Уилера – Де Витта, которое на зависит от выбора условий для $g_{00}$. Возникает сомнение, что волновая функция Хартла – Хокинга действительно описывает континуум, изображенный на Рис. 8, состоящий из "евклидовой" и "лоренцевой" областей, граница между которыми соответствует смене сигнатуры метрики и рождению наблюдаемой Вселенной.

Как уже отмечалось в разделе 1.3.1, в работе [7] уравнение Уилера – Де Витта было выведено из требования, чтобы определенная через континуальный интеграл волновая функция не зависела от функции хода $N$ (см. (1.24)). Хокинг подчеркивал [64], что независимо от того, было ли получено уравнение Уилера – Де Витта из континуального интеграла по "евклидовым" или же "лоренцевым" метрикам, его вид остается тем же самым. В работе [64] Хокинг рассматривал замкнутую изотропную модель со скалярным полем $\phi$ с массой $m$. Чтобы получить оценку определенной через континуальный интеграл волновой функции, использовалось квазиклассическое приближение и уравнения Эйнштейна для "евклидовой" метрики. В области минисуперпространства, в которой $a^2m^2\phi^2 < 1$, волновая функция растет экспоненциально. Но если $a > \left(m\phi\right)^{-1}$, не существует действительных решений уравнений

Эйнштейна для "евклидовой" метрики. В этой ситуации Хокинг предложил аналитически продолжить полученное приближенное решение в "лоренцеву" область. В итоге волновая функция экспоненциально растет в "евклидовой" области ($a < (m\phi)^{-1}$) и осциллирует в "лоренцевой" области ($a > (m\phi)^{-1}$).

Интерпретация, предложенная Хокингом, состояла в том, что волновая функция дает амплитуду вероятности для "евклидовой" геометрии в одной области минисуперпространства (для малых значений $a$) и для "лоренцева" пространства-времени в другой области (для больших значений $a$). Линия $a = (m\phi)^{-1}$ выступает в роли поверхности смены сигнатуры, несмотря на то, что $g_{00}$-компонента метрики считается "лишней" переменной, и ее знак не учитывается явно. Однако неявно знак учитывается: с одной стороны линии $a = (m\phi)^{-1}$ используется "евклидова" версия уравнений Эйнштейна, в то время как с другой – их "лоренцева" форма. Такой подход представляется модельно-зависимым.

Интересно рассмотреть такую картину рождения Вселенной с точки зрения подхода, предлагаемого в данной диссертации, поскольку в таком случае мы можем явно использовать условия для компоненты $g_{00}$.

В работе [77] Эллис и его соавторы рассматривают замкнутую изотропную модель со скалярным полем с потенциалом $V(\phi)$. Для простоты они приняли, что $\dot{\phi} = 0$ (точка означает производную по времени). В таком случае мы получаем модель фридмановской вселенной с космологической постоянной $\Lambda$, роль которой выполняет потенциал $V(\phi)$. Уравнение Шредингера для физической части волновой функции имеет вид:

$$\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{\partial\Psi}{\partial a}\right)+\frac{1}{2}Na\Psi-\Lambda Na^3\Psi\right]\Bigg|_{N=f(a)}=i\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \quad (3.124)$$

Далее мы должны наложить условие на функцию хода $N$, соответствующее условию на $g_{00}$-компоненту метрики. Можно выделить два вида таких условий:

1) Смена сигнатуры, при котором компонента $g_{00}$ непрерывна, например, $g_{00}(t)=t$.

2) Изменение сигнатуры, при котором компонента $g_{00}$ терпит разрыв, например, $g_{00}=1$ в "евклидовой" области и $g_{00}=-1$ в "лоренцевой" области.

Во втором случае мы должны выбрать $N=i$ в "евклидовой" области (значения масштабного фактора $a<1$ в планковских единицах) и $N=1$ в "лоренцевой" области ($a>1$). В "лоренцевой" области из (3.124) при $N=1$ получаем стационарное уравнение Шредингера

$$-\frac{1}{2a}\frac{d^2\Psi}{da^2}+\frac{1}{4a^2}\frac{d\Psi}{da}+\frac{1}{2}a\Psi-\Lambda a^3\Psi=E\Psi. \quad (3.125)$$

Это уравнение не имеет особых точек в "лоренцевой" области ($a>1$).

Возникает вопрос, имеет ли смысл уравнение Шредингера в "евклидовой" области. При выводе уравнения Шредингера из континуального интеграла отправной точкой является аналог уравнения (3.5), обе части которого раскладываются в ряды по параметру $\varepsilon=t'-t$, $t$ – временная координата. В "евклидовой" области временная координата отсутствует, вместо нее мы имеем какую-то пространственную координату, скажем, $y$. С чисто формальной точки зрения, левую часть (3.5) можно разложить с точностью до первого порядка по $\varepsilon=y'-y$:

$$\psi(x',y+\varepsilon)=\psi(x',y)+\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (3.126)$$

Действие в показателе экспоненты в правой части (3.5) должно быть заменено так называемым "евклидовым" действием, которое получается при замене $t \to -iy$ (поворот Вика). Как уже говорилось в разделе 1.3.1, в обычной квантовой теории поля поворот Вика обеспечивает сходимость континуальных интегралов, но в теории гравитации это не работает, поскольку гравитационное действие не является положительно-определенным, и интегралы расходятся. При выводе уравнения Шредингера необходимо брать так называемые гауссовы квадратуры, т. е. интегралы вида [155]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \exp\left(i\alpha\xi^2\right) d\xi, \quad n = 0,1,\ldots \tag{3.127}$$

Очевидно, эти интегралы нуждаются в регуляризации. Поворот Вика (переход к мнимому времени) является одним из способов регуляризации, но не в случае гравитации. На примере изотропной модели с действием (3.76) мы видим, что действие не является положительно-определенным из-за знака "–" перед слагаемым $-\frac{1}{2}\frac{a\dot{a}^2}{N}$. Поворот Вика в обратном направлении ($t \to iy$) не решает проблему, так как действие для флуктуаций гравитационного поля и негравитационных полей положительно определено и требует поворота $t \to -iy$. Поэтому, со строго математической точки зрения, уравнение Шредингера в "евклидовой" области не имеет смысла.

С другой стороны, физики часто игнорируют математические проблемы, в том числе расходимости, что в конечном итоге, в особенности в квантовой теории поля, приводило к существенным результатам. Можно считать, что проблема с поворотом Вика – всего лишь математическая тонкость, которая на данном уровне развития теории несущественна и, возможно, найдет свое решение в дальнейшем.

Наконец, можно сделать предположение, что в "евклидовой" области отсутствуют флуктуации гравитационного поля и негравитационные поля, так что в этой области можно использовать поворот Вика в обратном направлении как математический прием, обеспечивающий сходимость интегралов.

Выбирая третью возможность, вместо уравнения (3.124) получим:

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{\frac{N}{a}}\frac{\partial\Psi}{\partial a}\right)-\frac{1}{2}Na\Psi+\Lambda Na^3\Psi\right]\Bigg|_{N=f(a)}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}. \qquad (3.128)$$

Выбирая условие $N=i$, мы придем к уравнению, которое полностью совпадает с (3.124) (с заменой $t$ на $y$). Следовательно, уравнения, которым удовлетворяет волновая функция по обе стороны от поверхности изменения сигнатуры, формально совпадают. Уравнение (3.128) имеет особую точку $a=0$ в "евклидовой" области. Волновая функция может быть разложена в ряд в окрестности особой точки:

$$\psi(a)=C_1\left[1+\mathcal{O}\left(a^4\right)\right]+C_2a^{\frac{3}{2}}\left[1+\mathcal{O}\left(a^2\right)\right], \qquad (3.129)$$

где $C_1$ и $C_2$ – константы. Таким образом, волновая функция ведет себя как регулярная функция в окрестности особой точки.

Обратимся теперь к случаю, когда $g_{00}$-компонента метрики меняется непрерывно. Вместо условия $g_{00}(t)=t$, рассмотренного в [77], в нашем подходе более удобно использовать условие вида $N=f(a)$. В качестве такого условия мы можем выбрать $N=\sqrt{a^2-l_{Pl}^2}$ или, переходя к планковским единицам, $N=\sqrt{a^2-1}$. При этом уравнение (3.124) будет выглядеть следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{a^2\sqrt{a^2-1}}\frac{\partial\psi}{\partial a}+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-1}\psi-\Lambda a^3\sqrt{a^2-1}\psi=i\frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad (3.130)$$

или, переходя к стационарному уравнению Шредингера,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{da^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{a\left(a^2-1\right)}\frac{d\psi}{da}+\left(\frac{1}{2}a^2-\Lambda a^4-E\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)\psi=0\,. \quad (3.131)$$

Это уравнение имеет две особые точки: $a=0$ и $a=1$. Если $E=0$, решение может быть представлено в виде разложения в ряд. Разложение волновой функции в окрестности точки $a=0$ совпадает с (3.129), разложение в окрестности точки $a=1$ есть

$$\psi(a)=C_1\left[1+\mathcal{O}\left((a-1)^2\right)\right]+C_2(a-1)^{\frac{3}{4}}\left[1+\mathcal{O}(a-1)\right]. \quad (3.132)$$

Мы можем заключить что в обоих случаях (когда компонента $g_{00}$ терпит разрыв и когда она непрерывна) волновая функция остается регулярной в окрестности точки $a=0$, соответствующей начальной сингулярности классических уравнений Эйнштейна с "лоренцевой" сигнатурой, а также в окрестности точки смены сигнатуры метрики $a=1$. Существенно, что обе особые точки уравнений для волновой функции являются также особыми точками решений классических уравнений Эйнштейна и, таким образом, представляют особенный физический интерес.

Создатели квантовой геометродинамики, Уилер и Де Витт, подчеркивали, что только трехмерная геометрия имеет значение. В частности, с точки зрения подхода Уилера – Де Витта не имеет значения, вложена ли эта трехмерная геометрия в некоторое пространство-время или в четырехмерное пространство с "евклидовой" сигнатурой. Однако это весьма важно для нас как наблюдателей, поскольку, говоря о рождении Вселенной, мы подразумеваем именно появление пространства-времени. По определению, пространство-время – это связное четырехмерное многообразие с "лоренцевой" метрикой [183]. Соответственно, пространство, которое мы наблюдаем, не может быть вложено в область физического континуума с "евклидовой" сигнатурой. Что же касается определения волновой функции через континуальный интеграл по "евклидовым" метрикам, его следует рассматривать именно как математический трюк, а описание истории Вселенной в мнимом времени – как "отражение" ее истории в реальном времени (в соответствии с интерпретацией Хокинга [182]).

К сожалению, никакое формальное описание рождения Вселенной в результате изменения сигнатуры метрики не приближает нас к пониманию того, что происходит в точке смены сигнатуры на физическом уровне, как появляется время. С точки зрения русской философии начала XX века, делая попытки описать Начало Вселенной, мы пытаемся познать Непостижимое. Русский философ С. Л. Франк, который развивал идеи Владимира Соловьева, писал в своей книге "Непостижимое" [184], что проблема возникновения нашего Мира необъяснима в логических терминах. Мы можем сконструировать некие модели динамического изменения сигнатуры метрики [79-81], но эти модели ставят все новые вопросы.

Материал разделов 3.4.1–3.4.2 основан на работах автора **[B14, B15]**.

# ГЛАВА 4.
# ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОДХОДА К КВАНТОВАНИЮ ГРАВИТАЦИИ, ОСНОВАННОМУ НА ФОРМАЛИЗМЕ РАСШИРЕННОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

## *4.1. Космология и копенгагенская интерпретация квантовой теории*

В этой диссертации представлен подход к квантованию гравитации, который приводит к выводам, которые могут показаться весьма странными тем, кто верит, что квантовая теория гравитации должна быть калибровочно-инвариантной теорией, не зависящей от выбора системы отсчета и состояния наблюдателя. В нашем подходе волновая функция Вселенной зависит не только от геометрии трехмерного пространства, как в квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта, но также от системы отсчета, относительно которой эта геометрия определяется. Такой результат является прямым математическим следствием того, что мы принимаем во внимание важную особенность теории гравитации, а именно, что большинство гравитирующих систем не имеют асимптотических состояний, в отличии от систем, обычно рассматриваемых в квантовой теории поля. Математически это означает, что в континуальном интеграле, через который определяется волновая функция Вселенной, не могут быть использованы асимптотические граничные условия, которые должны обеспечивать калибровочную инвариантность теории. Разумеется, такой результат требует своей оценки и интерпретации. При такой оценке нельзя не опираться на интерпретацию квантовой теории в целом.

Несмотря на то, что квантовая механика существует уже около ста лет и является весьма успешной теорией, в отношении ее интерпретации нет единого мнения. В книге Садбери [185] обсуждаются девять интерпретаций квантовой механики, и этот список далеко не исчерпан. Следует также отметить альтернативные формулировки квантовой теории, такие, как теория де Бройля – Бома [186] или так называемый подход "декогерентных историй" (decoherent histories approach) [187]. Математическое содержание этих теорий не эквивалентно общепринятой формулировке Шредингера – Гейзенберга. Например, так называемое управляющее (guiding) уравнение, будучи неотъемлемой частью теории де Бройля – Бома, не включено в число аксиом стандартной формулировки квантовой механики. В нашем обсуждении мы ограничимся стандартной формулировкой без каких-либо дополнительных постулатов.

В этой Главе я намереваюсь показать, что для понимания результатов предлагаемого подхода к квантованию гравитации можно и нужно пользоваться копенгагенской интерпретацией, несмотря на уверенность многих космологов, что эта интерпретация неприменима к квантовой космологии. Я собираюсь продемонстрировать, что она применима не только к ограниченному классу лабораторных экспериментов, но может оказаться полезной в поиске последовательной квантовой теории гравитации. Более того, я приведу аргументы в пользу того, что копенгагенская интерпретация не противоречит концепции "относительных состояний" Эверетта [191,192] и общее решение уравнения Шредингера вида (3.46) может быть интерпретировано, опираясь на концепцию "относительных состояний" Эверетта.

