Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени
Патриса Лумумбы «РУДН»

На правах рукописи

Болтачев Андрей Владимирович

ОБ ИНДЕКСЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук
Савин Антон Юрьевич

Москва — 2024

Оглавление

Стр.

Введение 4

Глава 1. Предварительные сведения 33

1.1 Алгебра операторов Буте де Монвеля 33

1.2 Скрещенные произведения 41

Глава 2. Формула индекса в случае изометрического действия группы 44

2.1 Формула индекса 44

2.1.1 Г-операторы Буте де Монвеля. Теорема о фредгольмовости 44

2.1.2 Когомологии де Рама многообразий с расслоенным краем 48

2.1.3 Характер Черна эллиптических символов 54

2.1.4 Теорема об индексе 69

2.2 Приложение. Индекс скрученных краевых задач 73

2.2.1 Скрученные краевые задачи 74

2.2.2 Формула индекса 76

2.2.3 Пример. Оператор Эйлера 80

Глава 3. Неизометрическое действие группы 84

3.1 Фредгольмовость краевых задач 84

3.1.1 Постановка задачи 84

3.1.2 Внутренний траекторный символ 85

3.1.3 Граничный траекторный символ 86

3.1.4 Теорема о фредгольмовости 87

3.2 Топологический индекс в циклических когомологиях 90

3.2.1 Периодические циклические когомологии 90

3.2.2 Эквивариантные циклические коциклы 92

3.3 Краевые задачи со скручиваниями конечного цилиндра 101

3.3.1 Постановка задачи 102

3.3.2 Скручивания цилиндра 103

3.3.3 Внутренний символ 106

3.3.4 Эллиптичность внутреннего символа 107

3.3.5 Граничный символ на левом основании цилиндра 110

Стр.

3.3.6 Граничный символ на правом основании цилиндра 112
3.3.7 Пример 117

Заключение 119

Литература 120

Введение

Актуальность темы

Проблема индекса была сформулирована в статье Гельфанда [10], в которой поставлена задача о гомотопической классификации эллиптических операторов и задача о вычислении индекса в топологических терминах. Последняя задача была полностью решена Атьей и Зингером [2], [3] для псевдодифференциальных операторов на гладком многообразии без края. Отметим некоторые важные обобщения теоремы Атьи–Зингера: теория индекса семейств эллиптических операторов [4], теория индекса для вещественных эллиптических операторов [5] и др. Теория индекса эллиптических операторов также имеет применения в физике (см., напр., работы Альвареза-Гауме [26], Гецлера [39], Шварца [23]). Так, важным приложением является формула индекса оператора Дирака.

Исследованием псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем занимались Вишик и Эскин [9], Эскин [24]. Теорема об индексе на многообразии с краем была получена в работе Буте де Монвеля [37]. Алгебра краевых задач Буте де Монвеля была введена в основном для нужд теории индекса. Подробное изложение и развитие теории индекса краевых задач было дано в монографии Ремпеля и Шульце [13]. Важную роль в этой теории играет исчисление символов. Несмотря на то, что описание краевых условий часто требует использования сложного аналитического аппарата, основная идея состоит в том, чтобы систематически использовать формальное соответствие между символьным и операторным уровнями и адаптировать методы, используемые в случае многообразий без края. Такой подход позволяет обобщить результаты, касающиеся эллиптических псевдодифференциальных операторов на эллиптические краевые задачи. Одним из важных результатов работы [13] является получение формул индекса эллиптических краевых задач.

Дальнейшее исследование теории краевых задач Буте де Монвеля было проведено в работах Мело, Неста и Шроэ [45], а также Мело, Шика и Шроэ [46]. Впервые формула индекса псевдодифференциальных краевых задач была получена в статье Федосова [22]. Была дана формула индекса эллиптической краевой задачи в терминах внутреннего и граничного символов. Однако топологический (точнее, когомологический) смысл этой формулы не был прояснен.

В теории нелокальных эллиптических задач рассматриваются операторы со сдвигами аргументов:

$$D = \sum_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma T_\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

где Γ — дискретная группа диффеоморфизмов гладкого компактного многообразия M с краем, $(T_\gamma u)(x) = u(\boldsymbol{\gamma}^{-1}(x))$ — оператор сдвига, отвечающий диффеоморфизму $\boldsymbol{\gamma} : M \to M$, D_γ — псевдодифференциальные операторы порядка $\leqslant m$.

При изучении нелокальных эллиптических краевых задач выделяют задачи двух типов: задачи, в которых область сохраняется при действии группы, и задачи, в которых область не сохраняется. Задачи первого типа исследовались в достаточно большой общности Антоневичем, Лебедевым и соавторами (см. [27; 29]). Такие задачи возникают преимущественно в дифференциальной геометрии и некоммутативной геометрии. Различными авторами были также исследованы неинвариантные случаи, в которых не сохраняется край многообразия [14; 20; 31; 57; 58].

В нелокальных эллиптических краевых задачах результаты общей теории выглядят весьма громоздко и поэтому явные результаты получаются в конкретных примерах. Такими примерами служат некоммутативный тор [38], функционально-дифференциальные уравнения с диффеоморфизмами: сдвига [57; 58], сжатия и растяжения [14; 16; 17], ортотропного сжатия [20], диффеоморфизмом Аносова [28], диффеоморфизмами Морса–Смейла [42].

В монографии Назайкинского, Савина, Стернина [47] с помощью методов из K-теории операторных алгебр и некоммутативной геометрии решена проблема индекса нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных со счетной группой изометрических диффеоморфизмов на замкнутом многообразии. Также Савиным и Стерниным была получена гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем [18]. Проблема индекса нелокальных краевых задач оставалась мало исследованной.

Цель

Целью работы является исследование краевых задач со сдвигами на гладких многообразиях с краем и получение соответствующих формул индекса. Рассмотрен случай действия группы, которое сохраняет край многообразия.

Предлагается исследовать условия эллиптичности нелокальных краевых задач, связанных с диффеоморфизмом скручивания цилиндра.

Методы исследования

В работе используются методы теории псевдодифференциальных операторов и псевдодифференциальных краевых задач. Используются методы дифференциальной геометрии, а именно, дифференциальные формы, связности, характеристические классы, а также методы некоммутативной геометрии. В частности, для получения формулы индекса используется аппарат циклических когомологий.

Основные результаты. Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получена формула индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста. Эти результаты являются новыми даже в случае конечной группы.
2. В качестве приложения получена формула индекса скрученных краевых задач. В частности, вычислен индекс скрученного оператора Эйлера.
3. Определен топологический индекс краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы на многообразии с краем. В определении используются циклические когомологии.
4. Для краевых задач со скручиваниями конечного цилиндра получены условия эллиптичности в явном виде.

Теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация диссертационной работы

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

- Международная конференция Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ), Крым, 17-26 сентября 2021.
- Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения”, Воронеж, 3-9 мая 2021, 3-9 мая, 2023.

- Международная конференция “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis” (OTHA), Ростов-на-Дону, 22–27 августа 2021, 21–26 августа 2022.
- Международная конференция “The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (DFDE), Москва, 28 июня – 5 июля 2022.
- Международная научная конференции “Уфимская осенняя математическая школа”, Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022.
- Воронежская зимняя математическая школа “Современные методы теории функций и смежные проблемы”, Воронеж, 27 января – 1 февраля, 2023.
- Студенческая конференция “Differential equations and mathematical modeling”, Москва, 15-17 мая, 2024.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- Научный студенческий семинар по дифференциальным уравнениям, рук. А.Ю. Савин, П.А. Сипайло, РУДН (неоднократно, 2019–2021).
- Общематематический семинар молодых ученых Математического института им. С.М. Никольского, рук. Ю.О. Беляева, РУДН, 30.11.2020.
- Научный семинар Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, рук. А.Л. Скубачевский, РУДН, 16.11.2021.
- Научный семинар “Кинетические и нелинейные уравнения математической физики”, рук. С.Б. Куксин, А.Л. Пятницкий, А.Л. Скубачевский, РУДН, 23.05.2024.
- Научный семинар “Алгебры в анализе”, рук. А.Я. Хелемский, А.Ю. Пирковский, МГУ, 18.10.2024.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 5 статей в научных журналах, индексируемых в международных базах данных (Scopus, MathSciNet) и 6 — в тезисах докладов на международных конференциях. Список публикаций приведен в конце введения. Результаты совместных работ, включенные в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения. Полный объём диссертации составляет 125 страниц. Список литературы содержит 61 наименование.

Краткое содержание работы

Глава 1 состоит из 2 параграфов, в которых напоминаются сведения об алгебре Буте де Монвеля.

В **§1.1** напоминается определение операторов Буте де Монвеля на гладком компактном многообразии с краем и описывается алгебра символов Буте де Монвеля. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем X. Набор (x',x_n,ξ',ξ_n) определяет локальные координаты на кокасательном расслоении T^*M. Обозначим через $H_+ = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ пространство Фреше образов преобразования Фурье $\mathcal{F}_{x_n\to\xi_n}$ функций из пространства Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Пространство H_- определяется аналогично.

Определение 0.1. Классический символ $a = a(x',x_n,\xi',\xi_n) \in C^\infty(T^*M)$ с асимптотическим разложением

$$a \sim a_m + a_{m-1} + \ldots \tag{1}$$

с однородными компонентами a_l удовлетворяет *свойству трансмиссии*, если его порядок $m \in \mathbb{Z}$ и для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ справедливо следующее равенство:

$$D^k_{x_n} D^\alpha_{\xi'} a_l(x',0,0,\xi_n) = (-1)^{l-|\alpha|} D^k_{x_n} D^\alpha_{\xi'} a_l(x',0,0,-\xi_n), \quad \xi_n \neq 0, \tag{2}$$

где

$$D^\alpha_{\xi'} = \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_{n-1}}\right)^{\alpha_{n-1}}.$$

Рассмотрим гладкие функции со значениями в пространствах Фреше

- $b(x',\xi',\xi_n) \in C^\infty(T^*_0X,H_-)$, $c(x',\xi',\xi_n) \in C^\infty(T^*_0X,H_+)$;
- $g(x',\xi',\xi_n,\eta_n) \in C^\infty(T^*_0X,H_+\otimes H_-)$, $q(x',\xi') \in C^\infty(T^*_0X)$.

Набору функций выше сопоставим гладкое семейство операторов

$$a_X(x',\xi') : \begin{matrix} \overline{H}_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \overline{H}_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Pi_+(a(x',0,\xi',\xi_n)h(\xi_n)) + \Pi'_{\eta_n}(g(x',\xi',\xi_n,\eta_n)h(\eta_n)) + c(x',\xi',\xi_n)v \\ \Pi'_{\xi_n}(b(x',\xi',\xi_n)h(\xi_n)) + q(x',\xi')v \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\Pi_+ : H_+ \oplus H_- \to H_+$ — проектор на первое слагаемое, а Π' — непрерывный функционал

$$\begin{array}{rcl} \Pi' : H_+ \oplus H_- & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ u(\xi_n) & \longmapsto & \lim\limits_{x_n \to 0+} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n \to x_n}(u(\xi_n)). \end{array}$$

Определение 0.2. *Главным символом* Буте де Монвеля порядка m называется пара

$$\sigma = (\sigma_{\mathrm{int}},\sigma_X) \in C^\infty(T_0^*M) \oplus C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C})),$$

в которой:

1) первая компонента называется *внутренним символом* и является однородной функцией степени m

$$\sigma_{\mathrm{int}} \in C^\infty(T_0^*M), \tag{5}$$

удовлетворяющей свойству трансмиссии (2).

2) Вторая компонента называется *граничным символом* и является оператор-функцией

$$\sigma_X \in C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C})) \simeq C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C})) \tag{6}$$

на кокасательном расслоении T_0^*X края, где через $\mathcal{B}$ обозначена алгебра непрерывных операторов, действующих в пространстве Фреше.

3) Выполнено условие согласования: $(\sigma_{\mathrm{int}}(x,\xi))|_X = a(x',0,\xi',\xi_n)$.