**4.1.1. Современная оценка копенгагенской интерпретации квантовой теории.** Копенгагенская интерпретация была, несомненно, важным шагом в понимании квантовой теории. Однако существует мнение, что копенгагенская интерпретация неприменима к квантовой космологии, и, вероятно, единственная подходящая в этом случае интерпретация – многомировая интерпретация Эверетта – Уилера. Ряд авторов полагают, что копенгагенская интерпретация не может быть применима к квантовой космологии из-за редукции волновой функции, которую они рассматривают как одну из главных идей этой интерпретации. Так, например, в книге [188] мы читаем:

> "…коллапс волновой функции, постулированный копенгагенской интерпретацией, является абсурдным с динамической точки зрения, и эту интерпретацию трудно, если вообще возможно, применить в квантовой космологии."[12]

Другой пример абсолютно негативного отношения к копенгагенской интерпретации можно найти в статье [186]:

> "…Копенгагенская интерпретация должна предполагать, что существует фундаментальный процесс измерения, который должен происходить вне квантового мира, посредством внешнего агента в классической области. Разумеется, если мы хотим проквантовать Вселенную в целом, вне ее не существует классической области или какого-либо внешнего агента, и копенгагенская интерпретация не может быть применима… Следовательно, если кто-то настаивает на копенгагенской интерпретации, по крайней мере в ее нынешней форме, он должен принимать, что квантовая теория не универсальна, что квантовая космология не имеет вообще никакого смысла, и что мы в тупике."[13]

Приведем еще один пример – из статьи [189]:

> "Имеет ли смысл *квантование* всей Вселенной с точки зрения предложенного Бором понимания квантовой теории? Ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, в этом случае вектор

[12] "…the wave function collapse postulated by the Copenhagen interpretation is dynamically ridiculous, and this interpretation is difficult if not impossible to apply in quantum cosmology." [188, p. 496].

[13] "… the Copenhagen interpretation must assume that there is a fundamental process in a measurement which must occur outside the quantum world, by an external agent in a classical domain. Of course, if we want to quantize the whole Universe, there is no place for a classical domain or any external agent outside it, and the Copenhagen interpretation cannot be applied... Hence, if someone insists on the Copenhagen interpretation, at least in its present form, she or he must assume that quantum theory is not universal, that quantum cosmology does not make any sense at all and that we are stuck." [186, p. 2-3].

> [состояния] не имеет самостоятельного значения в отсутствие наблюдателя. Следовательно, квантование Вселенной… также бессмысленно… поскольку *вне* Вселенной нет наблюдателей и приборов для того, чтобы делать измерения…"[14]

Оценка копенгагенской интерпретации и ее применимости к квантовой космологии зависит от того, каковы ее главные идеи. И здесь выясняется, что разные авторы расходятся во мнениях, что считать основными идеями копенгагенской интерпретации. В определенном смысле мы здесь сталкиваемся с "интерпретациями интерпретации". Например, Муханов [189] полагает, что копенгагенская интерпретация основывается на двух основных положениях:

1. Идея редукции в процессе измерения.

2. Вектор состояния является математическим инструментом для описания результатов измерений и не имеет смысла вне зависимости от конкретных экспериментов.

Кифер [190] выделяет следующие положения как характерные для копенгагенской интерпретации:

1. Необходимость использования классических концепций для описания процесса измерения.

2. Дополнительность между частицами и волнами.

3. Редукция волнового пакета как формальное правило, не имеющее динамического содержания.

**4.1.2. Положение о редукции вектора состояния.** Однако обратимся к словам самого Бора. В статье "Дискуссии с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике" он писал [98, стр. 406-407 русского перевода]:

---

[14] "Is *quantization* of the entire Universe meaningful from the point of view of the Bohr’s concept of quantum theory? The answer to this question is negative. Indeed, in this case the [state] vector has no independent meaning in the absence of observer. Hence, quantization of the Universe… is also meaningless… because *outside* the Universe there are no observers and apparatus that could make measurements…" [189, p. 22].

"*Поведение атомных объектов невозможно резко отграничить от их взаимодействия с измерительными приборами, фиксирующими условия, при которых происходят явления*. В самом деле, неделимость типичных квантовых эффектов проявляется в том, что всякая попытка подразделить явления требует изменения экспериментальной установки и тем самым влечет за собой новые возможности принципиально неконтролируемого взаимодействия между объектами и измерительными приборами. Вследствие этого данные, полученные при разных условиях опыта, не могут быть охвачены одной-единственной картиной; эти данные должны скорее рассматриваться как *дополнительные* в том смысле, что только совокупность разных явлений может дать более полное представление о свойствах объекта."

В этих словах Бора содержится указание на два основополагающих принципа, являющихся неотъемлемой частью копенгагенской интерпретации квантовой теории, — *принцип целостности (неделимости)* квантовых явлений и *принцип дополнительности*. Принцип целостности говорит о невозможности отделить квантовый объект от измерительного прибора. Объект и прибор должны рассматриваться вместе как целостное квантовое явление. В другой своей статье [99] Бор также указывает на целостность квантовых явлений, выражающуюся в том обстоятельстве, что любая попытка их разделения требует изменений условий эксперимента, несовместимых с определением того явления, которое было предметом исследования.

С другой стороны, физические свойства квантового объекта, проявляемые им при взаимодействии с измерительным прибором одного типа, должны быть дополнены теми свойствами, которые могут быть обнаружены в экспериментах другого типа. Понимание поведения квантового объекта в различных экспериментальных условиях дает нам настолько полное знание об объекте, насколько это позволяет квантовая теория. Физические картины, которые можно наблюдать в различных экспериментальных условиях, дополняют друг друга. Это суть принципа дополнительности. В этом контексте дополнительность понимается в более широком смысле, чем просто дополнительность волн и частиц.

Утверждения, которые выделяются другими авторами как основные положения копенгагенской интерпретации, являются следствиями принципов целостности и дополнительности. Действительно, в результате измерения формируется новая целостная система, состоящая из квантового объекта и измерительного прибора, и состояние, которое квантовый объект имел до измерения, полностью изменяется. Существующий математический аппарат квантовой механики не позволяет нам проследить за изменением состояния квантового объекта в деталях и описать измерение как процесс, разворачивающийся во времени. Мы можем только установить факт необратимого изменения состояния, что выражается в концепции редукции вектора состояния. Из этого также следует, что вектор состояния не имеет смысла без указания на конкретный эксперимент, поскольку без эксперимента мы на можем делать выводы о состоянии квантового объекта как об элементе физической реальности.

Несмотря на то, что многие авторы рассматривают редукцию вектора состояния как одно из основных положений копенгагенской интерпретации, мы можем поставить вопрос, не является ли положение о редукции следствием математического аппарата квантовой механики, или, более точно, не является ли положение о редукции следствием того, что математический аппарат квантовой механики не содержит описания процесса измерения?

В своей книге "Принципы квантовой механики" Дирак объясняет принцип суперпозиции состояний следующим образом [193, стр. 27 русского перевода]:

"…рассмотрим суперпозицию двух состояний $A$ и $B$ – таких, что существует наблюдение, которое, будучи произведено над системой в состоянии $A$, наверняка приведет к некоторому определенному результату $a$, а будучи произведено над системой в состоянии $B$, наверняка приведет к какому-то иному результату $b$. Каков будет результат наблюдения в суперпозиционном состоянии? Ответ на этот вопрос гласит, что результат будет иногда $a$, иногда $b$, в согласии с вероятностным законом, зависящим от относительных весов состояний $A$ и $B$ в суперпозиционном состоянии. Результат измерения никогда не будет отличаться от $a$ или $b$."

Действительно, мы не можем определить состояние квантовой системы иначе, чем производя над системой измерение. Утверждение "Результат измерения никогда не будет отличаться от $a$ или $b$" неявно подразумевает пресловутый "квантовый скачок" из суперпозиции состояний $A$ и $B$ в одно из этих состояний ($A$ или $B$). Напомним, что принцип суперпозиции – это одна из аксиом, на которых основана квантовая механика как математически последовательная теория независимо от интерпретации. С такой точки зрения проблема редукции должна рассматриваться в более широком смысле, как проблема измерения, которая не является особенностью копенгагенской интерпретации, но возникает и в любой другой интерпретации. Например, в многомировой интерпретации место редукции занимает ветвление (branching) волновой функции, которое столь же малопонятно, как и редукция.

**4.1.3. Наблюдатель в контексте квантовой космологии.** Обратимся теперь к другому аргументу тех, кто считает, что копенгагенская интерпретация неприменима к квантовой космологии – это аргумент об отсутствии наблюдателя. Наблюдатель должен находиться вне квантового объекта, считают они, и, если мы пытаемся квантовать Вселенную в целом, нашу макроскопическую Вселенную, за ее пределами, разумеется, нет и не может быть наблюдателей, если только не иметь в виду Наблюдателя с большой буквы, отождествляя его с Творцом или Высшим Разумом. Но последнее предположение выводит нас за рамки науки.

Можно предположить, что объектом квантовой космологии является не макроскопическая Вселенная, которую мы наблюдаем сегодня, а Самая Ранняя Вселенная (Very Early Universe) – область, имеющая размеры порядка планковской длины. Разумеется, в такой области также не может находиться наблюдателей с макроскопическими измерительными приборами.

Единственные наблюдатели, о которых мы можем говорить, оставаясь на твердом научном фундаменте, – это представители человечества. Условия, в которых мы существуем, определяют то, что нам приходится использовать макроскопические приборы. Именно это обстоятельство было осознано создателями копенгагенской интерпретации; именно это обстоятельство позволяет рассматривать копенгагенскую интерпретацию как наиболее соответствующую той реальной ситуации, в которой мы находимся. Можно ли в этой ситуации говорить о квантовой космологии как о науке? Что вообще мы можем ожидать от квантовой теории гравитации? Этот вопрос уже затрагивался в разделе 1.5.4. Во всяком случае, мы пытаемся построить теорию, которая могла бы добавить что-то к нашему пониманию Вселенной. Мы можем ожидать от нее объяснения квантово-гравитационных явлений, не только тех, что имели место в ранней Вселенной, но и тех, что происходят в окрестности черных дыр и, вообще говоря, в любой пространственно-временной точке. Но мы можем делать какие-либо выводы относительно этих явлений только по их макроскопическим следствиям, которые можно наблюдать с помощью наших макроскопических приборов. В ранней Вселенной квантово-гравитационные эффекты дают начало процессам, последствия которых мы можем наблюдать спустя миллионы лет.

Объект изучения квантовой космологии удален от нас на миллионы лет в прошлое. Поэтому ситуация в квантовой космологии весьма нетривиальная и очень отличается от той, с которой мы привыкли иметь дело в обычной квантовой механике и квантовой теории поля, она требует особого рассмотрения. Однако заранее не очевидно, что копенгагенская интерпретация не может быть полезной в этой ситуации. Напротив, в центре этой интерпретации находится вопрос о роли наблюдателя с его измерительными приборами, и в квантовой космологии этот вопрос имеет смысл так же, как и в квантовой механике.

Квантовая теория гравитации должна объединить общую теорию относительности и квантовую теорию, и в обеих теориях наблюдателю отводится значительная роль. Есть ли у нас основания ожидать, что результаты такого объединения не будут зависеть от условий физического эксперимента? Мы надеемся, что в конце концов квантовая гравитация станет проверяемой теорией. Однако, чтобы ее проверить, мы сможем наблюдать только макроскопические следствия квантово-гравитационных процессов, которые смогут зафиксировать наши макроскопические приборы. Также, если мы хотим рассматривать Вселенную в целом как квантовый объект на любой стадии ее эволюции, а не только на самой ранней стадии, мы должны принимать во внимание макроскопические размеры Вселенной, так что, хотя вне ее и не существует наблюдателя с классическими макроскопическими приборами, классическое пространство-время появляется внутри самой Вселенной, так же, как и наблюдатели, желающие ее исследовать.

Поэтому основные идеи копенгагенской интерпретации могут оказаться вполне востребованными в квантовой космологии, хотя, несомненно, будет необходимо их обобщение и дальнейшее развитие.

## *4.2. Концепция "относительных состояний" Эверетта и многомировая интерпретация*

**4.2.1. Концепция "относительных состояний".** Обратимся теперь к многомировой интерпретации, которая является основной альтернативой копенгагенской интерпретации и имеет много сторонников среди космологов. Как известно, она была предложена в статье [191], однако из названия статьи вовсе не следовало, что она содержит некую новую интерпретацию квантовой теории, а в самом начале статьи Эверетт писал:

> "Целью является не отрицать или противоречить общепринятой формулировке квантовой теории, которая уже продемонстрировала свою полезность при решении огромного множества задач, но скорее предложить новую, более общую и полную формулировку, из которой общепринятая интерпретация может быть *выведена*."[15]

Эверетт рассматривал составную систему $S$, состоящую из двух подсистем $S_1$ и $S_2$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ системы $S$ представляет собой тензорное произведение гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ подсистем $S_1$ и $S_2$ соответственно, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Пусть $\left\{\xi_i^{S_1}\right\}$ и $\left\{\eta_j^{S_2}\right\}$ – полные ортонормированные наборы состояний в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Тогда произвольное состояние системы $S$ может быть представлено в виде:

$$\psi^S = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i^{S_1} \eta_j^{S_2} . \tag{4.1}$$

Для каждого заданного состояния одной подсистемы можно единственным образом определить *относительное состояние* другой

[15] "The aim is not to deny or contradict the conventional formulation of quantum theory, which has demonstrated its usefulness in an overwhelming variety of problems, but rather to supply a new, more general and complete formulation, from which the conventional interpretation can be *deduced*." [191, p. 454].

подсистемы. Так, для некоторого состояния $\xi_k^{S_1}$ подсистемы $S_1$ относительное состояние подсистемы $S_2$ будет

$$\psi\left(S_2;\ \mathrm{rel}\,\xi_k^{S_1}\right) = N_k \sum_j a_{kj} \eta_j^{S_2}, \tag{4.2}$$

$N_k$ – нормировочный множитель; мы используем обозначения Эверетта. Для каждого состояния $\xi_k^{S_1}$ относительное состояние (4.2) не зависит от остальных векторов полного ортонормированного набора $\left\{\xi_i^{S_1}\right\}$ и однозначно определяется состоянием $\xi_k^{S_1}$. Вектор состояния (4.2) дает условное распределение вероятности результатов всех измерений в подсистеме $S_2$ при условии, что подсистема $S_1$ обнаружена в состоянии $\xi_k^{S_1}$. Используя (4.2), суперпозиция (4.1) может быть переписана как

$$\psi^S = \sum_i \frac{1}{N_i} \xi_i^{S_1} \psi\left(S_2;\ \mathrm{rel}\,\xi_k^{S_1}\right). \tag{4.3}$$

Как видим, Эверетт не использовал никакой новой математики по сравнению с той, которая уже входила в математический аппарат квантовой механики. Для того, чтобы ввести концепцию относительных состояний, необходимо лишь несколько простых формул. Одна из подсистем может представлять макроскопическое измерительное устройство.

Чтобы проиллюстрировать концепцию относительных состояний, Эверетт использовал игрушечную модель, предложенную еще фон Нейманом [175]. Этот пример будет полезен для нас в дальнейшем. Его основная идея в том, что существует связь между характеристиками квантового объекта (в игрушечной модели это координата частицы, $q$) и характеристиками измерительного прибора (в игрушечной модели это положение указателя прибора, $r$). В случае, когда положение указателя $r$ определено, волновая функция всей системы дается формулой

$$\psi_T^{S+A} = \int \frac{1}{N_{r'}} \xi^{r'}(q)\delta(r - r')dr' \quad (4.4)$$

(см. последнюю формулу на стр. 456 в [191]). Формула является аналогом (4.3). Здесь $\xi^{r'}(q)$ можно назвать относительным состоянием для тех состояний измерительного прибора $\delta(r-r')$, когда координата указателя имеет конкретное значение $r = r'$. $N_{r'}$, как и выше, нормировочный множитель.

Фактически, концепция относительных состояний – это просто результат применения математического аппарата обычной квантовой теории к составным системам. В соответствии с процитированными выше словами Эверетта, она не противоречит общепринятой формулировке. Приведенные выше формулы сами по себе не являются интерпретацией, хотелось бы это подчеркнуть, это только математика, которой можно придать различную интерпретацию.

В этом рассмотрении нет ничего, что бы противоречило копенгагенской интерпретации. Любые изменения в экспериментальной установке влекут за собой изменение взаимодействия между квантовым объектом и измерительным прибором. Математически, это означает выбор другого базиса в гильбертовом подпространстве прибора и, соответственно, другой набор относительных состояний квантового объекта. Они оба (квантовый объект и измерительный прибор) описываются на языке квантовой механики, при этом предполагается, что прибор является макроскопическим.

**4.2.2. Многомировая интерпретация.** Во второй части статьи [191] мы находим слова, которые положили начало многомировой интерпретации:

«…с каждым последующим наблюдением (или взаимодействием) состояние наблюдателя "разветвляется" на некоторое число различных состояний.»[16]

Известно, что работа Эверетта не вызвала интереса, а сторонники копенгагенской интерпретации, включая самого Бора, встретили ее резко отрицательно. Она могла бы остаться забытой, если бы примерно через десять лет после публикации работы Эверетта, в конце 1960-х годов, она не привлекла внимание Де Витта, который посвятил ей несколько статей, в том числе в популярном журнале "Physics Today" [194]. В статье [195] он писал:

«Нашу Вселенную следует рассматривать как непрерывно расщепляющуюся на громадное число ветвей в результате тех взаимодействий между мириадами ее компонентов, которые подобны процессам измерения. Поскольку не существует ни механизма в рамках известного формализма, ни, по определению, существа вне Вселенной, которое могло бы указать, какая ветвь большой суперпозиции представляет "действительный" мир, все ветви должны рассматриваться как в равной степени действительные.»[17]

Квинтэссенция многомировой интерпретации выражена в следующих словах [189]:

"Предположим, однако, что *существует много вселенных* и что суперпозиция… описывает одновременно результаты экспериментов, сделанных в *различных* вселенных, и каждой конкретной вселенной вместе с полученными внутри нее результатами

---

[16] "…with each succeeding observation (or interaction), the observer state 'branches' into a number of different states." [191, p. 459].

[17] "Our universe must be viewed as constantly splitting into a stupendous number of branches, all resulting from the measurementlike interactions between its myriads of components. Because there exists neither a mechanism within the framework of the formalism nor, by definition, an entity outside of the universe that can designate which branch of the grand superposition is the 'real' world, all branches must be regarded as equally real." [195, p. 178].

экспериментов соответствует один из членов суперпозиции… Существование других вселенных – это как раз то, что объясняет интерференционные эффекты. Используя этот подход, мы можем интерпретировать квантовую механику как теорию, само *существование* которой обусловлено существованием множества вселенных."[18]

Таким образом, Де Витт и, позднее, Муханов предполагают реальность всех ветвей суперпозиции и, тем самым, реальность разветвления. В то же время наблюдатель не воспринимает разветвление как физическое явление, он остается в своей собственной ветви, не имея даже теоретической возможности проверить реальность других ветвей. Если остается надежда, что редукция волновой функции может быть описана будущей теорией квантовых измерений, в случае разветвления мы имеем дело с принципиально непроверяемой гипотезой, так что, со строго научной точки зрения, разветвление нельзя отнести к физической реальности.

Существует обширная литература, посвященная интерпретациям квантовой теории и, в частности, многомировой интерпретации (см., например, [196-209]). Обсуждение всех аспектов, связанных с интерпретациями квантовой механики, выходит за рамки настоящей диссертации.

Вывод, который мы можем сделать из этого краткого рассмотрения, состоит в том, что работа Эверетта [191] содержит две различных концепции: концепцию относительных состояний, которая не вызывает споров, и многомировую интерпретацию, которая едва ли может нам помочь в понимании процесса измерения. В то время как многомировая

[18] "Suppose, however, that *there exist many universes* and that the superposition… describes simultaneously the results of experiments carried out in *different* universes, and to each concrete universe and to the result of a measurement in it there corresponds one of the terms in the superposition… The existence of other universes is just what accounts for interference effects. Using this approach, one can interpret quantum mechanics as a theory the very *existence* of which is due to the existence of many worlds." [189, p. 23].

интерпретация широко известна и, в определенном смысле, оставила в тени концепцию относительных состояний, эта концепция не сыграла практически никакой роли в квантовой космологии, несмотря на первоначальное намерение Эверетта придать квантовой теории форму, которая была бы применима к объектам общей теории относительности, в частности, ко Вселенной в целом как замкнутой системе.

### *4.3. Интерпретация общего решения уравнения Шредингера*

Теперь мы можем рассмотреть общее решение уравнения Шредингера (3.46) с точки зрения концепции относительных состояний Эверетта. Сопоставим выражения (4.4) и (3.46). Каждый элемент суперпозиции (4.4) соответствует состоянию, в котором единственная степень свободы измерительного прибора (положение указателя $r$) имеет определенное значение.

В общей теории относительности для того, чтобы сделать заключение о геометрии пространства-времени, наблюдателю необходимо зафиксировать систему отсчета. Таким образом, система отсчета играет роль измерительного прибора в общей теории относительности.

Каждый элемент суперпозиции (3.46) соответствует состоянию, в котором единственная калибровочная степень свободы $N$ определена. Это подразумевает, что некоторые процессы в физической подсистеме Вселенной определяют временной масштаб через фиксирующую калибровку функцию $f\left(q\right)$. В разделе 3.2.3 рассматривается случай произвольной параметризации калибровочной переменной, когда вводится новая переменная $\tilde{N}$, определяемая функцией $v\left(\tilde{N},q\right)$ (соотношение (3.25)). Зная эту функцию и калибровочное условие для новой переменной $\tilde{N}$ (3.29), мы можем получить калибровочное условие для функции хода $N$, т. е. определить масштаб хода часов. Как уже говорилось в разделе 1.2.4 и пояснялось на конкретном примере в разделе 3.2.4, для того, чтобы зафиксировать систему отсчета, необходимо выбрать параметризацию калибровочных переменных и наложить калибровочные условия на эти переменные. Эти действия вместе определяют систему отсчета. Поэтому в случае произвольной параметризации калибровочной переменной процессы в физической подсистеме Вселенной определяют временной масштаб через функции $v\left(\tilde{N},q\right)$, $f\left(q\right)$.

Общее решение (3.46) представляет собой пакет по $k$. Физическое уравнение Шредингера (3.45) никак не фиксирует формы пакета, но можно предположить, что пакет должен быть достаточно узким для того, чтобы $\Phi_k\left(q,t\right)$ была нормируемой функцией. Пример такого волнового пакета приведен в работе автора **[B23]**:

$$\begin{aligned}\Psi\left(N,q,\theta,\bar{\theta};t\right)=C\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(k-\bar{k}\right)^2\right]\times\\ \times\Phi_k\left(q,t\right)\left(\bar{\theta}+i\theta\right)\delta\left(N-f\left(q\right)-k\right)dk,\end{aligned}\tag{4.5}$$

($C$ – константа, параметр $\alpha$ характеризует ширину пакета.) Разброс значений $k$ вблизи некоторого определенного значения $\bar{k}$ означает, что система отсчета не может быть фиксирована абсолютно точно в квантовой гравитации, и временные интервалы между двумя гиперповерхностями не могут быть измерены с произвольной точностью. Заметим, что в настоящее время публикуется довольно много работ, посвященных квантовым системам отсчета, т. е. системам отчета, подчиняющихся законам квантовой физики [210,211]. Такая система отсчета может находиться в состоянии суперпозиции, например, ее положение может быть определено лишь с некоторой точностью. В нашем случае введение экспоненциального множителя, определяющего разброс значений $k$, делает рассматриваемую систему отсчета квантовой, причем можно предположить, что разброс значений $k$ тем больше, чем дальше мы углубляемся в область, где действует квантовая гравитация.

Можно сказать, что физическая волновая функция $\Phi_k\left(q,t\right)$ описывает относительное состояние физической подсистемы при условии, что система отсчета фиксирована соотношением

$$N - f\left(q\right) = k. \tag{4.6}$$

С точки зрения многомировой интерпретации, каждый элемент суперпозиций (4.4) и (3.46) соответствует отдельной вселенной, но концепция относительных состояний сама по себе *этого не требует*. В суперпозиции (4.4) функция $\xi^{r'}\left(q\right)$ описывает относительное состояние квантовой подсистемы *при условии*, что указатель измерительного прибора находится в положении с координатой $r'$. Различные слагаемые в суперпозиции (4.4) отвечают различным результатам измерений, которые могут быть выполнены в разных вселенных (в случае, если существование многих вселенных согласуются с вашими философскими убеждениями), или же измерения могут быть сделаны *в одной и той же Вселенной* в тождественных физических условиях. Последнее не противоречит копенгагенской интерпретации. Подобным образом, разные слагаемые в суперпозиции (3.46) отвечают различным результатам наблюдений, сделанных в идентичных физических условиях, а именно, в одной и той же системе отсчета (с точностью до малых квантовых флуктуаций), поскольку мы предполагаем, что пакет по $k$ достаточно узок.

Если мы хотим измерить другую физическую величину, скажем, импульс частицы вместо ее координаты, мы получим какую-то другую суперпозицию вместо (4.4) и другой набор относительных состояний, который отвечает новым физическим условиям и изменениям во взаимодействии между квантовой подсистемой и измерительным прибором. Подобным образом, изменение системы отсчета (выбор другого калибровочного условия типа (4.6)) эквивалентно использованию другого базиса (3.34), и в результате мы получим некоторую другую физическую волновую функцию $\Phi_k(q,t)$, описывающую Вселенную с точки зрения наблюдателя в другой системе отсчета. Соответственно, разные наблюдатели будут видеть различные физические явления.

Этот вывод находится в полном согласии с духом общей теории относительности. Хорошо известно, что даже в классической общей теории относительности разные наблюдатели (например, наблюдатель, пересекающий горизонт событий черной дыры, и наблюдатель, находящийся на большом расстоянии от нее) видят разные физические явления. То же самое имеет место в квантовой теории поля на фоне искривленного пространства-времени [173,174]. Можно сказать, что квантовые состояния, фиксируемые различными наблюдателями, "живут" в разных гильбертовых пространствах. Сасскинд и его соавторы [212,213] сформулировали эту идею как принцип дополнительности для черных дыр: наблюдатель, падающий в черную дыру, и удаленный наблюдатель видят физические явления, которые являются дополнительными друг для друга. Этот принцип объединяет два вида дополнительности: дополнительность физических явлений, наблюдаемых в различных системах отсчета, унаследованную от общей теории относительности, и квантовую дополнительность в смысле копенгагенской интерпретации. Мы можем ожидать, что этот принцип будет отражен в полной квантовой теории гравитации.

Наш вывод, таким образом, находится в соответствии с двумя основными принципами копенгагенской интерпретации: принципом дополнительности, а также и с принципом целостности, поскольку в нашем подходе мы рассматриваем целостную систему, включающую физическую Вселенную и наблюдателя, изучающего эту Вселенную. С другой стороны, аналогия между (4.4) и (3.46) позволяет рассматривать наши результаты как математическую реализацию концепции относительных состояний Эверетта. Материал разделов 4.1–4.3 основан на работе автора **[B13]**.