Гладкие семейства граничных символов (6) образуют алгебру, которую мы обозначим через $\Sigma_X \subset C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C}))$. Символу Буте де Монвеля σ порядка m сопоставляется оператор

$$\mathrm{Op}(\sigma) : \begin{array}{c} C^\infty(M) \\ \oplus \\ C^\infty(X) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M) \\ \oplus \\ C^\infty(X) \end{array}. \tag{7}$$

Оператор в формуле (7) называется *оператором Буте де Монвеля.*

Полученное линейное пространство операторов (7) порядка m и типа d для краткости будем обозначать через $\Psi_B^{m,d}(M,X)$. Обозначим линейное пространство операторов (7) нулевого порядка и типа через $\Psi_B^{0,0}(M,X) := \Psi_B(M)$. Известно, что линейное пространство $\Psi_B(M)$ образует алгебру, а символьное отображение

$$\begin{array}{ccc} \Psi_B(M) & \longrightarrow & C^\infty(S^*M) \oplus C^\infty(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C})) \\ \mathcal{D} & \longmapsto & (\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}),\sigma_X(\mathcal{D})) \end{array} \tag{8}$$

корректно определено и справедлива формула композиции символов операторов Буте де Монвеля $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2)=\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_2), \qquad \sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2)=\sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$

Символьное отображение (8) непрерывно продолжается до мономорфизма C^*-алгебр

$$\overline{\Psi_B(M)}/\mathcal{K}\longrightarrow C(S^*M)\oplus C(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C})),$$

где $\mathcal{K}\subset\mathcal{B}(L^2(M)\oplus L^2(X))$ — идеал компактных операторов, а замыкание $\overline{\Psi_B(M)}$ рассматривается в $\mathcal{B}(L^2(M)\oplus L^2(X))$.

Пусть Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma\colon M\to M$, сохраняющих край $\gamma(X)=X$. Для элемента $\gamma\in\Gamma$ определим оператор сдвига

$$T_\gamma: L^2(M)\oplus L^2(X)\longrightarrow L^2(M)\oplus L^2(X), \quad (u(x),v(x'))\longmapsto(u(\gamma^{-1}(x)),v(\gamma^{-1}(x'))).$$

В **§1.2** напоминаются определения алгебраического и гладкого скрещенных произведений.

Пусть Γ — дискретная конечнопорожденная группа, которая действует на алгебре $\mathcal{A}$ автоморфизмами.

Определение 0.3. *Алгебраическим скрещенным произведением* алгебры $\mathcal{A}$ и группы Γ, обозначаемым через $\mathcal{A}\rtimes_{\mathrm{alg}}\Gamma$, называется векторное пространство функций $f:\Gamma\to\mathcal{A}$ с компактным носителем, в котором произведение элементов $\{f_1(\gamma)\}\cdot\{f_2(\gamma)\}\in\mathcal{A}\rtimes_{\mathrm{alg}}\Gamma$ определяется формулой

$$\{f_1(\gamma)\}\cdot\{f_2(\gamma)\}=\left\{\sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma}f_1(\gamma_1)\gamma_1(f_2(\gamma_2))\right\}. \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Фреше с полунормами $\|\cdot\|_m$, $m\in\mathbb{N}$, а Γ — группа степенного роста, действующая на алгебре $\mathcal{A}$ автоморфизмами $a\mapsto\gamma(a)$, где $a\in\mathcal{A}$ и $\gamma\in\Gamma$.

Определение 0.4. *Гладким скрещенным произведением*, обозначаемым через $\mathcal{A}\rtimes\Gamma$, называется векторное пространство функций $f:\Gamma\to\mathcal{A}$, которые быстро убывают на бесконечности в смысле следующих оценок:

$$\|f(\gamma)\|_m\leqslant C_{m,N}(1+|\gamma|)^{-N}$$

для любых $N,m\in\mathbb{N}$ и $\gamma\in\Gamma$, где константа $C_{m,N}$ не зависит от элемента γ.

Известно следующее утверждение. Пусть Γ — группа степенного роста и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует число $k \in \mathbb{N}$ и такой вещественный многочлен $p(z)$, что для любых $a \in \mathcal{A}$ и $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ выполнено неравенство:

$$\|\boldsymbol{\gamma}(a)\|_m \leqslant p(|\boldsymbol{\gamma}|)\|a\|_k. \tag{10}$$

Тогда гладкое скрещенное произведение $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$ является алгеброй с умножением, определенным формулой (9) (см. [56, Corollary 7.16]).

На этом завершается первая глава.

Глава 2 состоит из 2 параграфов и 7 пунктов и посвящена построению топологического индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием группы.

В **§2.1** приводятся основные построения и вычисляется топологический индекс краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием группы. В п. **2.1.1** вводятся Γ-операторы Буте де Монвеля и доказывается их фредгольмовость. Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n с краем X, а Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\boldsymbol{\gamma} : M \to M$, которые сохраняют край $\boldsymbol{\gamma}(X) = X$. Пусть группа Γ является группой степенного роста.

Определение 0.5. Элементы $\{\mathcal{D}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в гладком скрещенном произведении $\Psi_B(M) \rtimes \Gamma$ определяют операторы

$$\mathcal{D} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{D}_\gamma T_\gamma : L^2(M) \oplus L^2(X) \to L^2(M) \oplus L^2(X), \tag{11}$$

которые называются Γ-*операторами Буте де Монвеля.*

Определение 0.6. *Символом* оператора (11) называется пара

$$\sigma(\mathcal{D}) = (\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}), \sigma_X(\mathcal{D})),$$

состоящая из внутреннего и граничного символов

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}) &= \{\sigma(A_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \in C^\infty(S^*M) \rtimes \Gamma, \\ \sigma_X(\mathcal{D}) &= \{\sigma_X(\mathcal{D}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \in \Sigma_X \rtimes \Gamma, \end{aligned} \tag{12}$$

где A_γ — оператор в левом верхнем углу матричного оператора $\mathcal{D}_\gamma$.

Предложение 0.7. *Пусть даны операторы* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \Psi_B(M) \rtimes \Gamma$. *Тогда справедливы формулы*

$$\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D}_2) \text{ и } \sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$

Рассмотрим операторы Буте де Монвеля, действующие между образами матричных проекторов.

Определение 0.8. Матричным Γ-*оператором Буте де Монвеля* называется такая тройка $(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$, что

- $\mathcal{D} \in \mathrm{Mat}_N(\Psi_B(M) \rtimes \Gamma)$ — матрица с компонентами из скрещенного произведения $\Psi_B(M) \rtimes \Gamma$;
- $\mathcal{P}_j \in \mathrm{Mat}_N((C^\infty(M) \oplus C^\infty(X)) \rtimes \Gamma)$, $j = 1,2$, — матричные проекторы, т.е., выполнено соотношение $(\mathcal{P}_j)^2 = \mathcal{P}_j$, $j = 1,2$;
- выполнено соотношение $\mathcal{P}_2\mathcal{D}\mathcal{P}_1 = \mathcal{D}$.

Теперь определим оператор

$$\mathcal{D} : \mathcal{P}_1(L^2(M,\mathbb{C}^N) \oplus L^2(X,\mathbb{C}^N)) \longrightarrow \mathcal{P}_2(L^2(M,\mathbb{C}^N) \oplus L^2(X,\mathbb{C}^N)) \qquad (13)$$

действующий между образами проекторов в пространстве L^2. Оператор (13) будем обозначать через $(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$.

Определение 0.9. Оператор $(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ называется *эллиптическим*, если существует такой матричный оператор $(\mathcal{R},\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1)$, что выполнены следующие равенства

$$\sigma(\mathcal{D})\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{P}_2), \qquad \sigma(\mathcal{R})\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{P}_1). \qquad (14)$$

Теорема 0.10. *Эллиптический оператор* (13) *фредгольмов.*

В случае задач для дифференциальных операторов условия эллиптичности могут быть сформулированы в виде, аналогичном условию Шапиро–Лопатинского.

В п. **2.1.2** определяются комплексы де Рама многообразий с расслоенным краем и их группы когомологий.

Определение 0.11. Пусть M — гладкое многообразие с границей ∂M. Будем считать, что граница является тотальным пространством локально тривиального расслоения $\pi : \partial M \to X$ со слоем F. Тогда пара (M,π) называется *многообразием с расслоенным краем.*

Обозначим через $\Omega^*(M)$ алгебру дифференциальных форм на многообразии M, а через $\Omega^*_c(\partial M)$ — алгебру дифференциальных форм на ∂M с компактным носителем. Вложение $i : \partial M \hookrightarrow M$ индуцирует отображение сужения

$$i^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(\partial M).$$

Проекция π определяет индуцированное вложение $\pi^* : \Omega^*(X) \to \Omega^*(\partial M)$ и отображение прямого образа (интегрирование вдоль слоёв проекции π)

$$\pi_* : \Omega^*_c(\partial M) \longrightarrow \Omega^{*-\nu}_c(X), \quad \nu = \dim F. \tag{15}$$

Рассмотрим градуированный морфизм

$$(\Omega^*_c(M), d) \xrightarrow{\pi_* i^*} (\Omega^{*-\nu}_c(X), d), \quad d\pi_* i^* = (-1)^\nu \pi_* i^* d \tag{16}$$

комплексов де Рама на M и X. Обозначим конус отображения $\pi_* i^*$ через $(\Omega^*(M,\pi),\partial)$, где

$$\Omega^j_c(M,\pi) = \Omega^j_c(M) \oplus \Omega^{j-\nu-1}_c(X), \quad \partial = \begin{pmatrix} d & 0 \\ \pi_* i^* & (-1)^{\nu+1} d \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Группы когомологий комплекса $(\Omega^*_c(M,\pi),\partial)$ будем обозначать через $H^*_c(M,\pi)$.

Также рассмотрим комплекс $(\widetilde{\Omega}^*(M,\pi),\widetilde{\partial})$:

$$\widetilde{\Omega}^j(M,\pi) = \{(\omega,\omega_X) \in \Omega^j(M) \oplus \Omega^j(X) \mid i^*\omega = \pi^*\omega_X\}, \quad \widetilde{\partial} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Покомпонентное внешнее произведение дифференциальных форм дает произведение

$$\wedge : \Omega^j_c(M,\pi) \times \widetilde{\Omega}^k(M,\pi) \longrightarrow \Omega^{j+k}_c(M,\pi). \tag{19}$$

Определим линейный функционал

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, [M,\pi] \rangle : H^*_c(M,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega,\omega_X) & \longmapsto & \displaystyle\int\limits_M \omega - (-1)^n \int\limits_X \omega_X. \end{array} \tag{20}$$

Предложение 0.12. *Функционал* (20) *корректно определен.*

Граница $\partial(T^*M) \simeq T^*X \times \mathbb{R}$ кокасательного расслоения T^*M расслоена над T^*X со слоем $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующую проекцию через $\pi : \partial(T^*M) \to T^*X$, а вложение $\partial(T^*M) \subset T^*M$ через i.

Рассмотрим комплекс $(\Omega^*(T^*M,\pi),\partial)$, а его когомологии обозначим через $H^*(T^*M,\pi)$.

Также рассмотрим комплекс

$$\Omega^k(M,\mathrm{id}) = \{(\omega,\omega_X) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(X)\}, \quad \partial' = \begin{pmatrix} d & 0 \\ j^* & -d \end{pmatrix},$$

где отображение $j : X \hookrightarrow M$ означает естественное вложение края. Его когомологии совпадают с относительными когомологиями $H^*(M,X)$ пары (M,X).

Определим отображение

$$\begin{array}{rcl} \Omega^*(T^*M,\pi) & \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} & \Omega^{*-n}(M,\mathrm{id}), \\ \alpha(\omega,\omega_X) & = & \left(\pi^M_*\omega, -\pi^X_*\omega_X\right), \end{array} \qquad n = \dim M, \tag{21}$$

где интегрирование производится вдоль слоев проекций

$$\pi^M : T^*M \longrightarrow M, \qquad \pi^X : T^*X \longrightarrow X.$$

Предложение 0.13. *Отображение*

$$\alpha : H^*(T^*M,\pi) \longrightarrow H^{*-n}(M,X). \tag{22}$$

является изоморфизмом Тома.