### *4.4. Интерпретация результатов в контексте современной квантовой теории поля*

**4.4.1. Наблюдения следствий квантово-гравитационных явлений как эксперимент "с отложенным выбором".** В предыдущих разделах мы видели, что выбор калибровочного условия играет важную роль в нашем подходе. Например, в разделе 3.3.4 рассматривалось калибровочное условие $Na^3 = 1$, выбор которого эквивалентен введению космологической постоянной в уравнения Эйнштейна, и использование этого условия подразумевает, что в эволюции Вселенной была инфляционная стадия. Таким образом, выбирая это либо другое калибровочное условие, мы выбираем определенную модель эволюции Вселенной.

С другой стороны, мы могли бы получить модель с инфляционной стадией эволюции Вселенной, включив в нее скалярное поле с требуемыми свойствами. С формально-математической точки зрения, эти два способа могут привести к одинаковым результатам. Однако первый способ вызывает вопросы, поскольку существует убеждение, что выбор модели (со скалярным полем или без него) – это поиск объективного описания природы, но теория не должна никоим образом зависеть от выбора калибровочных условий.

Калибровочные условия определяют зависимость временного масштаба от геометрических характеристик пространства, в определенном смысле эти условия определяют структуру пространства-времени. Вводя калибровочные условия, мы *делаем предположение* о том, какова была структура пространства-времени в ранней Вселенной. Подобным образом, выбор модели со скалярным полем подразумевает, что на классическом уровне мы выбрали решение уравнений Эйнштейна с подходящими свойствами (в данном случае – обеспечивающее наличие инфляционной стадии). На квантовом уровне калибровочные условия определяют форму уравнения Шредингера для физической части волновой функции, что, в свою очередь, выделяет допустимые квантовые состояния Вселенной в начале ее эволюции и, в конечном итоге, ее состояние в настоящее время. Возникает впечатление, что, выбирая калибровочные условия, мы влияем на прошлое Вселенной.

Давайте проведем аналогию между этой ситуацией и экспериментом "с отложенным выбором" ("delayed-choice") Уилера [214-216]. В мысленном эксперименте Уилера фотон, испущенный миллионы лет назад, встречает на своем пути массивную галактику, действующую как гравитационная линза. Когда фотон достигает Земли, астрономы могут сделать выбор, что они хотели бы наблюдать: фотон, прошедший слева от массивной галактики, либо справа от нее, либо интерференционную картину. И снова возникает впечатление, что выбор типа эксперимента определяет, по какому пути летел фотон, или же он был в состоянии суперпозиции, следуя сразу по обоим путям.

По моему мнению, мысленный эксперимент Уилера может быть понят наилучшим образом в рамках формализма континуального интегрирования. Мы должны интегрировать по всем возможным путям фотона. Однако, если мы хотим учесть, какой тип эксперимента был выбран, это ограничивает допустимые пути фотона, по которым мы должны интегрировать.

В квантовой теории гравитации нам приходится вводить в континуальный интеграл калибровочные условия. Калибровочные условия также подразумевают некоторые ограничения на возможные пути эволюции Вселенной, на допустимые космологические сценарии. Наблюдая сегодняшнюю Вселенную, мы имеем дело с каким-то вариантом эксперимента "с отложенным выбором". Такие эксперименты показывают, что свойства квантового объекта зависят от всей его истории. Пытаясь объяснить настоящее Вселенной, мы делаем предположения об условиях, которые имели место в ее прошлом. Если мы рассматриваем Вселенную в целом как объект, подчиняющийся квантовым закономерностям, нам не следует удивляться тому, что на ее свойства в прошлом может оказывать влияние настоящее. Это может казаться парадоксальным, но это вполне отвечает духу квантовой теории.

**4.4.2. Неинвариантность вакуума и принцип эквивалентности.** Из квантовой теории поля известно, что если гамильтониан неинвариантен относительно некоторых преобразований, то неинвариантно и основное состояние (вакуум) [217,218,173]. В предлагаемой формулировке гамильтониан в расширенном фазовом пространстве неинвариантен относительно выбора калибровочных условий (системы отсчета). Следовательно, неинвариантны и решения уравнения Шредингера, соответствующие как основному состоянию (состоянию с минимальной энергией), так и другим возможным состояниям.

В квантовой геометродинамике Уилера – Де Витта гамильтониан считается инвариантным, а решения уравнения Уилера – Де Витта соответствуют единственному значению энергии, которое принимается равным нулю. И, хотя уравнение Уилера – Де Витта может иметь различные решения в зависимости от выбора граничных условий, все они предполагаются инвариантными относительно выбора системы отсчета. Посмотрим, насколько это согласуется с тем, что нам известно из квантовой теории поля, а также с принципом эквивалентности.

В разделе 1.5.4 говорилось о приближении Борна – Оппенгеймера для гравитации. Напомним, что основная идея состоит в том, чтобы получить временное уравнение Шредингера для негравитационных полей с медленно меняющимся классическим фоновым гравитационным полем. Волновая функция в этом случае ищется в виде (см., например, [126]):

$$\Psi\left(\gamma_{ij},\phi\right)=\psi\left(\gamma_{ij}\right)\chi\left(\gamma_{ij},\phi\right). \tag{4.7}$$

Здесь $\psi\left(\gamma_{ij}\right)$ – квазиклассическая волновая функция (медленно меняющегося) гравитационного поля, $\chi\left(\gamma_{ij},\phi\right)$ – волновая функция полей материи, обозначенных здесь как $\phi$, распространяющихся на фоне классического гравитационного поля с трехмерной метрикой $\gamma_{ij}$. Полная волновая функция (4.7) удовлетворяет уравнению Уилера – Де Витта.

Волновая функция полей материи может быть разложена в ряд (интеграл) по собственным функциям оператора Лапласа в пространстве положительной (отрицательной, нулевой) кривизны [173], после чего можно ввести фоковский базис в подпространстве состояний полей материи. В этом случае как основное (вакуумное) состояние полей материи, так и все состояния с ненулевым числом частиц будут зависеть от выбора системы отсчета. Действительно, представим себе наблюдателя в лаборатории, находящейся в некоторой области пространства под действием гравитации. Согласно принципу эквивалентности, в этой лаборатории должны наблюдаться такие же явления, как и в лаборатории, движущейся в плоском пространстве со специально подобранным ускорением. Любое изменение состояния лаборатории, находящейся в гравитационном поле, связанное с изменением системы отсчета, эквивалентно изменению ускорения лаборатории, движущейся в плоском пространстве. Как известно, даже в плоском пространстве-времени Минковского невозможно определить вакуумное состояние, инвариантное относительно изменения ускорения системы отсчета, связанной с лабораторией. Это означает, что и в гравитационном поле различным системам отсчета соответствуют разные вакуумные состояния, точнее говоря, – разные гильбертовы пространства состояний полей материи.

Поскольку волновая функция полей материи $\chi\left(\gamma_{ij},\phi\right)$ оказывается неинвариантной относительно выбора системы отсчета, есть ли у нас основания ожидать, что полная волновая функция (4.7) будет инвариантной? Нам представляется, что такие ожидания, т. е. требование инвариантности волнового функционала – решения уравнения Уилера – Де Витта – не имеет достаточного основания.

**4.4.3. Квантовая гравитация и унитарность.** Как мы видели ранее, в разделах 3.3.7–3.3.8, развиваемый здесь подход к квантованию гравитации приводит к представлению об эволюции, которое находит отражение в формулах типа (3.99), (3.116), где $\mathcal{P}\left(t\right)$ – оператор перехода к базису в другом гильбертовом пространстве, соответствующем измененным калибровочным условиям. В принципе, к аналогичной формуле (3.123) мы придем, если примем гипотезу Сахарова о наличии в нашей Вселенной чисто пространственных областей, но мы сейчас не будем обсуждать такое предположение в силу невозможности его проверить на современном уровне развития науки.

Что же касается формулы (3.99), то она вытекает из нашего основного результата – уравнения Шредингера для физической части волновой функции, форма которого зависит от выбора калибровочных условий, – и предположения о том, что топология Вселенной может быть достаточно сложной. Действительно, только в ряде простых моделей, которые соответствуют топологии $R\times\Sigma$, где $\Sigma$ – некоторое трехмерное многообразие, мы можем наложить одинаковые калибровочные условия во всем пространстве в любой момент времени. И, хотя в этой диссертации мы, в основном, ограничивались рассмотрением именно таких моделей, мы должны иметь в виду более общие ситуации.

Поскольку речь идет о переходе к базису в другом гильбертовом пространстве, достаточно ясно, что $\mathcal{P}(t)$ не является унитарным оператором, гильбертовы пространства унитарно-неэквивалентны. Можно сказать, что нарушение унитарности в нашем подходе является следствием нарушения калибровочной инвариантности. Имеются различные точки зрения на нарушение унитарности. С одной стороны, требование унитарности – одно из фундаментальных требований, которым должна удовлетворять матрица рассеяния в квантовой теории поля [151-153]. Следует ли его распространять не только на матрицу рассеяния, но и на квантовую теорию поля в целом, включая квантовую гравитацию? После открытия Хокингом излучения черных дыр нарушение унитарности допускалось и обсуждалось как Хокингом, так и другими авторами (см., например, [219,220]) в связи с так называемым информационным парадоксом. Большинство физиков восприняли возможное нарушение унитарности крайне негативно. Позднее было предложено решение информационного парадокса, основанное на так называемом АдС/КТП соответствии (AdS/CFT correspondence) [221-224], гипотетическом соответствии (дуальности) между теорией струн в пространстве анти-де Ситтера и конформной теорией поля на границе пространства анти-де Ситтера. Поскольку конформная теория поля является унитарной, теория струн в пространстве анти-де Ситтера также должна быть унитарной, и информация должна сохраняться.

Возникает вопрос, является ли обязательным требование, что квантовая теория поля должна быть унитарной, несмотря на повсеместное присутствие в нашем мире необратимых процессов? По мнению нобелевского лауреата Ильи Пригожина, симметричная во времени квантовая динамика, описываемая уравнением Шредингера, должна быть обобщена таким образом, чтобы включить описание необратимых процессов. Чтобы это сделать, необходимо расширить класс допустимых квантовых операторов за пределы только эрмитовых операторов и включить в рассмотрение неунитарные преобразования векторов состояния или матриц плотности [225-228]. В ряде своих работ [229,226] Пригожин вводит такие операторы, однако это выглядит несколько искусственным. Было бы желательно иметь такую теорию, где бы не было необходимости вводить "руками" некое взаимодействие, которое бы приводило к нарушению унитарной эволюции, и существуют какие-то фундаментальные причины, приводящие к появлению неэрмитовых операторов, которые имеет в виду Пригожин. Возможно, такой теорией может стать будущая квантовая теория гравитации.

Другой нобелевский лауреат, Роджер Пенроуз, в многих своих статьях и книгах [230-237,17] связывал понимание необратимости физических процессов и, в том числе, решение проблемы редукции волновой функции, также понимаемой как необратимый процесс, с прогрессом в построении квантовой теории гравитации. Пенроуз выдвинул гипотезу о так называемой "объективной редукции", в основу которой положена идея, что при измерении квантовый объект находится в запутанном состоянии с гравитационным полем. Если говорить точнее, при измерении определенному состоянию квантового объекта отвечает определенное состояние прибора, а поскольку прибор является макроскопическим и, вообще говоря, обладает массой и создает гравитационное поле, каждому состоянию квантового объекта отвечает определенное состояние гравитационного поля. Если квантовый объект первоначально находился в состоянии суперпозиции, ему отвечает суперпозиция гравитационных полей. Гипотеза объективной редукции утверждает, что суперпозиция гравитационных полей нестабильна, и происходит редукция к одному из возможных состояний в течение времени $\Delta t$, определяемом соотношением $\Delta t \cdot \Delta E \sim \hbar$, где $\Delta E$ – неопределенность энергии гравитационных полей. Эта гипотеза, конечно, не является решением проблемы редукции волновой функции, так как не ясно, почему суперпозиция гравитационных полей нестабильна, почему редукция должна произойти именно в течение указанного времени и т. д.

Однако интуиция Пенроуза о том, что квантовая гравитация играет важную роль для понимания редукции волновой функции и необратимых процессов вообще, возможно, верна. Развиваемый здесь подход к квантованию гравитации приводит нас к картине, выражаемой формулой типа (3.116), в которой унитарная эволюция прерывается неунитарными преобразованиями вектора состояния. Таким образом, данный подход дает аргументы в пользу того, что квантовая теория гравитация должна быть неунитарной, но, с другой стороны, приводит нас к возможному источнику необратимых процессов во Вселенной.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В настоящей диссертации представлен подход к квантованию гравитации, основанный на формализме расширенного фазового пространства. То, что здесь изложено, ни в коей мере не может претендовать на полную, завершенную теорию квантовой гравитации. Это попытка посмотреть на вещи с нового ракурса, учесть особенности теории гравитации и критически оценить существующие теоретические методы, которые были успешны в отношении негравитационных полей, но применять которые к гравитации нет достаточных оснований.

2. Несмотря на то, что предложенный здесь подход не претендует на полную квантовую теорию гравитации, он является самосогласованным и включает в себя три части: 1) построение гамильтоновой динамики в расширенном фазовом пространстве, которое предваряет формулировку квантовой теории; 2) собственно процедура квантования, которая включает в себя вывод уравнения Шредингера и анализ его общей структуры, а также рассмотрение ряда следствий, в том числе, влияния выбранных калибровочных условий на характер космологической эволюции; ситуации, когда Вселенная имеет нетривиальную топологию, и в разных областях пространства-времени наложены различные калибровочные условия; гипотетической ситуации, когда физический континуум состоит из областей с различной сигнатурой метрики; 3) интерпретацию полученных результатов.

3. Предложенная гамильтонова динамика в расширенном фазовом пространстве является альтернативой обобщенной гамильтоновой динамики Дирака и основывается на равноправном рассмотрении физических, калибровочных и духовых степеней свободы. Возможность построения гамильтониана в расширенном фазовом пространстве по тому же правилу, что и в случае невырожденной теории поля (для систем без связей), обеспечивается введением недостающих обобщенных

скоростей в эффективный лагранжиан с помощью калибровочных условий в дифференциальной форме.

4. В новой формулировке гамильтоновой динамики преобразования в расширенном фазовом пространстве, затрагивающие калибровочные степени свободы, являются каноническими, что можно продемонстрировать для полной теории гравитации.

5. Генератором БРСТ-преобразований в новой формулировке гамильтоновой динамики является заряд, построенный по теореме Нетер, используя глобальную БРСТ-симметрию теории. Он генерирует преобразования полевых переменных в расширенном фазовом пространстве, которые совпадают с калибровочными преобразованиями в лагранжевом формализме. Полученный генератор в случае гравитации не совпадает с БРСТ-генератором, построенным по методу Баталина, Фрадкина и Вилковыского, что объясняется различием между группой калибровочных преобразований и группой преобразований, генерируемых связями.

6. В этой работе предполагается, что гравитирующая система (Вселенная) не имеет асимптотических состояний. Следовательно, использование асимптотических граничных условий в континуальном интеграле неправомерно. В свою очередь, это приводит к тому, что уравнение Шредингера, выведенное из континуального интеграла, и волновая функция, удовлетворяющая этому уравнению, оказываются зависимыми от выбранных калибровочных условий. Главную роль в предлагаемом подходе играет физическое уравнение Шредингера для физической части волновой функции, которая зависит только от физических степеней свободы.

7. В предлагаемом подходе уравнение Уилера – Де Витта представляет собой частный случай физического уравнения Шредингера, соответствующий определенному выбору параметризации гравитационных переменных, определенному выбору калибровочных условий и

требованию независимости физической части волновой функции от времени.

8. Система отсчета интерпретируется (следуя Ландау и Лифшицу) как среда, заполняющая все пространство. На примере модели замкнутой изотропной Вселенной демонстрируется, что, выбирая разные калибровочные условия, можно описывать среды с различными уравнениями состояния. Эта среда проявляет себя как фактор космологической эволюции. Иными словами, выбирая те или иные калибровочные условия, можно выбрать определенный космологический сценарий, например сценарий, в котором инфляционная стадия сменяется медленным фридмановским расширением.

9. Даже малое изменение калибровочных условий влечет за собой изменение оператора Гамильтона в физическом уравнении Шредингера. Решения уравнения, соответствующего измененным калибровочным условиям, будут существовать в другом гильбертовом пространстве.

10. Если пространство-время обладает нетривиальной топологией, и в различных областях пространства-времени нужно накладывать разные калибровочные условия, на границах между такими областями унитарная эволюция нарушается. Изменение калибровочных условий (системы отсчета, которая играет роль прибора в гравитации) заставляет нас перейти к другому гильбертову пространству. В такие моменты происходит нарушение унитарной эволюции.

11. Предлагаемый подход позволяет предложить математическую реализацию гипотезы Сахарова о существовании областей с различной сигнатурой метрики. Сигнатура в различных областях физического континуума может быть зафиксирована специальными калибровочными условиями на компоненты метрического тензора. Существование чисто пространственной области с сигнатурой (+, +, +, +) внутри пространства-времени может приводить к дополнительной квантовой

неопределенности из-за разницы в состояниях на границах этой области.

12. В данной работе рассмотрена гипотеза о рождении Вселенной в результате изменения сигнатуры метрики. Исследуются два случая: когда компонента $g_{00}$ непрерывна или терпит разрыв. Если компонента $g_{00}$ терпит разрыв, уравнение Шредингера имеет особую точку $a=0$ ( $a$ – масштабный фактор, выраженный в планковских единицах). В случае, когда компонента $g_{00}$ непрерывна, уравнение Шредингера имеет две особые точки: $a=0$ и $a=1$. В обоих случаях волновая функция остается регулярной в окрестности особых точек.

13. Аргументируется, что для понимания результатов предлагаемого подхода к квантованию гравитации может быть использована копенгагенская интерпретация квантовой теории, и она не противоречит концепции "относительных состояний" Эверетта. Представление об "относительных состояниях" и многомировая интерпретация являются двумя разными концепциями.

14. Общее решение уравнения Шредингера может быть интерпретировано, опираясь на концепцию "относительных состояний" Эверетта. Можно сказать, что физическая волновая функция описывает относительное состояние физической подсистемы при условии, что система отсчета фиксирована определенными калибровочными условиями.

## ЛИТЕРАТУРА


1. P. A. M. Dirac, Generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math. – 1950 – V. 2 – P. 129-148. Русский перевод: П. А. М. Дирак, Обобщенная гамильтонова динамика // Собрание научных трудов – Москва – "Физматлит" – 2004 – Т. 3 – С. 203–223.
2. P. A. M. Dirac, Generalized Hamiltonian dynamics // Proc. Roy. Soc. A – 1958 – V. 246 - P. 326-332. Русский перевод: П. А. М. Дирак, Обобщенная гамильтонова динамика // Собрание научных трудов – Москва – "Физматлит" – 2004 – Т. 3 – С. 308–314.
3. P. A. M. Dirac, Lectures on quantum mechanics // New York – Yeshiva University – 1964. Русский перевод: П. А. М. Дирак, Лекции по квантовой механике // Собрание научных трудов – Москва – "Физматлит" – 2002 – Т. 1 – С. 386–432.
4. P. A. M. Dirac, The theory of gravitation in Hamiltonian Form // Proc. Roy. Soc. A – 1958 – V. 246 - P. 333-343. Русский перевод: П. А. М. Дирак, Теория гравитации в гамильтоновой форме // Собрание научных трудов – Москва – "Физматлит" – 2005 – Т. 4 – С. 239–254.
5. R. Arnowitt, C. Deser and C. W. Misner, The dynamics of general relativity // Gravitation: an introduction to current research (ed. L. Witten) – New York – Wiley – 1962 – P. 227-265. Русский перевод: Р. Арновитт, С. Дизер и К. В. Мизнер, Динамика общей теории относительности // Эйнштейновский сборник 1967 (ред. И. Е. Тамм и Г. И. Наан) – Москва – "Наука" – 1967 – С. 233–286.
6. B. S. DeWitt, Quantum theory of gravity. I. The canonical theory // Phys. Rev. – 1967 – V. 160 – P. 1113-1148.
7. J. B. Hartle, S. W. Hawking, Wave function of the Universe // Phys. Rev. D – 1983 – V. 28 – P. 2960-2975.
8. A. Vilenkin, Birth of inflationary universes // Phys. Rev. D – 1983 – V. 27 – P. 2848-2855.
9. L. D. Faddeev, V. N. Popov, Feynman diagrams for the Yang – Mills field // Phys. Lett. B – 1967 – V. 25 – P. 29-30.
10. E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky, Quantization of relativistic systems with constraints // Phys. Lett. B – 1975 – V. 55 – P. 224-226.

11. I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, Relativistic S-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints // Phys. Lett. B – 1977 – V. 69 – P. 309-312.

12. E. S. Fradkin, T. E. Fradkina, Quantization of relativistic systems with boson and fermion first- and second-class constraints // Phys. Lett. B – 1978 – V. 72 – P. 343-348.

13. R. Gambini, J. Pullin, A first course in loop quantum gravity // Oxford – Oxford University Press – 2011.

14. C. Rovelli, F. Vidotto, Covariant loop quantum gravity. An elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory // Cambridge – Cambridge University Press – 2015.

15. J. Henson, The causal set approach to quantum gravity // Approaches to quantum gravity. Toward a new understanding of space, time and matter (ed. D. Oriti) – Cambridge University Press – 2009.

16. B. Zwiebach, A first course in string theory // Cambridge – Cambridge University Press – 2009. Русский перевод: Б. Цвибах, Начальный курс теории струн // Москва – "Едиториал УРСС" – 2011.

17. R. Penrose, Fashion, Faith, and Fantasy in the New Physics of the Universe // Princeton – Princeton University Press – 2016. Русский перевод: Р. Пенроуз, Вера, мода, фантазия и новая физика Вселенной // СПб – "Питер" – 2020.

18. A. Pais, Subtle is the Lord: The science and the life of Albert Einstein // Oxford – Oxford University Press – 1982. Русский перевод: А. Пайс, Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна // Москва – "Наука" – 1989.

19. S. W. Hawking, Particle creation by black holes // Commun. Math. Phys. – 1975 – V. 43 – P. 199-220. Русский перевод: С. Хокинг, Рождение частиц на черных дырах // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сборник статей – Москва – "Мир" – 1979 – С. 479–509.

20. L Rosenfeld, Zur Quantelung der Wellenfelder // Ann. der Physik – 1930 – B. 5 – S. 113-152.

21. L Rosenfeld, Uber die Gravitationswirkungen des Lichtes // Z. Physik – 1930 – B. 65 – S. 589-599.

22. М. П. Бронштейн, Квантование гравитационных волн // ЖЭТФ – 1936 – Т. 6 – С. 195–236.

23. J. L. Anderson, P. G. Bergmann, Constraints in covariant field theories // Phys. Rev. – 1951 – V. 83 – P. 1018-1025.

24. P. G. Bergmann, R. Schiller, Classical and quantum field theories in the Lagrangian formalism // Phys. Rev. – 1953 – V. 89 – P. 4-16.

25. П. А. М. Дирак, Воспоминания о необычайной эпохе // Москва – "Наука" – 1990.

26. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, Gravitation // San Francisco – W. H. Freeman and Company – 1973. Русский перевод: Ч. Мизнер, К. Торн и Дж. Уилер, Гравитация // Москва – "Мир" – 1977 – Т. 1–3.

27. L. Castellani, Symmetries in constrained Hamiltonian systems // Ann. Phys. – 1982 – V. 143 – P. 357–371.

28. R. Banerjee, H. J. Rothe and K. D. Rothe, Hamiltonian approach to Lagrangian gauge symmetries // Phys. Lett. B – 1999 – V. 463 – P. 248–251.

29. P. Mukherjee and A. Saha, Gauge invariances vis-à-vis diffeomorphisms in second-order metric gravity: a new Hamiltonian approach // Int. J. Mod. Phys. A – 2009 – V. 24 – P. 4305-4315.

30. Л. Д. Фаддеев, Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна // УФН – 1982 – Т. 136 – С. 435–457.

31. J. A. Wheeler, Einsteins Vision // Berlin–Heidelberg–New York – Springer-Verlag – 1968. Русский перевод: Дж. А. Уилер, Предвидение Эйнштейна // Москва – "Мир" – 1970.

32. C. Rovelli, The strange equation of quantum gravity // Class. Quantum Grav. – 2015 – V. 32 – 124005.

33. C. Kiefer, Quantum gravity // 2nd edition – Oxford University Press – 2007.

34. P. W. Higgs, Integration of secondary constraints in quantized general relativity // Phys. Rev. Lett. – 1958 – V. 1 – P. 373-374.

35. A. O. Barvinsky, Operator ordering in theories subject to constraints of the gravitational type // Class. Quantum Grav. – 1993 – V. 10 – P. 1985-1999.

36. S. W. Hawking, D. N. Page, Operator ordering and the flatness of the Universe // Nucl. Phys. B – 1986 – V. 264 – P. 185-196.

37. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля (Теоретическая физика, Т. 2) // Москва – "Наука" – 1988.

38. K. V. Kuchař, Time and interpretations of quantum gravity // Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics, Winnipeg, MB, Canada, 16–18 May 1991 (eds. G. Kunstatter, D. Vincent and J. Williams) – Singapore – World Scientific – 1992.

39. C. Isham, Canonical quantum gravity and the problem of time // Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theory (eds. L. A. Ibort and M. A. Rodríguez) – Dordrecht – Kluwer – 1993 – P. 157–287.
40. A. Vilenkin, Boundary conditions in quantum cosmology // Phys. Rev. D – 1986 – V. 33, - P. 3560-3569.
41. A. Vilenkin, Quantum cosmology and the initial state of the Universe // Phys. Rev. D – 1988 – V. 37 – P. 888-897.
42. A. Vilenkin, Interpretation of the wave function of the Universe // Phys. Rev. D – 1989 – V. 39 – P. 1116-1122.
43. J. B. Hartle, Quantum cosmology: Problems for the 21st century // Proc. of the 11th Nishinomiya – Yukawa Symposium (eds. by K. Kikkawa, H. Kunimoto, H. Ohtsubo) – Singapore – World Scientific – 1998.
44. S. W. Hawking, The path integral approach to quantum gravity // General relativity: An Einstein centenary survey (eds. S. W. Hawking, W. Israel) – Cambridge University Press – 1979 – P. 746-789. Русский перевод: С. Хокинг, Интегралы по траекториям в приложении к квантовой гравитации // Общая теория относительности (ред. С. Хокинг и В. Израэль) – Москва – "Мир" – 1983 – С. 363–406.
45. J. Barrett, The Euclidean contour rotation in quantum gravity // Seminar by Prof. John Barrett (University of Nottingham), https://youtu.be/3KedevHN5bw.
46. T.-P. Cheng, L.-F. Li, Gauge theory of elementary particle physics // Oxford – Clarendon Press – 1984. Русский перевод: Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли, Калибровочные теории в физике элементарных частиц // Москва – "Мир" – 1987.
47. A. Linde, Quantum creation of an open inflationary universe // Phys. Rev. D – 1998 – V. 58 – 083514.
48. А. Д. Линде, Физика элементарных частиц и инфляционная космология // Москва – "Наука" – 1990.
49. S. W. Hawking and N. Turok, Comment on "Quantum creation of an open universe", by Andrei Linde // arXiv: gr-qc/9802062.
50. Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, Калибровочные поля // Москва – "Атомиздат" – 1980.
51. А. О. Барвинский, В. Н. Пономарев, Каноническое квантование гравитации и квантовая геометродинамика // Изв. вузов. Физика – 1986 – №3 – С. 37-51.