В п. **2.1.3** определяется характер Черна символов эллиптических операторов (13). Его определение использует некоммутативные дифференциальные формы на кокасательных расслоениях T^*M и T^*X.

Пусть $C^\infty_{tr}(T^*M) \subset C^\infty(T^*M)$ — подалгебра классических символов порядка $\leqslant 0$, которые удовлетворяют свойству трансмиссии (см. (2)). Пусть $\Omega_{T^*M} \subset \Omega(T^*M)$ — подалгебра дифференциальных форм на T^*M с коэффициентами из $C^\infty_{tr}(T^*M)$. Обозначим через $\widetilde{\Sigma}_X \subset C^\infty(T^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C}))$ подалгебру таких семейств операторов $a_X(x',\xi')$, $(x',\xi') \in T^*X$, что семейство $a_X(x',\xi')$ определяется как в формуле (3). Обозначим через

$$\Omega_{T^*X} \subset \Omega(T^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C})) \tag{23}$$

подалгебру дифференциальных форм на T^*X с коэффициентами в $\widetilde{\Sigma}_X$. Рассмотрим действие группы Γ на алгебрах Фреше Ω_{T^*M} и Ω_{T^*X} дифференциальных форм и соответствующие гладкие скрещенные произведения

$$\Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma \text{ и } \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma.$$

Для работы с граничными символами операторов Буте де Монвеля напомним следующее определение (см. [22]). Отображение

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}'\colon\ & \Sigma_X \longrightarrow C^\infty(S^*X) \\ \operatorname{tr}' a_X(x',\xi') \ & = \Pi'_{\eta_n} g(x',\xi',\eta_n,\eta_n) + q(x',\xi'), \end{aligned} \tag{24}$$

называется *регуляризованным следом* tr' граничного символа $a_X \in \Sigma_X$, где функции g, q — компоненты граничного символа из формулы (3). Отображение (24) не обладает следовым свойством. Более точно, справедлива следующая формула дефекта следа:

$$\operatorname{tr}'[a_{X,1}, a_{X,2}] = -i\Pi'\left(\frac{\partial a_1(\xi_n)}{\partial \xi_n} a_2(\xi_n)\right) = i\Pi'\left(a_1(\xi_n)\frac{\partial a_2(\xi_n)}{\partial \xi_n}\right), \tag{25}$$

для любых $a_{X,1}, a_{X,2} \in \Sigma_X$, где a_1 и a_2 — главные символы граничных символов $a_{X,1}$ и $a_{X,2}$ соответственно.

Пусть $\gamma \in \Gamma$. Подмногообразие $M^\gamma = \{x \in M \,|\, \gamma(x) = x\}$ называется *подмногообразием неподвижных точек.*

Предположим, что заданы компактная группа Ли $\overline{\Gamma}$ изометрий, действующая на многообразии M, и вложение $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$, причем сужение действия группы $\overline{\Gamma}$ на подгруппу Γ совпадает с исходным действием группы Γ. Напомним, что *централизатором* $C^\gamma \subset \overline{\Gamma}$ элемента $\gamma \in \Gamma$ называется подгруппа элементов, коммутирующих с γ. Централизатор является замкнутой подгруппой Ли в $\overline{\Gamma}$.

Обозначим элементы централизатора через h, а индуцированную меру Хаара на нем через dh. Под *мерой Хаара* будем понимать форму объема на группе, инвариантную относительно действия группы, т.е., $\gamma^* dh = dh$, $\forall \gamma \in \overline{\Gamma}$. Ее интеграл равен $\int\limits_{C^\gamma} dh = 1$.

Классом сопряженности $\langle\gamma\rangle$ элемента $\gamma \in \Gamma$ называется множество

$$\langle\gamma\rangle = \{\gamma' \in \Gamma \mid \exists z \in \Gamma\ \gamma' = z\gamma z^{-1}\}.$$

Определим отображения

$$\tau^\gamma : \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega_{T^*M^\gamma}, \qquad \tau^\gamma_X : \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega_{T^*X^\gamma}, \tag{26}$$

$$\tau^\gamma(\omega) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} h^*\big(z^*\omega(\gamma')\big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh, \quad \text{где } \omega \in \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma, \tag{27}$$

$$\tau^\gamma_X(\omega_X) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X \left(h^*\big(z^*\omega_X(\gamma')\big)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh, \quad \text{где } \omega_X \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma. \tag{28}$$

Здесь

$$\mathrm{tr}_X\left(\sum_I \omega_I(t)dt^I\right)=\sum_I \mathrm{tr}'(\omega_I(t))dt^I,$$

где $\mathrm{tr}' : \widetilde{\Sigma}_X \to C^\infty(T^*X)$ — регуляризованный след, определенный ранее в формуле (24), а через I обозначен набор индексов.

Предложение 0.14. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Слагаемые в формулах* (27) *и* (28) *не зависят от выбора элементов* z.
2. *Функционалы* (27) *и* (28) *обладают следующими свойствами:*

$$\tau^\gamma(\omega_1\wedge\omega_2)=(-1)^{\deg\omega_1\deg\omega_2}\tau^\gamma(\omega_2\wedge\omega_1), \tag{29}$$

для любых $\omega_1,\omega_2\in\Omega_{T^*M}\rtimes\Gamma$,

$$d\tau^\gamma_X(\omega)=\tau^\gamma_X(d\omega), \quad \text{для любых } \omega\in\Omega_{T^*X}\rtimes\Gamma. \tag{30}$$

Рассмотрим эллиптический оператор $(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$. Для краткости мы часто будем обозначать его через $\mathcal{D}$. Продолжим внутренние символы $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})$, $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{R})$ исходного оператора и его почти обратного на кокасательном расслоении T^*M гладкими символами, которые обладают свойством трансмиссии. Продолжим также и граничные символы $\sigma_X(\mathcal{D})$ и $\sigma_X(\mathcal{R})$ на T^*X гладкими символами. Обозначим эти продолжения через

$$a,r\in C^\infty_{tr}(T^*M)\rtimes\Gamma, \qquad a_X,r_X\in\widetilde{\Sigma}_X\rtimes\Gamma.$$

Выполнены следующие равенства:

$$a=P_2aP_1, \quad r=P_1rP_2, \quad a_X=P_2'a_XP_1', \quad r_X=P_1'r_XP_2', \tag{31}$$

где $P_j=\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{P}_j)$, $P_j'=\sigma_X(\mathcal{P}_j)$.

Определим некоммутативные связности

$$\nabla_{P_j}=P_j\cdot d\cdot P_j \quad \text{на} \quad T^*M \quad \text{и} \quad \nabla_{P_j'}=P_j'\cdot d'\cdot P_j' \quad \text{на} \quad T^*X, \text{ где } j=1,2,$$

а d' обозначает внешний дифференциал на T^*X. Также определим связности

$$\widetilde{\nabla}_{P_1}=\nabla_{P_1}+r(\nabla a), \text{ где } \nabla a\equiv\nabla_{P_2}a-a\nabla_{P_1}, \tag{32}$$

$$\widetilde{\nabla}_{P_1'}=\nabla_{P_1'}+r_X(\nabla' a_X), \text{ где } \nabla' a_X=\nabla_{P_2'}a_X-a_X\nabla_{P_1'}.$$

Лемма 0.15. *Формы кривизны связностей* $\widetilde{\nabla}_{P_1}$ *и* $\widetilde{\nabla}_{P_1'}$ *определяются выражениями*

$$\widetilde{\Omega}_{P_1} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_{P_1})^2 = \nabla_{P_1}^2 + \nabla_{P_1}(r\nabla a) + (r\nabla a)^2,$$

$$\widetilde{\Omega}_{P_1'} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}_{P_1'})^2 = \nabla_{P_1'}^2 + \nabla_{P_1'}(r_X\nabla' a_X) + (r_X\nabla' a_X)^2.$$

Определение 0.16. Дифференциальные формы с компактными носителями

$$\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D}) \in \Omega_c^{ev}(T^*M^\gamma), \quad \operatorname{ch}^\gamma_{T^*X}\sigma(\mathcal{D}) \in \Omega_c^{ev}(T^*X^\gamma) \tag{33}$$

на кокасательных расслоениях подмногообразий неподвижных точек называются *характерами Черна* символов и определяются формулами

$$\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D}) = \tau^\gamma\left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i}(P_1 - ra)\right) - \tau^\gamma\left(P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i} - a e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i} r\right), \tag{34}$$

$$\operatorname{ch}^\gamma_{T^*X}\sigma(\mathcal{D}) = \\ \tau^\gamma_X\left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1'}/2\pi i}(P_1' - r_X a_X)\right) - \tau^\gamma_X\left(P_2' e^{-\nabla^2_{P_2'}/2\pi i} - a_X e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1'}/2\pi i} r_X\right). \tag{35}$$

Пусть теперь граница $\partial(T^*M^\gamma) \simeq T^*X^\gamma \times \mathbb{R}$ расслоена над T^*X^γ со слоем $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующую проекцию через

$$\pi^\gamma : \partial(T^*M^\gamma) \to T^*X^\gamma,$$

а вложение $\partial(T^*M^\gamma) \subset T^*M^\gamma$ через i_γ. Следовательно, пара (T^*M^γ,π^γ) является многообразием с расслоенным краем в смысле определения 0.11. Аналогично (17) рассмотрим комплекс $(\Omega_c^*(T^*M^\gamma,\pi^\gamma),\partial)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 0.17.

1. *Пусть* $\gamma \in \Gamma$. *Пара* $(\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D}), -\operatorname{ch}^\gamma_{T^*X}\sigma(\mathcal{D}))$ *является замкнутой в комплексе* $(\Omega_c^*(T^*M^\gamma,\pi^\gamma),\partial)$ (*см.* (17)), *а именно, выполнены равенства*

$$d\left(\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D})\right) = 0, \tag{36}$$

$$d'\left(\operatorname{ch}^\gamma_{T^*X}\sigma(\mathcal{D})\right) = \pi^\gamma_* i^*_\gamma\left(\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D})\right). \tag{37}$$

2. *Класс когомологий пары* $(\operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D}), -\operatorname{ch}^\gamma_{T^*X}\sigma(\mathcal{D}))$, *обозначаемый через*

$$\operatorname{ch}^\gamma\sigma(\mathcal{D}) \in H^{ev}(T^*M^\gamma,\pi^\gamma),$$

не зависит от выбора элементов a,r,a_X,r_X *и не изменяется при гомотопиях эллиптических символов.*

В доказательстве предложения 0.17 была использована лемма, которая является обобщением формулы (25).

Лемма 0.18. *Пусть даны формы* $\omega_{X,1},\omega_{X,2} \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma$, *тогда справедлива формула*

$$\tau_X^\gamma[\omega_{X,1},\omega_{X,2}] = -i\Pi'\left(\tau^\gamma\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_n}\omega_2\right)\right) = i\Pi'\left(\tau^\gamma\left(\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi_n}\right)\right), \qquad (38)$$

где ω_1,ω_2 *— главные символы форм* $\omega_{X,1}$ *и* $\omega_{X,2}$, *причем*

$$[a,b] = ab - (-1)^{kl}ba, \quad k = \deg a, l = \deg b.$$

В п. **2.1.4** дается теорема об индексе и приводятся необходимые характеристические классы.

Определение 0.19. *Формой Тодда* на подмногообразии M^γ называется дифференциальная форма $\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C}) \in \Omega^{ev}(M^\gamma)$, определяемая как

$$\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det\left(\frac{-\Omega^\gamma/2\pi i}{1-\exp(\Omega^\gamma/2\pi i)}\right),$$

где Ω^γ — форма кривизны связности Леви–Чивиты на M^γ.