52. A. O. Barvinsky and V. N. Ponomariov, Quantum geometrodynamics: the path integral and the initial value problem for the wave function of the Universe // Phys. Lett. B – 1986 – V. 167 – P. 289-294.
53. A. O. Barvinsky, Unitarity approach to quantum cosmology and its basic issues: interpretation and calculation of the cosmological wave function // Proceed. of the Fourth Moscow Seminar on Quantum Gravity (eds. M. A. Markov, V. A. Berezin, V. P. Frolov) – Singapore – World Scientific – 1988.
54. C. Becchi, A. Roust and R. Stora, The abelian Higgs Kibble model, unitarity of the S-operator // Phys. Lett. B. – 1974 – V. 52 – P. 344-346.
55. I.V. Tyutin, Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism // Lebedev Physics Institute preprint – 1975 – 39; arXiv:0812.0580.
56. M. Hennaux, Hamilton form of the path integral for theories with a gauge freedom // Phys. Rep. – 1985 – V. 126 – P. 1-66.
57. J. J. Halliwell, Derivation of the Wheeler–DeWitt equation from a path integral for minisuperspace models // Phys. Rev. D – 1988 – V. 38 – P. 2468–2481.
58. I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Gauge algebra and quantization // Phys. Lett. B – 1981 – V. 102 – P. 27-31.
59. N. Kiriushcheva and S. V. Kuzmin, The Hamiltonian formulation of general relativity: myth and reality // Central Eur. J. Phys. – 2011 – V. 9 – P. 576-615; arXiv: gr-qc/0809.0097.
60. A. M. Frolov, N. Kiriushcheva, and S. V. Kuzmin, On canonical transformations between equivalent Hamiltonian formulations of general relativity // Grav. Cosmol. – 2011 – V. 17 – P. 314-323.
61. N. Kiriushcheva, G. Komorowski and S. V. Kuzmin, Comment on "Hamiltonian formulation for the theory of gravity and canonical transformations in extended phase space" by T. P. Shestakova // 2011 – arXiv: 1107.2981.
62. N. Kiriushcheva, G. Komorowski and S. V. Kuzmin, Lagrangian symmetries of the ADM action. Do we need a solution to the "non-canonicity puzzle"? // 2011 – arXiv: 1108.6105.
63. N. Kiriushcheva, G. Komorowski and S. V. Kuzmin, Remarks on the "non-canonicity puzzle": Lagrangian symmetries of the Einstein-Hilbert action // Int. J. Theor. Phys. – 2012 – V. 51 – P. 2015-2030.
64. S. W. Hawking, The quantum state of the Universe // Nucl. Phys. B – 1984 – V. 239 – P. 257-276.

65. S. W. Hawking, Quantum cosmology // 300 years of gravitation (eds. S. W. Hawking, W. Israel) – Cambridge University Press – 1987.
66. D. N. Page, The quantum state of the Cosmos // Proceed. of the Fourth Moscow Seminar on Quantum Gravity (eds. M. A. Markov, V. A. Berezin, V. P. Frolov) – Singapore – World Scientific – 1988.
67. T. Vachaspati and A. Vilenkin, Uniqueness of the tunneling wave function of the Universe // Phys. Rev. D – 1988 – V. 37 P. 898-903.
68. S. W. Hawking and N. Turok, Open inflation without false vacua // Phys. Lett. B – 1998 – V. 425 – P. 25-32.
69. S. W. Hawking and N. Turok, Open inflation, the four form and the cosmological constant // Phys. Lett. B – 1998 – V. 432 – P. 271-278.
70. A. Vilenkin, Singular instantons and creation of open universes // Phys. Rev. D – 1998 – V. 57 – P. 7069-7070.
71. A. Vilenkin, Open universes, eternal inflation, and the anthropic principle // Int. J. Theor. Phys. – 1999 -V. 38 – P. 3135-3145.
72. R. Bousso and A. Linde, Quantum creation of a universe with $\Omega \neq 1$: singular and non-singular instantons // Phys. Rev. D – 1998 – V. 58 – 083503.
73. W. G. Unruh, On the Hawking – Turok solution to the open universe wave function // 1998 – arXiv: gr-qc/9803050.
74. A. Vilenkin, Approaches to quantum cosmology // Phys. Rev. D – 1994 – V. 50 – P. 2581-2594.
75. S. W. Hawking and R. Penrose, The nature of space and time // Princeton University Press – 1996. Русский перевод: С. Хокинг, Р. Пенроуз, Природа пространства и времени // Ижевск – НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" – 2000.
76. А. Д. Сахаров, Космологические переходы с изменением сигнатуры метрики // ЖЭТФ – 1984 – Т. 87 – С. 375–383.
77. G. Ellis, A. Sumeruk, D. Coule, C. Hellaby, Change of signature in classical relativity // Class. Quantum Grav. – 1992 – V. 9 – P. 1535–1554.
78. S. A. Hayward, Junction conditions for signature change // 1993 – arXiv: gr-qc/9303034.
79. J. Greensite, Dynamical origin of the Lorentzian signature of spacetime // Phys. Lett. B – 1993 – V. 300 – P. 34–37.
80. A. Carlini and J. Greensite, Why is spacetime Lorentzian? // Phys. Rev. D – 1994 – V. 49 – P. 866–878.

81. S. D. Odintsov, A. Romeo and R. W. Tucker, Dynamical generation of spacetime signature by massive quantum fields on a topologically non-trivial background // Class. Quantum Grav. – 1994 – V. 11 – P. 2951–2959.

82. M. Kriele and J. Martin, Black holes, cosmological singularities and change of signature // Class. Quantum Grav. – 1995 – V. 12 – P. 503–511.

83. Б. Л. Альтшулер, А. О. Барвинский, Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства-времени // УФН – 1996 – Т. 166 – С. 459–492.

84. T. Dray, G. Ellis, C. Hellaby and C. A. Manogue, Gravity and signature change // Gen. Rel. Grav. – 1997 – V. 29 – P. 591–597.

85. F. Zhang, Alternative route towards the change of metric signature // Phys. Rev. D – 2019 – V. 100 – 064043.

86. M. Bojowald, S. Brahma, Loop quantum gravity, signature change, and the no-boundary proposal // Phys. Rev. D – 2020 – V. 102 – 106023.

87. A. R. Ziyaee, M. Mohsenzadeh and E. A. Yusofi, A possible symmetry and role for Euclidean space-time in cosmology // New Astron. – 2021 – V. 89 – 101635.

88. N. Caderni and M. Martellini, Third quantization formalism for Hamiltonian cosmologies // Int. J. Theor. Phys. – 1984 – V. 23 – P. 233-249.

89. V. A. Rubakov, On third quantization and the cosmological constant // Phys. Lett. B – 1988 – V. 214 – P. 503–507.

90. M. McGuigan, Third quantization and the Wheeler – DeWitt equation // Phys. Rev. D – 1988 – V. 38 – P. 3031-3051.

91. M. McGuigan, Universe creation from the third quantized vacuum // Phys. Rev. D – 1989 – V. 39 – P. 2229-2233.

92. M. McGuigan, Universe decay and changing the cosmological constant // Phys. Rev. D – 1990 – V. 41 – P. 418-430.

93. A. Hosoya and M. Morikawa, Quantum field theory of the Universe // Phys. Rev. D – 1989 – V. 39 – P. 1123-1129.

94. S. J. Robles-Pérez, Quantum cosmology with third quantisation // Universe – 2021 – V. 7 – 404.

95. C. Kiefer, Conceptual issues in quantum cosmology // Towards Quantum Gravity. Proceeding of the XXXV International Winter School on Theoretical Physics, Polanica, Poland, 2–11 February 1999 (ed. J. Kowalski-Glikman) – Lecture Notes in Physics – V. 541 – Springer – Berlin/Heidelberg – 2000 – P. 158–187.

96. C. Rovelli, Quantum gravity – Cambridge University Press – 2007.

97. N. Campbell, Time and chance // Philos. Mag. – 1926 – V. 1 – P. 1106–1117.

98. N. Bohr, Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics // A. Einstein, philosopher-scientist – USA – Evanston – 1949 – P. 201-241. Русский перевод: Н. Бор, Дискуссии с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике // Избранные научные труды – Т. 2 – Москва – "Наука" – 1971 – С. 399–433.

99. N. Bohr, Quantum physics and philosophy // Philosophy in the mid-century. A survey Italy – Firenze – 1958 – P. 308—314. Русский перевод: Н. Бор, Квантовая физика и философия // Избранные научные труды – Т. 2 – Москва – "Наука" – 1971 – С. 526–532.

100. S. W. Hawking, The future of quantum cosmology // Structure Formation in the Universe (eds. R. G. Crittenden and N. G. Turok) – NATO Science Series C – the Netherland – Dordrecht – Springer – 2001 – P. 75–89.

101. S. W. Hawking, Oxford Union speech – 2016 – https://www.hawking.org.uk/in-words/speeches/speech-5.

102. Б. Г. Кузнецов, Галилей // Москва – ЛЕНАНД – 2019.

103. Л. С. Полак, Людвиг Больцман: 1866–1906. Исследователь, педагог, борец за науку // Москва – ЛЕНАНД – 2020.

104. U. H. Gerlach, Derivation of the ten Einstein equations from the semiclassical approximation to quantum geometrodynamics // Phys. Rev. – 1969 – V. 177 – P. 1929-1941.

105. V. G. Lapchinsky and V. A. Rubakov, Canonical quantization of gravity and quantum field theory in curved space-time // Acta Phys. Pol. B – 1979 – V. 10 – P. 1041-1048.

106. T. Padmanabhan, Semiclassical approximations for gravity and the issue of backreaction // Class. Quantum Grav. – 1989 – V. 6 – P. 533-555.

107. M. Born and R. Oppenheimer, Zur Quantentheorie der Molekeln // Ann. Phys. (Berlin) – 1927 – V. 389 – P. 457-484.

108. T. P. Singh, Gravity induced corrections to quantum mechanical wavefunctions // Class. Quantum Grav. – 1990 – V. 7 – P.  L149-L154.

109. C. Kiefer and M. Krämer, Quantum gravitational contributions to the cosmic microwave background anisotropy spectrum // Phys. Rev. Lett. – 2012 – V. 108 – 021301.

110. C. Kiefer and M. Krämer, Can effects of quantum gravity be observed in the cosmic microwave background? // Int. J. Mod. Phys. D – 2012 – V. 21 – 1241001.

111. E. Y. S. Chua and C. Callender, No time for time from no-time // Philos. Sci. – 2021 – V. 88 – P. 1172–1184.

112. C. Kiefer and T. P. Singh, Quantum gravitational corrections to the functional Schrödinger equation // Phys. Rev. D – 1991 – V. 44 – P. 1067-1076.

113. A. Tronconi, G. P. Vacca and G. Venturi, Inflaton and time in the matter-gravity system // Phys. Rev. D – 2003 – V. 67 – 063517.

114. D. Brizuela, C. Kiefer and M. Krämer, Quantum-gravitational effects on gauge-invariant scalar and tensor perturbations during inflation: The slow-roll approximation // Phys. Rev. D – 2016 – V. 94 – 123527.

115. C. Kiefer and D. Wichmann, Semiclassical approximation of the Wheeler – DeWitt equation: arbitrary orders and the question of unitarity // Gen. Relativ. Gravit. – 2018 – V. 50 – 66.

116. A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi and G. Venturi, Signatures of quantum gravity in a Born – Oppenheimer context // Phys. Lett. B – 2014 – V. 734 – P. 72-78.

117. A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi and G. Venturi, The Born – Oppenheimer method, quantum gravity and matter // Class. Quantum Grav. – 2018 – V. 35 – 015012.

118. A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, T. Vardanyan and G. Venturi, Quantum gravity, time, bounces, and matter // Phys. Rev. D – 2018 – V. 97 – 123517.

119. A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, T. Vardanyan and G. Venturi, Time in quantum theory, the Wheeler – DeWitt equation and the Born – Oppenheimer approximation // Int. J. Mod. Phys. D – 2019 – V. 28 – 1950073.

120. A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi and G. Venturi, Quantum cosmology and the inflationary spectra from a nonminimally coupled inflaton // Phys. Rev. D – 2020 – V. 101 – 023534.

121. A. Yu. Kamenshchik, A. Tronconi and G. Venturi, The Born – Oppenheimer approach to quantum cosmology // Class. Quantum Grav. – 2021 – V. 38 – 155011.

122. L. Chataignier and M. Krämer, Unitarity of quantum gravitational corrections to primordial fluctuations in the Born – Oppenheimer approach // Phys. Rev. D – 2021 – V. 103 – 066005.

123. C. Kiefer and P. Peter, Time in quantum cosmology // Universe – 2022 – V. 8 – 36.

124. M. De Angelis and G. Montani, Dynamics of quantum anisotropies in a Taub universe in the WKB approximation // Phys. Rev. D – 2020 – V. 101 – 103532.

125. F. Di Gioia, G. Maniccia, G. Montani and J. Niedda, Nonunitarity problem in quantum gravity corrections to quantum field theory with Born-Oppenheimer approximation // Phys. Rev. D – 2021 – V. 103 – 103511.

126. G. Maniccia and G. Montani, Quantum gravity corrections to the matter dynamics in the presence of a reference fluid // Phys. Rev. D – 2022 – V. 105 – 086014.

127. G. Maniccia, M. De Angelis and G. Montani, WKB approaches to restore time in quantum cosmology: predictions and shortcomings // Universe – 2022 – V. 8 – 556.

128. G. Maniccia, G. Montani and L. Torcellini, Study of the inflationary spectrum in the presence of quantum gravity corrections // Universe – 2023 – V. 9 – 169.

129. Approaches to quantum gravity: Towards a new understanding of space, time and matter (ed. D. Oriti) – Cambridge University Press – 2009.

130. Beyond spacetime: The foundations of quantum gravity (eds. N. Haggett, K. Matsubara and C. Wüthrich) – Cambridge University Press – 2020.