Форма Тодда $\mathrm{Td}(T^*X^\gamma \otimes \mathbb{C})$ на X^γ определяется схожим образом. Пара этих форм является замкнутой в комплексе $(\widetilde{\Omega}^*(M^\gamma,\pi^\gamma),\widetilde{\partial})$, а её класс когомологий будем обозначать через

$$\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) \in \widetilde{H}^{ev}(M^\gamma,\pi^\gamma). \qquad (39)$$

Конормальным расслоением подмногообразия $M^\gamma \subset M$ называется подмножество

$$N^\gamma = \{(x,\xi) \in T^*M \mid x \in M^\gamma, \xi(v) = 0 \ \forall v \in T_xM^\gamma \subset T_xM\}.$$

Определим класс когомологий

$$\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma) - \mathrm{ch}\,\Omega^{odd}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)} \in H^{ev}(M^\gamma), \quad (40)$$

где $\Omega^{ev/odd}$ — векторное расслоение внешних форм четной/нечетной степени, а класс $\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)$ определен как линейная комбинация обычных характеров Черна

$$\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma) = \sum_k \lambda_k \,\mathrm{ch}\, V_{\lambda_k}.$$

Здесь $\Omega^{ev}(N^\gamma\otimes\mathbb{C})=\bigoplus_k V_{\lambda_k}$ — разложение векторного расслоения на собственные подрасслоения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k\in\mathbb{S}^1$ эндоморфизма расслоений γ. Класс $\Omega^{odd}(N^\gamma\otimes\mathbb{C})(\gamma)$ определяется аналогично.

Следующая теорема является основным результатом главы 2.

Теорема 0.20. *Пусть $\mathcal{D}$ — эллиптический оператор в смысле определения 0.9. Тогда справедлива формула индекса*

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}=\sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma}\langle \operatorname{ch}^\gamma\sigma(\mathcal{D})\wedge \operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C}),[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle, \tag{41}$$

где суммирование производится по классам сопряженности группы Γ*, а ряд сходится абсолютно.*

В **§2.2** рассмотрим специальный класс операторов Буте де Монвеля, для которых вычисление индекса упрощается. В п. **2.2.1** приводится постановка задачи. Как и раньше, пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с краем X, а Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma: M\to M$, сохраняющих край $\gamma(X)=X$.

Определение 0.21. Векторное расслоение E над многообразием M называется Γ-*расслоением*, если для любых точек $m\in M$ и элементов $\gamma\in\Gamma$ существует изоморфизм слоев

$$t_m(\gamma): E_m\to E_{\gamma(m)},$$

гладко зависящий от m и удовлетворяющий равенству

$$t(\gamma_1)t(\gamma_2)=t(\gamma_1\gamma_2)\qquad \forall\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma.$$

Определим оператор сдвига

$$T(\gamma): C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E),\qquad (T(\gamma)u)(m)=t_{\gamma^{-1}(m)}(\gamma)u(\gamma^{-1}m). \tag{42}$$

Можно показать, что справедлива формула композиции операторов сдвига

$$T(\gamma_1)T(\gamma_2)=T(\gamma_1\gamma_2)\qquad \forall\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma.$$

Пусть

$$\mathcal{D}:\ \begin{matrix} C^\infty(M,E_1)\\ \oplus\\ C^\infty(X,F_1)\end{matrix}\ \longrightarrow\ \begin{matrix} C^\infty(M,E_2)\\ \oplus\\ C^\infty(X,F_2)\end{matrix} \tag{43}$$

— эллиптический оператор Буте де Монвеля (без сдвигов), действующий в сечениях Γ-расслоений E_i,F_i, $i = 1,2$.

Теперь определим матричные операторы

$$\mathcal{T}_i(\gamma) = \begin{pmatrix} T_{E_i}(\gamma) & 0 \\ 0 & T_{F_i}(\gamma) \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(M,E_i) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_i) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,E_i) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_i) \end{matrix},$$

где операторы $T_{E_i}(\gamma)$, $T_{F_i}(\gamma), i = 1,2$, обозначают операторы сдвига (42) в векторных расслоениях E_i, F_i.

Определение 0.22. Оператор (43) называется Γ-*инвариантным*, если выполнено равенство

$$\mathcal{D}\mathcal{T}_1(\gamma) = \mathcal{T}_2(\gamma)\mathcal{D} \qquad \forall\gamma \in \Gamma. \tag{44}$$

Пусть дан матричный $n \times n$ проектор

$$P \in \mathrm{Mat}_n(C^\infty(M) \rtimes \Gamma). \tag{45}$$

Определим оператор

$$\widetilde{P}_j : \begin{matrix} C^\infty(M,E_j \otimes \mathbb{C}^n) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_j \otimes \mathbb{C}^n) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,E_j \otimes \mathbb{C}^n) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_j \otimes \mathbb{C}^n) \end{matrix}, \quad j = 1,2,$$

по формуле

$$\widetilde{P}_j = \sum_{\gamma\in\Gamma}(1 \otimes P(\gamma))(\mathcal{T}_j(\gamma) \otimes 1). \tag{46}$$

Теперь определим основной объект параграфа. Путь $\mathcal{D}$ — Γ-инвариантный оператор (43), а P — проектор как в формуле (45). Обозначим прямую сумму n копий оператора $\mathcal{D}$ через $\mathcal{D} \otimes 1_n$.

Определение 0.23. Оператор

$$\widetilde{P}_2(\mathcal{D} \otimes 1_n)\widetilde{P}_1 : \mathrm{Im}\widetilde{P}_1 \longrightarrow \mathrm{Im}\widetilde{P}_2, \quad \text{где } \mathrm{Im}\widetilde{P}_j \subset L^2(M,E_j \otimes \mathbb{C}^n) \oplus L^2(X,F_j \otimes \mathbb{C}^n), \tag{47}$$

обозначается через $\mathcal{D} \otimes 1_P$ и называется *оператором $\mathcal{D}$, скрученным проектором P.*

Лемма 0.24. *Оператор* (47) *фредгольмов.*

В п. **2.2.2** приводится формула индекса таких скрученных операторов.

Теорема 0.25. *Справедлива следующая формула индекса скрученных операторов:*

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}\otimes 1_P)=\sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma}\left\langle \alpha^\gamma\left(\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)\right)\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\operatorname{ch}^\gamma(P),[M^\gamma,X^\gamma]\right\rangle,\qquad(48)$$

где

- $[M^\gamma,X^\gamma]\in H_{n_\gamma}(M^\gamma,X^\gamma), n_\gamma=\dim M^\gamma$ — фундаментальный класс в относительных гомологиях;
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает спаривание между когомологиями и гомологиями;
- $\operatorname{ch}^\gamma(P)\in H^{ev}(M^\gamma)$ — характер Черна проектора P, определяемый по формуле
$$\operatorname{ch}^\gamma(P)=\operatorname{tr}\tau^\gamma\left(P\exp\left(-\frac{\nabla_P^2}{2\pi i}\right)\right)\in\Omega^*(M^\gamma),\qquad(49)$$
где $\nabla_P=P\cdot d\cdot P$ и $\nabla_P^2=P(dP)^2$. Форма (49) является замкнутой, а ее класс когомологий также обозначим через $\operatorname{ch}^\gamma(P)$;
- характер Черна $\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)$ в формуле (48) вычисляется следующим образом. Определим связности
$$\nabla_{E_j}=q_{E_j}dq_{E_j},$$
где d означает внешнюю производную на T^*M, и связность
$$\widetilde{\nabla}=\nabla_{E_1}+r(\nabla a),\ \text{где } \nabla a\equiv\nabla_{E_2}a-a\nabla_{E_1}.$$
Ее форма кривизны равна
$$\widetilde{\Omega}\stackrel{\text{def}}{=}(\widetilde{\nabla})^2=\nabla_{E_1}^2+\nabla_{E_1}(r\nabla a)+(r\nabla a)^2.$$
Определим характер Черна по формуле
$$\operatorname{ch}^M(\mathcal{D})(\gamma)=\operatorname{tr}\left(\gamma\left(e^{-\widetilde{\Omega}/2\pi i}q_{E_1}-q_{E_2}e^{-\nabla_{E_2}^2/2\pi i}\right)\right)\in\Omega_c^{ev}(T^*M^\gamma),\qquad(50)$$
где tr — матричный след. Аналогично определив характер Черна $\operatorname{ch}^X(\mathcal{D})(\gamma)$, определим класс Черна $\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)$
$$\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)=[\operatorname{ch}^M(\mathcal{D})(\gamma),\operatorname{ch}^X(\mathcal{D})(\gamma)]\in H^*(T^*M^\gamma,\pi^\gamma).$$

- отображение
$$\alpha^\gamma : H^*(T^*M^\gamma,\pi^\gamma) \longrightarrow H^{*-n}(M^\gamma,X^\gamma)$$
в формуле (48) аналогично формуле (22) определяет соответствующий изоморфизм Тома для многообразия M^γ, где π^γ — проекция $\pi^\gamma : \partial(T^*M^\gamma) \longrightarrow T^*X^\gamma$.

Вычисление индекса по формуле (48) оказывается проще, чем по формуле (41).

В п. **2.2.3** в качестве примера рассмотрена скрученная краевая задача для оператора Эйлера.

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} d+d^* \\ i^* \end{pmatrix} : \Omega^{ev}(M) \longrightarrow \begin{matrix} \Omega^{odd}(M) \\ \oplus \\ \Omega^{ev}(X) \end{matrix}, \qquad (51)$$

где $i : X \hookrightarrow M$ естественное вложение края, $d : \Omega^{ev}(M) \to \Omega^{odd}(M)$ — внешний дифференциал, а d^* — сопряженный к нему относительно римановой метрики на M. Для матричного проектора $P \in \mathrm{Mat}_N(C^\infty(M) \rtimes \Gamma)$ над гладким скрещенным произведением рассмотрим скрученную краевую задачу $\mathcal{E} \otimes 1_P$.

Теорема 0.26. *Индекс скрученной краевой задачи $\mathcal{E} \otimes 1_P$ равен*

$$\mathrm{ind}(\mathcal{E} \otimes 1_P) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma} {\sum}' \chi(M^\gamma, \partial M^\gamma)\, \mathrm{ch}_0^\gamma(P).$$

Здесь

- $\chi(M^\gamma, \partial M^\gamma)$ *обозначает относительную эйлерову характеристику множества неподвижных точек M^γ;*
- *число $\mathrm{ch}_0^\gamma(P)$ равно компоненте нулевой степени характера Черна проектора P;*
- $\chi(M^\gamma, \partial M^\gamma)$ *и* $\mathrm{ch}_0^\gamma(P)$ *рассматриваются как локально постоянные функции на множестве M^γ;*
- *знак ${\sum}'$ обозначает суммирование по компонентам связности множества M^γ.*

На этом завершается вторая глава.

Глава 3 состоит из 3 параграфов и 13 пунктов и посвящена исследованию эллиптических операторов, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы.

В п. **3.1.1** проводится исследование таких краевых задач. Пусть M — гладкое компактное подмногообразие с краем ∂M, Γ — дискретная конечно-порожденная группа диффеоморфизмов $\gamma : M \to M$, сохраняющих край $\gamma(\partial M) = \partial M$. Рассмотрим оператор сдвига на M

$$T_\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \qquad T_\gamma u(x) = u(\gamma^{-1}x)$$

и оператор

$$\mathcal{D} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{D}_\gamma \mathcal{T}_\gamma : \mathcal{H}^s(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-m}(M), \tag{52}$$

где $\mathcal{H}^s(M) = H^s(M) \oplus H^s(\partial M)$, $\mathcal{D}_\gamma \in \Psi_B^{m,d}(M)$, $\mathcal{T}_\gamma$ — оператор сдвига.

В п. **3.1.2** определяется внутренний траекторный символ задачи (52). Фиксируем точку $(x,\xi) \in T_0^*M$. Для произвольного элемента $\gamma \in \Gamma$ через $\partial\gamma : T^*M \to T^*M$ обозначим кодифференциал $\partial\gamma = (d\gamma^t)^{-1}$ диффеоморфизма $\gamma : M \to M$. Пусть на многообразии M выбрана риманова метрика, vol_M — риманова форма объема, Δ — оператор Лапласа.

Определим следующие объекты:

- вес $\mu_s : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_+$, определяемый формулой:

$$\mu_s(\gamma) = \left[\frac{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta))^s\right](x,\xi); \tag{53}$$

- весовое пространство ℓ^2 на группе Γ:

$$\ell^2(\Gamma,s) = \left\{ \{w(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \;\middle|\; w(\gamma) \in \mathbb{C} \text{ при всех } \gamma \in \Gamma \text{ и } \sum_\gamma |w(\gamma)|^2 \mu_s(\gamma) < \infty \right\}.$$

Определение 0.27. *Внутренний траекторный символ* оператора (52) порядка m в точке $(x,\xi) \in T_0^*M$ определяется как конечно-разностный оператор

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x,\xi) : \ell^2(\Gamma, s) \longrightarrow \ell^2(\Gamma, s-m), \tag{54}$$

причем для оператора сдвига мы полагаем

$$(\sigma_{\mathrm{int}}(T_{\gamma_1})w)(\gamma) = w(\gamma\gamma_1),$$

а для оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}' \in \Psi_B(M)$ полагаем

$$(\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}')w)(\gamma) = \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}')(\partial\gamma^{-1}(x,\xi))w(\gamma).$$

Далее в п. **3.1.3** определяется граничный траекторный символ задачи (52).

Определение 0.28. *Граничный траекторный символ* оператора (52) порядка m в точке $(x',\xi') \in T^*_0\partial M$ определяется как оператор

$$\sigma_\partial(\mathcal{D})(x',\xi') : \ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^s) \longrightarrow \ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^{s-m}), \tag{55}$$

причем символ оператора сдвига определяется формулой

$$(\sigma_\partial(T_{\gamma_1})w)(\gamma) = w(\gamma\gamma_1),$$

а символ оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}'$ определяется формулой

$$(\sigma_\partial(\mathcal{D}')(x',\xi')w)(\gamma) = \partial\gamma^{*-1}\sigma_\partial(\mathcal{D}')(\partial\gamma^{-1}(x',\xi'))\partial\gamma^* w(\gamma).$$

В п. **3.1.4** приводится теорема о фредгольмовости краевой задачи (52).

Определение 0.29. Краевая задача $\mathcal{D}$ (см. (52)) называется *эллиптической*, если выполнены два условия:

1) внутренний символ $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x,\xi)$ (см. (54)) обратим для любых $(x,\xi) \in T^*_0 M$;
2) граничный символ $\sigma_\partial(\mathcal{D})(x',\xi')$ (см. (55)) обратим для любых $(x',\xi') \in T^*_0\partial M$.

Рассмотрим C^*-алгебру $\overline{\Psi(M)}/\mathcal{K}$, где через $\overline{\Psi(M)} \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(\partial M))$ обозначено замыкание по операторной норме алгебры $\Psi_B(M)$, а $\mathcal{K}$ — идеал компактных операторов. Через Σ обозначим пространство примитивных идеалов C^*-алгебры символов $\overline{\Psi(M)}/\mathcal{K}$.

Стандартным образом из результатов [28] получается следующая теорема:

Теорема 0.30. *Пусть группа Γ аменабельна, а её действие на пространстве Σ является топологически свободным. Тогда краевая задача* (52) *фредгольмова тогда и только тогда, когда она эллиптична.*

В **§3.2** применяется аппарат циклических когомологий для получения формулы индекса нелокальных краевых задач.

В п. **3.2.1** напоминаются основные понятия теории циклических когомологий.

В п. **3.2.2** строится топологический индекс краевых задач для неизометрического действия группы. Рассмотрим многообразие $M = \mathbb{R}^n_+$ с координатами

(x',x_n) и краем $X = \mathbb{R}^{n-1}$, определяемым уравнением $x_n = 0$. Будем рассматривать алгебру $\mathcal{A}$ символов Буте де Монвеля нулевых порядка и типа на M. Здесь элементы алгебры $\mathcal{A}$ — это пары

$$\widetilde{a} = (a,a_X) \in \mathcal{O}(T_0^*M) \oplus \mathcal{O}(T_0^*X,\mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})), \tag{56}$$

где a и a_X — внутренний и граничный символы, соответственно, а через $\mathcal{O}$ обозначены пространства символов.

Обозначим через $C^n(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n+1},\mathbb{C})$ пространство $(n+1)$-линейных функционалов $\varphi(a_0,...,a_n)$, где $a_0,...,a_n \in \mathcal{A}$. Такие функционалы называются *n-коцепями.* Определим пару коцепей $(\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1}) \in C^{odd}(\mathcal{A} \rtimes \Gamma)$:

$$\varphi_{2n-1}(a_0,\ldots,a_{2n-1}) = \int\limits_{S^*M} (a_0 da_1 \ldots da_{2n-1})(e), \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2n-3}(a_0,\ldots,a_{2n-3}) &= \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}' \sum_{j=0}^{2n-3} (-1)^j (a_j d'a_{j+1} \ldots d'a_{j-1})(e) \\ &= N\varphi'_{2n-3}(a_0,\ldots,a_{2n-3}),\end{aligned} \tag{58}$$

$$\text{где } \varphi'_{2n-3}(a_0,\ldots,a_{2n-3}) = \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'(a_0 d'a_1 \ldots d'a_{2n-3})(e). \tag{59}$$

Здесь $C^{odd}(\mathcal{A} \rtimes \Gamma) = \bigoplus\limits_k C^{2k+1}(\mathcal{A} \rtimes \Gamma)$ — пространство нечетных коцепей.

Дадим аналог формулы для регуляризованного следа коммутатора (см. (25), ср. с леммой 0.18). Пусть снова Ω_{T^*X} — дифференциальная градуированная алгебра, порожденная граничными символами и дифференциальными формами на S^*X (см. (23)).

Предложение 0.31. *Для форм $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma$ справедлива формула*

$$\int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2](e) = -i \int\limits_{S^*X} \Pi'\left(d\omega_1\omega_2\right)(e), \tag{60}$$

где $[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2] = \widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2 - (-1)^{\deg\widetilde{\omega}_1 \deg\widetilde{\omega}_2}\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1$ — суперкоммутатор, а $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(T^*X)$ — главные символы форм $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2$ на $S^*X \times \mathbb{R}_{\xi_n}$.

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 0.32. *Пара $(k\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1})$, где $k = 2\pi i(2n-1)/(2n-2)$, определяет класс в периодических циклических когомологиях $HP^{odd}(\mathcal{A} \rtimes \Gamma)$. Это означает,* *что справедливы следующие равенства*

$$B\varphi_{2n-3}=0;\qquad kb\varphi_{2n-3}+B\varphi_{2n-1}=0;\qquad b\varphi_{2n-1}=0, \tag{61}$$

где $B : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n-1}(\mathcal{A})$ *— дифференциал Конна,* $b : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{A})$ *— дифференциал Хохшильда.*

Наконец, определим топологический индекс нелокальных краевых задач, используя полученный циклический коцикл. Пусть $K_1(\mathcal{A} \rtimes \Gamma)$ — группа K_1 скрещенного произведения алгебры символов Буте де Монвеля $\mathcal{A}$ и группы Γ. Эллиптический символ $\sigma=\sigma(\mathcal{D})\in\mathcal{A}\rtimes\Gamma$ определяет класс

$$[\sigma]\in K_1(\mathcal{A}\rtimes\Gamma). \tag{62}$$

Обозначим класс из теоремы 0.32 через

$$\mathrm{Todd}=[k\varphi_{2n-3},\varphi_{2n-1}]\in HP^{odd}(\mathcal{A}\rtimes\Gamma), \tag{63}$$

где $k=2\pi i(2n-1)/(2n-2)$, коцепи φ_{2n-1},φ_{2n-3} определены в формулах (57) и (58).

Спаривание Черна–Конна классов (62) и (63) (см., [50, §3]) обозначается через $\langle \mathrm{Todd},[\cdot]\rangle$ и равно

$$\langle \mathrm{Todd},[\sigma]\rangle=\frac{(-1)^{n-1}}{2(2\pi i)^{n-1}}\frac{(n-2)!}{(2n-2)!}\varphi_{2n-3}(\sigma^{-1},\sigma,\ldots)+ \\ +\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^{n}}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\varphi_{2n-1}(\sigma^{-1},\sigma,\ldots). \tag{64}$$

Определение 0.33. Топологический индекс нелокальной эллиптической краевой задачи $\mathcal{D}$ с символом $\sigma=\sigma(\mathcal{D})$ определим как число

$$\mathrm{ind}_t\mathcal{D}=\langle \mathrm{Todd},[\sigma(\mathcal{D})]\rangle. \tag{65}$$

Отметим, что в случае замкнутого многообразия первое слагаемое в (64) равно нулю и формула (65) эквивалентна формуле индекса Федосова (см. [22, Гл.2 §4]).

Из теоремы 0.32 и спаривания Черна–Конна получаем следствие

Следствие 0.34. *Пусть* $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\varepsilon\in[0,1]$ *— такое гладкое семейство краевых задач, что существует гладкое семейство обратимых символов* $\sigma(\mathcal{D}_\varepsilon)^{-1}\in\mathcal{A}\rtimes\Gamma$. *Тогда топологический индекс* $\mathrm{ind}_t\mathcal{D}_\varepsilon=\mathrm{ind}_t\mathcal{D}_0$ *не зависит от* ε.

Параграф **3.3** посвящен исследованию краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра. В п. **3.3.1** приводится постановка этой задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, на котором группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует скручиваниями перпендикулярно образующей цилиндра $(x,t) \mapsto (x + k\alpha t, t)$, $k \in \mathbb{Z}$. Определим оператор сдвига, отвечающий скручиваниям, формулой

$$(Tu)(x,t) = u(x - \alpha t, t).$$

На конечном цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset Y$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ i^*B \end{pmatrix} : H^s(M) \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}(M) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N). \end{array} \tag{66}$$

Определим операторы, участвующие в краевой задаче (66). Во-первых,

$$D = D\left(e^{ix}, t, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} D_l \left(e^{ix}, t, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) T^l, \qquad \operatorname{ord} D = m \tag{67}$$

— дифференциальный оператор со сдвигами на цилиндре M, а коэффициенты D_l в нем являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant m$ с гладкими коэффициентами. Во-вторых, оператор $B = (B_0, B_1)$ в задаче (66) представляет собой пару операторов на левом/правом основании цилиндра, причем дифференциальный оператор на левом основании

$$B_0 = B_0\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) \text{ имеет порядок } \operatorname{ord} B_0 = b_0$$

и определяет $N \in \mathbb{N}$ граничных условий, а дифференциальный оператор со сдвигами на правом основании

$$B_1 = B_1\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} B_{1,l}\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right) T^l, \operatorname{ord} B_1 = b_1,$$

определяет $N \in \mathbb{N}$ граничных условий, в то время, как $B_{1,l}$ — дифференциальные операторы.

В п. **3.3.2** вычисляется внутренний символ задачи (66), а в п. **3.3.3** даются его условия эллиптичности.

Предложение 0.35. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *внутренний символ* $\sigma_{int}(\mathcal{D})\,(x,t,\xi_1,\xi_2)$ *эллиптичен при любых значениях параметров* $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in T_0^*M$;

2) *семейство дифференциально-разностных операторов*

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}} :\ & H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1) \\ \widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) =\ & \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\mathcal{F}_{\varphi\to k} = D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t},t,1,\xi_2 - i\alpha\tfrac{d}{d\varphi}, e^{-i\varphi}\right), \end{aligned} \tag{68}$$

где $(\widetilde{T}_{\alpha t}u)(\varphi) = u(\varphi-\alpha t)$, *обратимо при любых значениях параметров* $(x,t) \in M$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$.