131. Quantum gravity in a laboratory? (eds. N. Haggett, N. Linnemann, M. D. Schneider) – Cambridge University Press – 2023.

132. P. van Nieuwenhuizen, Supergravity // Phys. Rep. – 1981 – V. 68 – P. 189-398.

133. P. West, Introduction to supersymmetry and supergravity (revised and extended 2nd edition) // Singapore – World Scientific – 1990. Русский перевод: П. Уэст, Введение в суперсимметрию и супергравитацию // Москва – "Мир" – 1989.

134. M. Kaku, Introduction to superstrings // New York – Springer-Verlag – 1988. Русский перевод: М. Каку, Введение в теорию суперструн // Москва – "Мир" – 1999.

135. С. В. Кетов, Введение в квантовую теорию струн и суперструн // Новосибирск – "Наука" – 1990.

136. A. Ashtekar, New variables for classical and quantum gravity // Phys. Rev. Lett. – 1986 – V. 57 – P. 2244–2247.

137. A. Ashtekar, M. Bojowald and J. Lewandowski, Mathematical structure of loop quantum cosmology // Adv. Theor. Math. Phys. – 2003 – V. 7 – P. 233–268.

138. M. Bojowald, Loop quantum cosmology // Living Rev. Rel. – 2008 – V. 11 – 4.

139. A. Ashtekar and P. Singh, Loop quantum cosmology: A status report // Class. Quantum Grav. – 2011 – V. 28 – 213001.

140. I. Agullo, A. Wang and E. Wilson-Ewing, Loop quantum cosmology: relation between theory and observations // 2023 – arXiv: 2301.10215.
141. B. Elizaga Navascués and G. A. Mena Marugán, Hybrid loop quantum cosmology: An overview // Front. Astron. Space Sci. – 2021 – V. 8 – 624824.
142. C. Rovelli, Loop quantum gravity // Living Rev. Rel. – 2008 – V. 11 – 5.
143. C. Rovelli, Loop quantum gravity: the first 25 years // Class. Quantum Grav. – 2011 – V. 28 – 153002.
144. A. Ashtekar and E. Bianchi, A short review of loop quantum gravity // Rep. Prog. Phys. – 2021 – V. 84 – 042001.
145. H. Nicolai, K. Peeters and M. Zamaklar, Loop quantum gravity: an outside view // Class. Quantum Grav. – 2005 – V. 22 – P. R193–R247
146. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика (Теоретическая физика, Т. 1) // Москва – "Наука" – 1988.
147. L. H. Ryder, Quantum field theory // Cambridge – Cambridge University Press – 1996. Русский перевод: Л. Райдер, Квантовая теория поля // Москва – "Платон" – 1998.
148. A. Peres, On Cauchy’s problem in general relativity // Nuovo Cimento – 1962 – V. 26 – P. 53-62.
149. E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem // Ann. Phys. – 1926 – B. 79 – S. 361-376. Русский перевод: Э. Шредингер, Квантование как задача о собственных значениях // Избранные труды по квантовой механике / Москва – "Наука" – 1976 – С. 9-20.
150. Д. М. Гитман и И. В. Тютин, Каноническое квантование полей со связями // Москва – "Наука" – 1986.
151. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Квантовые поля // Москва – "Наука" – 1980.
152. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей // Москва – "Наука" – 1984.
153. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля // Москва – "Наука" – 1969.
154. S. Tomonaga, On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields // Prog. Theor. Phys. – 1946 – V. 1 – P. 27-42.
155. R. P. Feynman, Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. – 1948 – V. 20 – P. 367–387. Русский перевод: Р. Фейнман, Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой

механике // Вопросы причинности в квантовой механике // Москва – "Иностранная литература" – 1955 – С. 167-207.

156. R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals // New York – McGraw-Hill Company – 1965. Русский перевод: Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям // Москва – "Мир" – 1968.

157. K. S. Cheng, Quantization of a general dynamical system by Feynman's path integration formulation // J. Math. Phys. – 1972 – V. 13 – P. 1723–1726.

158. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей // Москва – "Наука" – 1988.

159. Ф. А. Березин, Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными // Москва – Издательство МГУ – 1983.

160. Ф. А. Березин, Введение в суперанализ // Москва – Издательство МЦНМО – 2013.

161. G. Montani, Canonical quantization of gravity without "frozen formalism" // Nucl. Phys. B – 2002 – V. 634 – P. 370-392.

162. S. Mercuri and G. Montani, Revised canonical quantum gravity via the frame fixing // Int. J. Mod. Phys. D – 2004 – V. 13 – P. 165-186.

163. S. Mercuri and G. Montani, On the frame fixing in quantum gravity // The tenth Marcel Grossmann meeting on recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories (eds. M. Novello, S. Perez Bergliaffa and R. Ruffini) – Singapore – World Scientific – 2006 – P. 2217-2222.

164. A. Einstein, Ether and the theory of relativity // The collected papers of Albert Einstein – V. 7 – Princeton University Press – 2002. Русский перевод: А. Эйнштейн, Эфир и теория относительности // Собрание научных трудов – Москва – "Наука" – 1965 – Т. 1 – С. 682–689.

165. M. L. Fil'chenkov, The pre-de-Sitter Universe in terms of quantum mechanics // Phys. Lett. B – 1995 – V. 354 – P. 208-212.

166. M. L. Fil'chenkov, Quantum collapse and the birth of a new universe // Phys. Lett. B – 1998 – V. 441 – P. 34-39.

167. I. Dymnikova, M. L. Fil'chenkov, Quantum birth of a hot universe // Phys. Lett. B – 2002 – V. 545 – P. 214-220.

168. S. Weinberg, The cosmological constant problem // Rev. Mod. Phys. – 1989 – V. 61 – P. 1-23. Русский перевод: С. Вайнберг, Проблема космологической постоянной // УФН – 1989 – Т. 158 – С. 639–678.

169. A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, Particle creation in the Early Universe: Achievements and problems // Gravitation and Cosmology – 2016 – V. 22 – P. 107-115.

170. B. S. DeWitt, Quantum gravity: the new synthesis // General relativity: An Einstein centenary survey (eds. S. W. Hawking, W. Israel) – Cambridge University Press – 1979 – P. 680-745. Русский перевод: Б. С. Де Витт, Квантовая гравитация: новый синтез // Общая теория относительности (ред. С. Хокинг и В. Израэль) – Москва – "Мир" – 1983 – С. 296–362.

171. A. O. Barvinsky, Quantum geometrodynamics: the Wheeler – DeWitt equation for the wave function of the Universe // Phys. Lett. B – 1986 – V. 175 – P. 401-404.

172. A. A. Grib, Early expanding Universe and elementary particles // St. Petersburg – Friedmann Laboratory Publishing Ltd. – 1995 (in English).

173. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях // Москва – "Энергоатомиздат" – 1988.

174. N. D. Birrell, P. C. W. Davies, Quantum fields in curved space // Cambridge – Cambridge University Press – 1982. Русский перевод: Н. Биррелл, П. Девис, Квантованные поля в искривленном пространстве-времени // Москва – "Мир" – 1984.

175. J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik // Berlin – 1932. Русский перевод: И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики // Москва – "Наука" – 1964.

176. М. Б. Менский, Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология // Москва – "Физматлит" – 2001.

177. A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie // Sitzungsberichte Preußische Akad. Wissenschaften – 1917 – B. 1 – S. 142–152. Русский перевод: А. Эйнштейн, Вопросы космологии и общая теория относительности // Собрание научных трудов – Москва – "Наука" – 1965 – Т. 1 – С. 602–612.

178. H. Bondi, T. Gold, The steady-state theory of the expanding Universe // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1948 – V. 108 – P. 252–270.

179. F. Hoyle, A new model for the expanding Universe // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1948 – V. 108 – P. 372–382.

180. I. Kant, Kritik der reinen Vernunft // Riga – 1781. Русский перевод: И. Кант, Критика чистого разума // Москва – "Наука" – 1999.

181. Вл. С. Соловьев, Кант // Сочинения в двух томах – Т. 2 – Москва – "Мысль" – 1988 – С. 441-479.

182. S. W. Hawking, A Brief History of Time // London – Bantam Books – 1988. Русский перевод: С. Хокинг, Краткая история времени: от Большого взрыва до черных дыр // С.-Петербург – Амфора – 2001.

183. S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, The large scale structure of space-time // Cambridge – Cambridge University Press – 1973. Русский перевод: С. Хокинг, Дж. Эллис, Крупномасштабная структура пространства-времени // Москва – "Мир" – 1977.

184. С. Л. Франк, Непостижимое // Сочинения / Москва – 1990.

185. A. Sudbery, Quantum Mechanics and the Particles of Nature // Cambridge – Cambridge University Press – 1986. Русский перевод: А. Садбери, Квантовая механика и физика элементарных частиц // Москва – "Мир" – 1989.

186. B. Pinto-Neto, J. C. Fabris, Quantum cosmology from the de Broglie – Bohm perspective // Class. Quant. Grav. – 2013 – V. 30 – 143001.

187. J. J. Halliwell, Decoherent histories analysis of minisuperspace quantum cosmology // J. Phys. Conf. Ser. – 2011 – V. 306 – 012023.

188. J. D. Barrow, F. J. Tipler, The anthropic cosmological principle // Oxford – Oxford University Press – 1986.

189. V. F. Mukhanov, On the many-worlds interpretation of quantum theory // Proceedings of the Third Moscow seminar on quantum gravity, Moscow, Russia, 23–25 October 1984 (eds. M. A. Markov, V. A. Berezin and V. P. Frolov) – Singapore – World Scientific – 1985 – P. 17–38.

190. C. Kiefer, On the interpretation of quantum theory – from Copenhagen to the present day // Time, quantum and information (eds. L. Castell, O. Ischebeck) – Berlin–Heidelberg – Springer-Verlag – 2003 – P. 291–299.

191. H. Everett, "Relative state" formulation of quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. – 1957 – V. 29 – P. 454-462.

192. J. A. Wheeler, Assessment of Everett's "Relative state" formulation of quantum theory // // Rev. Mod. Phys. – 1957 – V. 29 – P. 463-465.

193. P. A. M. Dirac, The principles of quantum mechanics // Oxford – Oxford University Press – 1958. Русский перевод: П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механике // Собрание научных трудов – Москва – "Физматлит" – 2002 – Т. 1 – С. 7–316.

194. B. S. DeWitt, Quantum mechanics and reality: Could the solution to the dilemma of indeterminism be a universe in which all possible outcomes of an experiment actually occur? // Physics Today – 1970 – V. 23 – P. 155-165.

195. B.S. DeWitt, The many-universes interpretation of quantum mechanics // The many-worlds interpretation of quantum mechanics (eds. B. S. DeWitt, N. Graham) – Princeton – Princeton University Press – 1973 – P. 167–218.

196. The many-worlds interpretation of quantum mechanics (eds. B. S. DeWitt, N. Graham) – Princeton – Princeton University Press – 1973.

197. Quantum theory and measurement (eds. J. A. Wheeler, W. H. Zurek) – Princeton – Princeton University Press – 1983.

198. Quantum concepts in space and time (eds. R. Penrose, C. J. Isham) – Oxford – Clarendon Press – 1986.

199. Science and ultimate reality: Quantum theory, cosmology and complexity (eds. J. D. Barrow, P. C. W Davies and C. L. Harper) – Cambridge – Cambridge University Press – 2004. Русский перевод: Наука и предельная реальность: квантовая теория, космология и сложность (ред. Дж. Барроу, П. Дэвис, Ч. Харпер) – Москва-Ижевск – НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований – 2013.

200. Д. И. Блохинцев, Критика идеалистического понимания квантовой теории // УФН – 1951 – Т. 45 – С. 195-228.

201. В. А. Фок, Об интерпретации квантовой механики // УФН – 1957 – Т. 62 – С. 461-474.

202. М. А. Марков, О трех интерпретациях квантовой механики: об образовании понятия объективной реальности в человеческой практике – Москва – "Наука" – 1991.

203. Б. Б. Кадомцев, М. Б. Кадомцев, Коллапсы волновых функций // УФН – 1996 – Т. 166 – С. 651-659.

204. М. Б. Менский, Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов // УФН – 2000 – Т. 170 – С. 631-648.

205. А. И. Липкин, Р. С. Нахмансон и др. Отклики читателей на статью М. Б. Менского "Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов" // УФН – 2001 – Т. 171 – С. 437-462.

206. М. Б. Менский, Квантовые измерения, феномен жизни и стрела времени: связи между "тремя великими проблемами" (по терминологии Гинзбурга) // УФН – 2007 – Т. 177 – С. 415-425.

207. М. Б. Менский, Человек и квантовый мир: странности квантового мира и тайна сознания // Фрязино – "Век 2" – 2005.

208. А. А. Гриб, К вопросу об интерпретации квантовой физики // УФН – 2013 – Т. 183 – С. 1337-1352.

209. А. Ю. Севальников, Интерпретации квантовой механики: в поисках новой онтологии // Москва – ЛЕНАНД – 2018.

210. F. Giacomini, E. Castro-Ruiz and Č. Brukner, Quantum mechanics and the covariance of physical laws in quantum reference frames // Nature Commun. – 2019 – https://doi.org/10.1038/s41467-018-08155-0.

211. A.-C. de la Hammett, V. Kabel, E. Castro-Ruiz and Č. Brukner, Quantum reference frames for an indefinite metric // Commun. Phys. – 2023 – https://doi.org/10.1038/s42005-023-01344-4.

212. L. Susskind, L. Thorlacius and J. Uglum, The stretched horizon and black hole complementarity // Phys. Rev. D – 1993 – V. 48 – P. 3743-3761.

213. L. Susskind and L. Thorlacius, Gedanken experiments involving black holes // Phys. Rev. D – 1994 – V. 49 – P. 966-974.