В п. **3.3.4** вычисляется граничный символ задачи (66) на левом основании цилиндра. Он равен

$$\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s_+ \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix}, \qquad w(\xi_2) \overset{\sigma^L_\partial(\mathcal{D})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \Pi_+ D(e^{ix},0,\xi_1,\xi_2,T_{\alpha\xi_1})w(\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}(B_0(x,\xi_1,\xi_2)w(\xi_2)) \end{pmatrix}, \tag{69}$$

где

- $B_0(x,\xi_1,\xi_2)$ — главный символ оператора B_0 в задаче (66);
- $T\colon H^s_+ \longrightarrow H^s_+$ — оператор сдвига, действующий по формуле $(T_{\alpha\xi_1}w)(\xi_2) = w(\xi_2 + \alpha\xi_1)$;
- пространство
$$H^s_+ = \mathcal{F}_{t\to\xi_2}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_+))$$
есть пространство образов при преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{t\to\xi_2}$ пространства Соболева $H^s(\overline{\mathbb{R}}_+)$ функций на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Даются условия эллиптичности граничного символа задачи (66) на левом основании цилиндра.

Предложение 0.36. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *граничный символ* $\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ *на левом основании цилиндра (см.* (69)*) эллиптичен при любых значениях параметров* $(x,\xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=0}$;

2) *краевая задача*

$$\widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix}, \tag{70}$$

где

$$\widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)=\begin{pmatrix}D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t})\\ j^*B_0(e^{ix},\xi_1,-i\partial_t)\end{pmatrix},$$

на $\overline{\mathbb{R}}_+$ *с периодическими коэффициентами обратима при любых значениях параметров* $(x,\xi_1)\in T^*_0\partial M|_{t=0}$*;*

3) *(условие Шапиро–Лопатинского на левом основании цилиндра* $\mathbb{S}^1\times[0,1]$*) оператор*

$$j^*\left(B_0(e^{ix},\xi_1,-i\partial_t)\right):L_+(x,\xi_1)\longrightarrow\mathbb{C}^N,\tag{71}$$

где N *— число граничных условий в задаче* (66) *на левом основании цилиндра, а через* $L_+(x,\xi_1)$ *обозначено пространство решений уравнения*

$$D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t})u(t)=f(t),$$

стремящихся к нулю при $t\to+\infty$*, обратим.*

Далее в п. **3.3.5** вычисляется граничный символ задачи (66) на правом основании цилиндра:

$$\begin{aligned}\sigma^R_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1):\ell^2(\mathbb{Z},H^s_-)\ &\longrightarrow\ \ell^2(\mathbb{Z},H^{s-m}_-\oplus\mathbb{C}),\\ w(k,\xi_2)\ &\longmapsto\ \begin{pmatrix}D(e^{i(x-k\alpha)},1,\xi_1,\xi_2+k\alpha\xi_1,\mathcal{T})w(k,\xi_2)\\ \Pi'_{\xi_2}\left(B_1(e^{i(x-k\alpha)},\xi_1,\xi_2+k\alpha\xi_1,\mathcal{T})w(k,\xi_2)\right)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $(\mathcal{T}w)(k,\xi_2)=w(k+1,\xi_2+\alpha\xi_1)$.

Следующее предложение является аналогом предложения 0.36 для граничного символа на правом основании цилиндра

Предложение 0.37. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *граничный символ* $\sigma^R_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ *на правом основании цилиндра (см.* (72)*) эллиптичен при любых значениях параметров* $x\in\mathbb{S}^1$*,* $\xi_1\in\mathbb{R}$*;*

2) *оператор*

$$\overline{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D}):H^s(\overline{\mathbb{R}}_-,L^2(\mathbb{S}^1))\longrightarrow\begin{matrix}H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-,L^2(\mathbb{S}^1))\\ \oplus\\ L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N)\end{matrix},\tag{72}$$

$$\overline{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})u(\tau,\psi)=\begin{pmatrix}D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha,1,1,-i\partial_\tau,e^{-i\psi})u(\tau,\psi)\\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha,1,-i\partial_\tau,e^{-i\psi})u(0,\psi)\end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\tau,\psi) = u(\tau,\psi-\alpha)$, *обратим при любых* $x \in \mathbb{S}^1$;

Если операторы D_l *в формуле* (67) *имеют постоянные по* x *коэффициенты при* $t = 1$, *то условия 1) и 2) эквивалентны условию:*

3) *(условие Шапиро–Лопатинского) обратимо семейство краевых задач для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на полупрямой:*

$$\begin{pmatrix} D(1,1,-i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \\ j^* B_1(1,-\,i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \end{pmatrix} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix} \tag{73}$$

с параметром $\psi \in [0,2\pi]$.

Из предложений 0.35, 0.36 и 0.37 получаем условие эллиптичности задачи (66), которое является основным результатом параграфа.

Теорема 0.38. *Краевая задача* (66) *эллиптична тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

1) *внутренний символ оператора* $\mathcal{D}$ *эллиптичен;*
2) *выполнено условие Шапиро–Лопатинского на левом основании цилиндра* M;
3) *выполнено условие Шапиро–Лопатинского на правом основании цилиндра* M.

Следствие 0.39. *Пусть* α *несоизмеримо с* π. *Если краевая задача* (66) *эллиптична (т.е. выполнены условия теоремы 0.38), то она фредгольмова.*

В заключительном пункте **3.3.6** рассмотрен пример краевой задачи со скручиваниями цилиндра:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (1+\varepsilon(T+T^*))\partial_x^2 u = f(x,t), \\ \quad u|_{t=0} = g_0(x), \quad u|_{t=1} = g_1(x), \end{cases} \tag{74}$$

где $u \in H^s(M)$, $f \in H^{s-2}(M)$, $g_0,g_1 \in H^s(\mathbb{S}^1)$, $(Tu)(x,t) = u(x-\alpha t,t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t) \in C^\infty([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Обратимость внутреннего символа задачи (74) эквивалентна обратимости оператора Матьё

$$-\frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos\varphi\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-2}(\mathbb{R}), \tag{75}$$

а обратимость граничного символа задачи (74) на правом основании цилиндра эквивалентна однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} -\alpha^2 u''(\tau) + (1 + 2\varepsilon\cos\psi)\, u(\tau) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-), \\ u(0) = h_1. \end{cases} \tag{76}$$

Теорема 0.40. *Задача* (74) *эллиптична, когда выполнены следующие условия:*

1) оператор Матьё (75) *обратим;*

2) выполнено условие $|\varepsilon(1)| < 1/2$.

На этом завершается третья глава.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах:

1. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Elliptic boundary value problems associated with isometric group actions // *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* — 2021. — Vol. 12, no. 50. — 1–34.
2. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Index of twisted elliptic boundary value problems associated with isometric group actions // *Lobach. J. of Math.* — 2022. — Vol. 43, no. 10. — 2635–2646.
3. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Periodic Cyclic Cocycles on the Boutet de Monvel Symbol Algebra // *Russ. J. Math. Phys.* — 2022. — Vol. 29. — 417–425.
4. Boltachev, A. V., Savin A. Yu. Trajectory Symbols and the Fredholm Property of Boundary Value Problems for Differential Operators with Shifts // *Russ. J. Math. Phys.* — 2023. — Vol. 30, — 135–151.
5. Болтачев А. В. Об эллиптичности операторов со скручиваниями // *СМФН* — 2023. — Vol. 69, no. 4. — 565–577.

Тезисы конференций:

1. Болтачев А. В., Савин А. Ю. “О проблеме индекса нелокальных эллиптических краевых задач,” *Сборник материалов международной конференции КРОМШ- 2021*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021, ISBN 978-5-6046943-4-3.

2. Boltachev A. V. “On index of elliptic boundary-value problems associated with isometric group actions,” *Девятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 28 июня – 5 июля 2022 г. = The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, Russia, June 28 – July 5, 2022 : тезисы докладов*, Москва: РУДН, 2022, ISBN 978-5-209-11108-5.

3. Boltachev A. V., Savin A. Yu. “Index of twisted elliptic boundary value problems associated with isometric group actions,” *Материалы международной научной конференции “Уфимская осенняя математическая школа”*, Уфа: РИЦ БашГУ, 2022, ISBN 978-5-7477-5533-8.

4. Болтачев А. В., Савин А. Ю. “Периодические циклические коциклы в алгебре псевдодифференциальных краевых задач,” *Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023, ISBN 978-5-9273-3692-0.

5. Болтачев А. В., Савин А. Ю. “Периодические циклические коциклы в алгебре символов Буте де Монвеля,” *Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023, ISBN 978-5-9273-3692-0.

6. Boltachev A. V. “On Ellipticity of Operators with Shear Mappings,” *Студенческая математической конференции “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование” : тезисы докладов. Россия, Москва, 15–17 мая 2024 г. = The Student Conference “Differential Equations and Mathematical Modeling”*, Москва: РУДН, 2024, ISBN 978-5-209-11810-7.

Глава 1. Предварительные сведения

В настоящей главе даются предварительные сведения, использующиеся в данной работе. В §1.1 даются сведения об операторах Буте де Монвеля, а также вводится алгебра символов этих операторов. В §1.2 определяются операции алгебраического скрещенного произведения и гладкого скрещенного произведения.

1.1 Алгебра операторов Буте де Монвеля

В этом параграфе напомним определение операторов Буте де Монвеля и их символов.

Многообразия с краем. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем X. В окрестности края будем использовать локальные координаты $x = (x',x_n)$ на M, где $\dim M = n$, $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$ — локальные координаты на X, а x_n — определяющая функция края. Иначе говоря, край локально определяется уравнением $x_n = 0$, а многообразие M определяется неравенством $x_n \geqslant 0$. Обозначим через (ξ',ξ_n) переменные, двойственные к переменным (x',x_n). Тогда набор (x',x_n,ξ',ξ_n) определяет локальные координаты на кокасательном расслоении T^*M.

Пространства функций на полуоси и их преобразования Фурье. Ниже напоминаются необходимые пространства функций (см. [13]).

Определение 1.1. *Пространством Шварца* $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ называется пространство гладких быстро убывающих на бесконечности функций на $\overline{\mathbb{R}}_+$, где скорость убывания полагается такой, что

$$\|u\|_{k,l} = \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}_+} |x^k \partial_x^l u(x)| < \infty,$$

для всех $k,l \in \mathbb{Z}_+$. Пространство Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ рассматривается как пространство Фреше с топологией, заданной системой полунорм $\|u\|_{k,l}$.

Обозначим через

$$H_+ = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$$

пространство образов преобразования Фурье $\mathcal{F}_{x_n\to\xi_n}$ функций из пространства Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Обозначим через $\overline{H}_+$ замыкание по норме пространства $H_+ \subset L^2(\mathbb{R})$. Схожим образом определим пространство H_- как

$$H_- = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-)).$$

Будем рассматривать пространства $H_\pm$ как пространства Фреше с системами полунорм $\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n}u\|_{k,l}$ на $\overline{\mathbb{R}}_\pm$, соответственно. Далее определим проектор $\Pi_+ : H_+ \oplus H_- \to H_+$ на первое слагаемое и непрерывный функционал

$$\begin{aligned} \Pi' : H_+ \oplus H_- \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{C}, \\ u(\xi_n) \quad &\longmapsto \lim_{x_n\to 0+} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n}(u(\xi_n)). \end{aligned}$$

Отметим, что если $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap (H_+ \oplus H_-)$, то

$$\Pi' u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} u(\xi_n)d\xi_n. \tag{1.1}$$

Введем операцию топологического тензорного произведения пространств Фреше (см. [13]).

Определение 1.2. Пусть p_l^+, $l \in \mathbb{Z}_+$ и p_m^-, $m \in \mathbb{Z}_+$ — множества полунорм на пространствах функций F_1 и F_2, соответственно, задающие топологию на этих пространствах. Тогда *алгебраическое тензорное произведение* пространств F_1 и F_2 обозначается через $F_1 \otimes_{alg} F_2$ и состоит из функций вида

$$f(\nu,\mu) = \sum_{i=1}^{N} g_i(\nu)h_i(\mu), \quad \text{где} \quad g_i \in F_1, h_i \in F_2, N \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2}$$

На пространстве $F_1 \otimes_{alg} F_2$ определены полунормы

$$(p_l^+ \otimes_{alg} p_m^-)(f) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{N} p_l^+(g_i)p_m^-(h_i)\right\}, \tag{1.3}$$

где инфимум берется по всем разложениям (1.2) функции f.

Определение 1.3. Счетное множество полунорм (1.3) задает топологию на алгебраическом тензорном произведении $F_1 \otimes_{alg} F_2$. Пополнение по этому множеству полунорм называется *топологическим тензорным произведением* и обозначается через $F_1 \otimes F_2$.

Символы Буте де Монвеля нулевого порядка.

Определение 1.4. Классический символ $a = a(x',x_n,\xi',\xi_n) \in C^\infty(T^*M)$ с асимптотическим разложением

$$a \sim a_m + a_{m-1} + ... \tag{1.4}$$

с однородными компонентами a_l удовлетворяет *свойству трансмиссии*, если его порядок $m \in \mathbb{Z}$ и для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и произвольного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ справедливо следующее равенство:

$$D^k_{x_n} D^\alpha_{\xi'} a_l(x',0,0,\xi_n) = (-1)^{l-|\alpha|} D^k_{x_n} D^\alpha_{\xi'} a_l(x',0,0,-\xi_n), \quad \xi_n \neq 0, \tag{1.5}$$

где

$$D^\alpha_{\xi'} = \left(-i\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \left(-i\frac{\partial}{\partial \xi_{n-1}}\right)^{\alpha_{n-1}}.$$

Рассмотрим гладкие функции со значениями в пространствах Фреше

- $b(x',\xi',\xi_n) \in C^\infty(T_0^*X,H_-)$;
- $c(x',\xi',\xi_n) \in C^\infty(T_0^*X,H_+)$;
- $g(x',\xi',\xi_n,\eta_n) \in C^\infty(T_0^*X,H_+ \otimes H_-)$;
- $q(x',\xi') \in C^\infty(T_0^*X)$.

Здесь топологическое тензорное произведение пространств $H_\pm$ и гладкие функции на кокасательном расслоении без нулевого сечения

$$T_0^*X = \{(x',\xi') \in T^*X, \mid |\xi'| \neq 0\}$$

рассматриваются как пространства Фреше. Набору функций выше сопоставим гладкое семейство операторов

$$a_X(x',\xi') : \begin{matrix} \overline{H}_+ & & \overline{H}_+ \\ \oplus & \longrightarrow & \oplus \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C} \end{matrix} \tag{1.6}$$

с параметрами $(x',\xi') \in T_0^*X$. Оператор (1.6) действует на парах $h \in \overline{H}_+, v \in \mathbb{C}$ следующим образом:

$$a_X(x',\xi')\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_+(a(x',0,\xi',\xi_n)h(\xi_n)) + \Pi'_{\eta_n}(g(x',\xi',\xi_n,\eta_n)h(\eta_n)) + c(x',\xi',\xi_n)v \\ \Pi'_{\xi_n}(b(x',\xi',\xi_n)h(\xi_n)) + q(x',\xi')v \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Здесь $a(x',0,\xi',\xi_n)$ — сужение на границу однородного символа нулевой степени, обладающего свойством трансмиссии (см. определение 1.4) на многообразии M. Через Π'_{η_n} и Π'_{ξ_n} здесь обозначены функционалы (1.1), действующие по переменным η_n и ξ_n, соответственно.

Обозначим через $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C})$ алгебру ограниченных операторов в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}$.

Определение 1.5. *Главным символом* Буте де Монвеля нулевого порядка называется пара

$$\sigma=(\sigma_{\mathrm{int}},\sigma_X)\in C^\infty(T_0^*M)\oplus C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C})),$$

в которой:

1) первая компонента называется *внутренним символом* и является однородной функцией

$$\sigma_{\mathrm{int}}\in C^\infty(T_0^*M), \tag{1.8}$$

удовлетворяющей свойству трансмиссии (1.5);

2) вторая компонента называется *граничным символом* и является оператор-функцией

$$\sigma_X\in C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C}))\simeq C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C})) \tag{1.9}$$

на кокасательном расслоении T_0^*X края X без нулевого сечения. Функция $a(x',0,\xi',\xi_n)$ в формуле (1.7) называется *главным символом* граничного символа a_X. Граничный символ (1.9) является скрученно однородным (см. определение 1.6 ниже);

3) выполнено условие согласования:

$$(\sigma_{\mathrm{int}}(x,\xi))|_X=a(x',0,\xi',\xi_n).$$

В работе [13, § 2.1.2.3, Proposition 1] было показано, что гладкие семейства граничных символов (1.9) образуют алгебру. Обозначим эту алгебру через $\Sigma_X\subset C^\infty(T_0^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C}))$.

Операторы Буте де Монвеля. Введем бесконечно гладкие срезающие функции

$$\chi_1(\xi)=\begin{cases}0, & \text{при } |\xi|\leqslant 1,\\ 1, & \text{при } |\xi|>1+\varepsilon\end{cases}$$

и

$$\chi_2(\xi') = \begin{cases} 0, & \text{при } |\xi'| \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } |\xi'| > 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

при некотором фиксированном малом $\varepsilon > 0$.

Определение 1.6. Граничный символ $\sigma_X(x',\xi')$ называется *скрученно однородным* степени нуль при $|\xi'| \geqslant 1$, если $\forall |\xi'| \geqslant 1, x' \in X$ и $\lambda \geqslant 1$ имеем

$$a_X(x',\lambda\xi') = \varkappa_\lambda a_X(x',\xi')\varkappa_\lambda^{-1},$$

где

$$\begin{array}{rcc} \varkappa_\lambda : H_+ \oplus \mathbb{C} & \longrightarrow & H_+ \oplus \mathbb{C} \\ (h(\xi_n),v) & \longmapsto & (\lambda^{-1/2}h(\lambda^{-1}\xi_n), v) \end{array}$$

— действие группы растяжений.

Умножим внутренний символ σ_{int} на срезающую функцию $\chi_1(\xi)$. Получим символ на T^*M. Аналогично граничный символ $\sigma_X(x',\xi')$ умножим на срезающую функцию $\chi_2(\xi')$. Символу Буте де Монвеля σ нулевого порядка сопоставим оператор

$$\operatorname{Op}(\sigma) : \begin{array}{c} L^2(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} L^2(\overline{\mathbb{R}}^n_+) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \end{array} \tag{1.10}$$

по формуле (подробнее см. [13] или [11])

$$\operatorname{Op}(\sigma)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\pi)^{-n} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}^n_+} e^{i(x-y)\xi}\chi_1(\xi)\sigma_{\text{int}}(x,\xi)u(y)dyd\xi \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$(2\pi)^{-(n-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x'-y')\xi'} \begin{pmatrix} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_n \to x_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \chi_2(\xi')\sigma_X(x',\xi') \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{x_n \to \eta_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_n) \\ v(y') \end{pmatrix} dy'd\xi', \tag{1.11}$$

где через $\mathcal{F}_{x_n \to \eta_n}$ и $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_n \to x_n}$ обозначены прямое и обратное преобразования Фурье. Оператор в формуле (1.11) называется *оператором Буте де Монвеля.*

Используя разбиение единицы на M, подчиненное покрытию координатными картами, можно по символу построить краевую задачу на многообразии M.

Полученное линейное пространство операторов (1.10) нулевого порядка и типа для краткости будем обозначать через $\Psi_B(M) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$, где через $\mathcal{B}$ обозначена алгебра ограниченных операторов на $L^2(M) \oplus L^2(X)$. Справедливы следующие утверждения.

1. Линейное пространство операторов $\Psi_B(M)$ образует алгебру (см. [13; 37]).
2. Символьное отображение
$$\begin{array}{ccc} \Psi_B(M) & \longrightarrow & C^\infty(S^*M) \oplus C^\infty(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C})) \\ \mathcal{D} & \longmapsto & (\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}),\sigma_X(\mathcal{D})) \end{array} \tag{1.12}$$
корректно определено и справедлива формула композиции символов операторов Буте де Монвеля $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2$
$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_2),$$
$$\sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$
Здесь через $S^*M = \{(x,\xi) \in T^*M, |\xi| = 1\}$ и $S^*X = \{(x',\xi') \in T^*X, |\xi'| = 1\}$ обозначены косферические расслоения многообразия M и края X.
3. Символьное отображение (1.12) непрерывно продолжается до мономорфизма C^*-алгебр
$$\overline{\Psi_B(M)}/\mathcal{K} \longrightarrow C(S^*M) \oplus C(S^*X,\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C})),$$
где $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ — идеал компактных операторов, а замыкание $\overline{\Psi_B(M)}$ рассматривается в $\mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$.

Отметим, что отображения в пунктах 2 и 3 не являются сюръективными: во-первых, внутренний и граничный символы удовлетворяют свойству (1.5), во-вторых, они удовлетворяют определенным условиям согласования.

Действие группы и операторы сдвига. Фиксируем риманову метрику на ориентированном многообразии M размерности $\dim M = n$.

Определение 1.7. Формой объема vol_M на M называется дифференциальная форма степени n, определяемая формулой
$$\mathrm{vol}_M = \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$
которая нигде не обращается в нуль. Здесь g_{ij} — метрический тензор на многообразии M, а символ $\wedge$ обозначает операцию внешнего умножение.

Пусть Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma\colon M \to M$, сохраняющих край $\gamma(X) = X$. Полагаем, что локальные координаты вблизи края выбраны так, что x_n — Γ-инвариантная в окрестности края функция. Для элемента $\gamma \in \Gamma$ определим оператор сдвига

$$T_\gamma : L^2(M){\oplus}L^2(X) \longrightarrow L^2(M){\oplus}L^2(X), \quad (u(x),v(x')) \longmapsto (u(\gamma^{-1}(x)),v(\gamma^{-1}(x'))).$$

Этот оператор является унитарным, если мы наделим L^2-пространства нормами, определенными формами объема vol_M и vol_X, ассоциированными с римановой метрикой, а именно

$$\|u\|^2_{L^2(M,\mathrm{vol}_M)} = \int\limits_M |u|^2 \mathrm{vol}_M,$$

$$\|u\|^2_{L^2(X,\mathrm{vol}_X)} = \int\limits_X |u|^2 \mathrm{vol}_X.$$

Отображение $\gamma \mapsto T_\gamma$ определяет унитарное представление группы Γ на $L^2(M) \oplus L^2(X)$.

Опишем действия группы на алгебре операторов $\Psi_B(M)$ и на их символах. Дифференциал элемента $\gamma \in \Gamma$ является отображением

$$d\gamma : TM \longrightarrow TM,$$

где TM — касательное расслоение многообразия M. Действия группы Γ на многообразиях M и X поднимаются на кокасательные расслоения T^*M и T^*X с помощью кодифференциалов

$$\partial\gamma = (d\gamma^t)^{-1} : T^*M \longrightarrow T^*M$$

соответствующих диффеоморфизмов (здесь $d\gamma$ — дифференциал γ, а $d\gamma^t$ — его двойственное отображение кокасательного расслоения). В случае, когда диффеоморфизм γ линеен, дифференциал и кодифференциал действуют как операторы умножения на матрицы.

Известно (см., напр., [28]), что композиция $T_\gamma \mathcal{D} T_\gamma^{-1}$, где $\mathcal{D}$ — оператор Буте де Монвеля, а $\gamma \in \Gamma$, также является оператором Буте де Монвеля. Более того, внутренний и граничный символы композиций $T_\gamma \mathcal{D} T_\gamma^{-1}$ равны

$$\sigma_{\mathrm{int}}(T_\gamma \mathcal{D} T_\gamma^{-1})(x,\xi) = \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(\partial\gamma^{-1}(x,\xi)),$$

$$\sigma_X(T_\gamma \mathcal{D} T_\gamma^{-1})(x',\xi') = \sigma_X(\mathcal{D})(\partial\gamma^{-1}(x',\xi')).$$

Регуляризованный след на алгебре символов. Для работы с граничными символами операторов Буте де Монвеля напомним следующее определение.