214. J. A. Wheeler, The "past" and the "delayed-choice" double-slit experiment // Mathematical foundations of quantum theory (ed. A. R. Marlow) – New York–San Francisco–London – Academic Press – 1978 – P. 9-48.

215. J. A. Wheeler, Law without law // Quantum theory and measurement (eds. J. A. Wheeler and W. H. Zurek) – Princeton – Princeton University Press – 1984 – P. 182–213.

216. X.-S. Ma, J. Kofler, A. Zeilinger, Delayed-choice gedanken experiments and their realizations // Rev. Mod. Phys. – 2016 – V. 88 – 015005.

217. А. А. Гриб, Е. В. Дамаскинский, В. М. Максимов, Проблема нарушения симметрии и инвариантности вакуума в квантовой теории поля // УФН – 1970 – Т. 102 – С. 587-620.

218. А. А. Гриб, Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля // Москва – "Атомиздат" – 1978.

219. S. W. Hawking, The unpredictability of quantum gravity // Commun. Math. Phys. – 1982 – V. 87 – P. 395-415.

220. C. Kiefer, R. Müller, T. P. Singh, Quantum gravity and non-unitarity in black hole evaporation // Mod. Phys. Lett. A – 1994 – V. 9 – P. 2661-2669.

221. J. Maldacena, The large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv. Theor. Math. Phys. – 1998 – V. 2 – P. 231-252.

222. O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, Large N field theories, string theory and gravity // Phys. Rep. – 2000 – V. 323 – P. 183-386.

223. S. W. Hawking, Information loss in black holes // Phys. Rev. D – 2005 – V. 72 – 084013.

224. A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian and A. Tajdini, The entropy of Hawking radiation // Rev. Mod. Phys. – 2021 – V. 93 – 035002.

225. I. Prigogine, Time, structure and fluctuation (Nobel prize lecture) // Science – 1978 – V. 201 – P. 777-785.

226. I. Prigogine, From being to becoming: time and complexity in the physical sciences // San Francisco – W. H. Freeman and Company – 1980. Русский перевод: И. Пригожин, От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках // Москва – Едиториал УРСС – 2002.

227. I. Prigogine, I. Stengers, Time, chaos and the quantum: towards the resolution of the time paradox // New York – Crown Publishing Group – 1994. Русский перевод: И. Пригожин, И. Стенгерс, Время, хаос, квант: к решению парадокса времени // Москва – Едиториал УРСС – 2003.

228. I. Prigogine, The end of certainty: Time, chaos and the new laws of Nature // New York–London–Toronto–Sidney–Singapore – The Free Press – 1997. Русский перевод: И. Пригожин, Конец определенности: время, хаос и новые законы природы // Москва–Ижевск – НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" – 2001.

229. B. Misra, I. Prigogine and M. Courbage, Lyapounov variable: entropy and measurement in quantum mechanics // Proc. Nat. Acad. Sci. USA – 1979 – V. 76 – P. 4768-4772.

230. R. Penrose, Singularities and time-asymmetry // General relativity: An Einstein centenary survey (eds. S. W. Hawking, W. Israel) – Cambridge University Press – 1979 – P. 581-638. Русский перевод: Р. Пенроуз, Сингулярности и асимметрия по времени // Общая теория относительности (ред. С. Хокинг и В. Израэль) – Москва – "Мир" – 1983 – С. 234–295.

231. R. Penrose, The Emperor's new mind: concerning computers, minds and the laws of physics // Oxford – Oxford University Press – 1989. Русский перевод: Р.

Пенроуз, Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики // Москва – Едиториал УРСС – 2003.

232. R. Penrose, Shadows of the mind: A search for the missing science of consciousness // Oxford – Oxford University Press – 1994. Русский перевод: Р. Пенроуз, Тени разума: в поисках науки о сознании // Москва–Ижевск – Институт компьютерных исследований – 2005.

233. R. Penrose, The road to reality: A complete guide to the laws of the Universe // London – Jonathan Cape – 2004. Русский перевод: Р. Пенроуз, Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель // Москва–Ижевск – НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований – 2007.

234. R. Penrose, On gravity's role in quantum state reduction // Gen. Rel. Grav. – 1996 – V. 28 – P. 581-600.

235. R. Penrose, Quantum computation, entanglement and state reduction // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A – 1998 – V. 356 – P. 1927-1939.

236. R. Penrose, On the gravitization of quantum mechanics 1: Quantum state reduction // Found. Phys. – 2014 – V. 44 – P. 557–575.

237. R. Penrose, On the gravitization of quantum mechanics 2: Conformal cyclic cosmology // Found. Phys. – 2014 – V. 44 – P. 873–890.

# РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

## А. Работы, опубликованные до защиты кандидатской диссертации

**A1.** V. A. Savchenko, **T. P. Shestakova** and G. M. Vereshkov, Quantum geometrodynamics of the Bianchi IX model in extended phase space // Int. J. Mod. Phys. A – 1999 – V. 14 – P. 4473 – 4490.

**A2.** **T. P. Shestakova**, Grounds for quantum geometrodynamics in extended phase space and its cosmological consequences // Gravitation & Cosmology – 1999 – V. 5 – P. 297-300.

**A3.** V. A. Savchenko, **T. P. Shestakova** and G. M. Vereshkov, The exact cosmological solution to the dynamical equations for the Bianchi IX model // Int. J. Mod. Phys. A – 2000 – V. 15 – P. 3207-3220.

**A4.** **T. P. Shestakova**, The status of the Lambda term in quantum geometrodynamics in extended phase space // Gravitation & Cosmology – 2000 – V. 6, Supplement – P. 47-50.

**A5.** V. A. Savchenko, **T. P. Shestakova** and G. M. Vereshkov, Quantum geometrodynamics in extended phase space - I. Physical problems of interpretation and mathematical problems of gauge invariance // Gravitation & Cosmology – 2001 – V. 7 – P. 18-28.

**A6.** V. A. Savchenko, **T. P. Shestakova** and G. M. Vereshkov, Quantum geometrodynamics in extended phase space - II. The Bianchi IX model // Gravitation & Cosmology – 2001 – V. 7 – P. 102-116.

## B. Работы, опубликованные после защиты кандидатской диссертации

### Работы автора по теме исследования, учитываемые в международных базах цитирования (МБЦ)

**B1.** **T. P. Shestakova**, Quantum geometrodynamics creates new problems // Gravitation & Cosmology – 2009 – V. 15 – P. 181-183.

**B2.** **T. P. Shestakova**, The "extended phase space" approach to quantum geometrodynamics // Proceedings of the 3rd Stueckelberg workshop on relativistic field theories, Pescara, Italy, 8 – 18 July 2008 (eds. N. Carlevaro, R. Ruffini and G. V. Vereshchagin) – 2010 – Cambridge Scientific Publishers – P. 293-301.

**B3.** **T. P. Shestakova**, Hamiltonian formulation for the theory of gravity and canonical transformations in extended phase space // Class. Quantum Grav. – 2011 – V. 28 – 055009 – P. 1-14.

**B4.** **T. P. Shestakova**, On canonical transformations of gravitational variables in extended phase space // Gravitation & Cosmology – 2011 – V. 17 – P. 67-70.

**B5.** **T. P. Shestakova**, A view on the problems of quantum gravity // J. Phys. Conf. Ser. – 2012 – V. 360 – 012015 – P. 1-4.

**B6.** **T. P. Shestakova**, The formulation of general relativity in extended phase space as a way to its quantization // Proceedings of the Twelfth Marcel Grossmann Meeting on general relativity, Paris, France, 2009 (eds. T. Damour, R. T Jantzen and R. Ruffini) – 2012 – Singapore – World Scientific – P. 1462-1464.

**B7.** **T. P. Shestakova**, Generalized spherically symmetric gravitational model: Hamiltonian dynamics in extended phase space and the BRST charge // Gravitation & Cosmology – 2014 – V. 20 – P. 67-79.

**B8.** **T. P. Shestakova**, The role of BRST charge as a generator of gauge transformations in quantization of gauge theories and gravity // Вестник Томского Государственного Педагогического Университета – 2014 – Т. 153 – С. 224-227.

**B9.** **T. P. Shestakova**, Hamiltonian dynamics in extended phase space for gravity and its consistency with Lagrangian formalism: a generalized spherically symmetric model as an example // Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossmann Meeting on general relativity, Stockholm, Sweden, 2012 (eds. R. T Jantzen, K. Rosquist and R. Ruffini) – 2015 – Singapore – World Scientific – P. 1880-1882.

**B10.** **T. P. Shestakova**, Is the Wheeler – DeWitt equation more fundamental than the Schrödinger equation? // Int. J. Mod. Phys. D – 2018 – V. 27 – 1841004 – P. 1-15.

**B11.** **T. P. Shestakova**, On the meaning of the wave function of the Universe // Int. J. Mod. Phys. D – 2019 – V. 28 – 1941009 – P. 1-16.

**B12.** **T. P. Shestakova**, Wave function of the Universe, path integrals and gauge invariance // Gravitation & Cosmology – 2019 – V. 25 – P. 289-296.

**B13.** **T. P. Shestakova**, Is the Copenhagen interpretation inapplicable to quantum cosmology? // Universe – 2020 – V. 6 – 128 – P. 1-20.

**B14.** **T. P. Shestakova**, On A. D. Sakharov’s hypothesis of cosmological transitions with changes in the signature of the metric // Universe – 2021 – V. 7 – 151 – P. 1-11.

**B15.** **T. P. Shestakova**, The birth of the Universe as a result of the change of the metric signature // Physics – 2022 – V. 4 – P. 160-171.

**B16.** R. I. Ayala Oña, D. P. Kislyakova and **T. P. Shestakova**, On the appearance of time in the classical limit of quantum gravity // Universe – 2023 – V. 9 – 85 – P. 1-14.

**B17.** R. I. Ayala Oña, M. B. Kalmykov, D. P. Kislyakova, **T. P. Shestakova**, The semiclassical limit of quantum gravity and the problem of time // Int. J. Mod. Phys. D – 2023 – 2340003 – P. 1-20.

## Работы автора по теме исследования, опубликованные в рецензируемых научных журналах из списка ВАК

**B18.** **T. P. Shestakova** and C. Simeone, The problem of time and gauge invariance in the quantization of cosmological models. I. Canonical quantization methods // Gravitation & Cosmology – 2004 – V. 10 – P. 161-176.

**B19.** **T. P. Shestakova** and C. Simeone, The problem of time and gauge invariance in the quantization of cosmological models. II. Recent developments in the path integral approach // Gravitation & Cosmology – 2004 – V. 10 – P. 257-268.

**B20.** **T. P. Shestakova**, Prospects of the extended phase space approach to quantization of gravity // Gravitation & Cosmology – 2005 – V. 11 – P. 183-188.

**B21.** **T. P. Shestakova**, Cosmological solutions for the Universe filled with matter in various states and gauge invariance // Gravitation & Cosmology – 2006 – V. 12 – P. 223-226.

## Работы автора по теме исследования, опубликованные в сборниках трудов международных конференций и других изданиях

**B22.** **T. P. Shestakova**, Quantum geometrodynamical description of the Universe in different reference frames // Gravitation & Cosmology – 2002 – V. 8, Supplement II – P. 140-142.

**B23.** **T. P. Shestakova**, Could gauge degrees of freedom play the role of environment in "extended phase space" version of quantum geometrodynamics? // Physical Interpretations of Relativity Theory: Proceedings of International Scientific Meeting, Moscow, 30 June - 3 July 2003 (eds. M. C. Duffy, V. O. Gladyshev and A.N. Morozov) – 2003 – Moscow–Liverpool–Sunderland – P. 350-358.

**B24.** **T. P. Shestakova**, Changing the Hilbert space structure as a consequence of gauge transformations in "extended phase space" version of quantum geometrodynamics // Physical Interpretations of Relativity Theory: Proceedings of International Scientific Meeting, Moscow, 4 - 7 July 2005 (eds. M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A.N. Morozov and P. Rowlands) – 2005 – Moscow – P. 26-34.

**B25.** **T. P. Shestakova**, Quantum cosmological solutions: its dependence on gauge conditions and physical interpretation // Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Scientific Meeting, Moscow, 2 - 5 July 2007 (eds. M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov and P. Rowlands) – 2007 – Moscow – P. 103-112.

**B26.** **T. P. Shestakova**, The Wheeler-DeWitt quantum geometrodynamics: its fundamental problems and tendencies of their resolution // Proceedings of Russian summer school-seminar on Gravitation and Cosmology “GRACOS-2007” – 2007 – Kazan – P. 179-183.

**B27.** **T. P. Shestakova**, Hamiltonian formulation of general relativity 50 years after the Dirac celebrated paper: do unsolved problems still exist? // Physical Interpretations of Relativity Theory: Proceedings of International Scientific Meeting, Moscow, 6 - 9 July 2009 (eds. M. C. Duffy, V. O. Gladyshev, A. N. Morozov and P. Rowlands) – 2009 – Moscow – P. 49-57.

**B28.** **Т. П. Шестакова**, Дискуссия о принципах квантования гравитации в Кёльнском университете // Сборник материалов научного семинара стипендиатов программ "Михаил Ломоносов" и "Иммануил Кант" 2015−2016 года

(Materialien zum wissenschaftlichen Seminar der Stipendiaten der Programme "Michail Lomonosov" und "Immanuel Kant" 2015/2016) – 2016 – №12 – Германская служба академических обменов (DAAD) – Москва – ФЛИНТА – С. 223-228.

## С. Учебно-методические работы автора

**С1.** **Т. П. Шестакова**, Некоторые вопросы квантовой теории // Москва–Ижевск – 2018 – Институт компьютерных исследований; НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" – 246 стр.

**С2.** **Т. П. Шестакова**, Метод континуального интеграла в квантовой теории поля // 2-е издание, исправленное – Москва–Ижевск – 2018 – НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Институт компьютерных исследований – 228 стр.