Определение 1.8. [22, глава 2, §4] Отображение

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}'\colon\ & \Sigma_X \longrightarrow C^\infty(S^*X) \\ \operatorname{tr}' a_X(x',\xi') \ & = \Pi'_{\eta_n} g(x',\xi',\eta_n,\eta_n) + q(x',\xi'), \end{aligned} \tag{1.13}$$

называется *регуляризованным следом* tr' граничного символа $a_X \in \Sigma_X$, где функции g, q — компоненты граничного символа из формулы (1.7). Отображение (1.13) не обладает следовым свойством. Более точно, в работе [22, глава 2, §4, Лемма 2.1] была получена следующая формула дефекта следа:

$$\operatorname{tr}'[a_{X,1}, a_{X,2}] = -i\Pi'\left(\frac{\partial a_1(\xi_n)}{\partial \xi_n} a_2(\xi_n)\right) = i\Pi'\left(a_1(\xi_n)\frac{\partial a_2(\xi_n)}{\partial \xi_n}\right) \tag{1.14}$$

для любых $a_{X,1}, a_{X,2} \in \Sigma_X$, где a_1 и a_2 — главные символы граничных символов $a_{X,1}$ и $a_{X,2}$ соответственно.

Символы и операторы произвольного порядка. Теперь рассмотрим символы Буте де Монвеля произвольного порядка m. Как и раньше, главный символ — это пара

$$\sigma(\mathcal{D}) = (\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}), \sigma_X(\mathcal{D})),$$

где *внутренний символ*

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) \in C^\infty(T_0^*M)$$

— гладкая функция на кокасательном расслоении многообразия M без нулевого сечения. Внутренний символ является однородной функцией степени m и обладает свойством трансмиссии (1.5). Вторая компонента является оператор-функцией

$$\sigma_X(\mathcal{D}) \in C^\infty(T_0^*X, \mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})) \tag{1.15}$$

на кокасательном расслоении края X без нулевого сечения, где $\mathcal{B}$ — алгебра непрерывных операторов, действующих в пространстве Фреше. Следуя [13], определим следующие пространства: пространство многочленов $H' = \mathbb{C}[\xi_n]$ и пространство $H = H_+ \oplus H_- \oplus H'$, а через H_-^d обозначим сумму пространства H_- и пространства многочленов степени $\leqslant d-1$. Пусть компоненты оператора (1.7) такие, что

- $b(x',\xi',\xi_n) \in C^\infty(T_0^*X,H_-^d)$;
- $c(x',\xi',\xi_n) \in C^\infty(T_0^*X,H_+)$;
- $g(x',\xi',\xi_n,\eta_n) \in C^\infty(T_0^*X,H_+ \otimes H_-^d)$;
- $q(x',\xi') \in C^\infty(T_0^*X)$.

Граничные символы a_X с элементами из пространств выше образуют линейное пространство символов Буте де Монвеля порядка $m \in \mathbb{Z}$ и типа $d \in \mathbb{Z}_+$, обозначаемое через $\Sigma_X^{m,d}$.

Подставив эти символы в формулу (1.11) и склеивая соответствующие локальные операторы при помощи разбиения единицы, получим операторы Буте де Монвеля на многообразии M

$$\operatorname{Op}(\sigma): \begin{matrix} C^\infty(M) \\ \oplus \\ C^\infty(X) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M) \\ \oplus \\ C^\infty(X) \end{matrix}$$

порядка m и типа d. Линейное пространство этих операторов будем обозначать через $\Psi_{\mathrm{BdM}}^{m,d}(M,X)$. Справедливо следующее утверждение о формуле композиции операторов Буте де Монвеля (см. [13, § 2.3.3.2, Theorem 1]).

Предложение 1.9. *Композиция $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ операторов $\mathcal{D}_1 \in \Psi_{\mathrm{BdM}}^{m_1,d_1}(M,X)$ и $\mathcal{D}_2 \in \Psi_{\mathrm{BdM}}^{m_2,d_2}(M,X)$ лежит в пространстве $\Psi_{\mathrm{BdM}}^{m,d}(M,X)$, где $m = m_1 + m_2$, $d = \max(m_2 + d_1,d_2)$, и справедливы формулы композиции*

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_2) \text{ и } \sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$

1.2 Скрещенные произведения

В данном параграфе дадим определения алгебраического и гладкого скрещенных произведений — основных объектов, используемых при исследовании алгебр, ассоциированных с действием группы (см., напр., [60]).

Алгебраическое скрещенное произведение. Пусть группа Γ действует на алгебре $\mathcal{A}$ автоморфизмами. Напомним определения скрещенных произведений (см., напр., [27]).

Определение 1.10. *Алгебраическим скрещенным произведением* алгебры $\mathcal{A}$ и группы Γ, обозначаемым через $\mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$, называется векторное пространство функций $f : \Gamma \to \mathcal{A}$ с компактным носителем, в котором произведение элементов $\{f_1(\gamma)\} \cdot \{f_2(\gamma)\} \in \mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ определяется формулой

$$\{f_1(\gamma)\} \cdot \{f_2(\gamma)\} = \left\{ \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f_1(\gamma_1)\gamma_1(f_2(\gamma_2)) \right\}. \tag{1.16}$$

Правая часть в формуле (1.16) является элементом в скрещенном произведении $\mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$. Это произведение наделяет пространство $\mathcal{A} \rtimes_{\mathrm{alg}} \Gamma$ структурой ассоциативной алгебры. Сумма в (1.16) является конечной в том смысле, что только конечное число слагаемых отлично от нуля.

Напомним некоторые определения из теории групп (см., напр., [49]). Пусть Γ — дискретная конечнопорожденная группа.

Определение 1.11. Пусть F — порождающее множество группы Γ. *Длиной $|\gamma|$ элемента $\gamma \in \Gamma$ в словесной метрике* называется минимальное количество множителей в представлении элемента γ, выраженном в виде конечного произведения элементов из множества F и обратных к ним.

Определение 1.12. Группа Γ называется *группой степенного роста* в смысле Громова (см. [40]), если существуют такие $m > 0$ и $C > 0$, что

$$\#\{\gamma \in \Gamma : |\gamma| \leqslant n\} \leqslant Cn^m, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так, например, группами степенного роста являются группа целых чисел $\mathbb{Z}$ и группа $\mathbb{Z}^n$. Группой не степенного роста будет свободная группа с более чем двумя образующими.

Гладкое скрещенное произведение.

Определение 1.13. *Алгеброй Фреше $\mathcal{A}$* называется пространство Фреше, наделенное структурой алгебры, в которой операция умножения $(a,b) \longmapsto ab$, $\forall a,b \in \mathcal{A}$, является непрерывной по паре аргументов.

Теперь напомним определение гладкого скрещенного произведения. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Фреше с полунормами $\|\cdot\|_m$, $m \in \mathbb{N}$, а Γ — группа степенного роста, действующая на алгебре $\mathcal{A}$ непрерывными автоморфизмами $a \mapsto \gamma(a)$, где $a \in \mathcal{A}$ и $\gamma \in \Gamma$.

Определение 1.14. *Гладким скрещенным произведением*, обозначаемым через $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$, называется векторное пространство функций $f : \Gamma \to \mathcal{A}$, которые быстро убывают на бесконечности в смысле выполнения следующих оценок:

$$\|f(\boldsymbol{\gamma})\|_m \leqslant C_{m,N}(1 + |\boldsymbol{\gamma}|)^{-N}$$

для любых $N,m \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, где константа $C_{m,N}$ не зависит от элемента $\boldsymbol{\gamma}$.

Рассмотрим следующее свойство действия группы Γ на алгебре $\mathcal{A}$: для $m \in \mathbb{N}$ существует число $k \in \mathbb{N}$ и такой вещественный многочлен $p(z)$, что для любых $a \in \mathcal{A}$ и $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ выполнено неравенство:

$$\|\boldsymbol{\gamma}(a)\|_m \leqslant p(|\boldsymbol{\gamma}|)\|a\|_k. \tag{1.17}$$

Утверждается, что в формуле (1.17) можно взять $p(z) = \mathrm{Const}$, зависящий только от m и можно выбрать $k = m$. Из этой компактности следует равномерная оценка $\|\boldsymbol{\gamma}(a)\|_m \leqslant C\|a\|_m \ \forall \boldsymbol{\gamma} \in \overline{\Gamma}$.

Следующая лемма утверждает, что гладкое скрещенное произведение образует алгебру.

Лемма 1.15. *[56, Corollary 7.16] Пусть Γ — группа степенного роста, для действия которой выполнено неравенство* (1.17)*. Тогда гладкое скрещенное произведение $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$ является алгеброй с умножением, определенным формулой* (1.16).

Глава 2. Формула индекса в случае изометрического действия группы

Настоящая глава посвящена формуле индекса операторов Буте де Монвеля, ассоциированных с изометрическим действием группы. В §2.1 строятся характеристические классы символов операторов Буте де Монвеля, а именно, большая часть параграфа посвящена построению характера Черна. С его помощью дается формула индекса рассматриваемых операторов. Полученная формула, однако, является достаточно громоздкой, поэтому дополнительно рассматривается частный случай, когда эта формула может быть упрощена. А именно, в §2.2 в качестве примера рассматриваются операторы Буте де Монвеля, скрученные проекторами. Формула индекса таких операторов выражается в терминах эквивариантного характера Черна и характера Черна проекторов. Приведено вычисление индекса скрученного оператора Эйлера.

2.1 Формула индекса

В данном разделе рассматриваются операторы Буте де Монвеля, ассоциированные с изометрическим действием группы. Для простоты изложения будем рассматривать операторы нулевого порядка и типа. Случай, когда порядок и тип ненулевые, будет оговорен отдельно. Результаты данного парагарафа опубликованы в статье [33].

2.1.1 Γ-операторы Буте де Монвеля. Теорема о фредгольмовости

Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n с краем X, а Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma : M \to M$, которые сохраняют край $\gamma(X) = X$. Группа Γ является группой степенного роста в смысле определения 1.12. Тогда группа Γ действует автоморфизмами на алгебрах Фреше $C^\infty(S^*M), \Sigma_X$ и $\Psi_B(M)$ и определены следующие гладкие скрещенные произведения: $C^\infty(S^*M) \rtimes \Gamma, \Sigma_X \rtimes \Gamma$ и $\Psi_B(M) \rtimes \Gamma$.

Определение 2.1. Элементы $\{\mathcal{D}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в гладком скрещенном произведении $\Psi_B(M)\rtimes\Gamma$ определяют операторы

$$\mathcal{D}=\sum_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{D}_\gamma T_\gamma : L^2(M)\oplus L^2(X)\to L^2(M)\oplus L^2(X), \tag{2.1}$$

которые называются Γ-*операторами Буте де Монвеля.*

Определение 2.2. *Символом* оператора (2.1) называется пара

$$\sigma(\mathcal{D})=(\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}),\sigma_X(\mathcal{D})),$$

состоящая из внутреннего и граничного символов

$$\begin{gathered}\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})=\{\sigma(A_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}\in C^\infty(S^*M)\rtimes\Gamma,\\ \sigma_X(\mathcal{D})=\{\sigma_X(\mathcal{D}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}\in\Sigma_X\rtimes\Gamma,\end{gathered}\tag{2.2}$$

где A_γ — оператор в левом верхнем углу матричного оператора $\mathcal{D}_\gamma$.

Операторы (2.1) образуют ассоциативную алгебру, а для символов (2.2) аналогично предложению 1.9 справедлива формула композиции:

Предложение 2.3. *Пусть даны операторы* $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2\in\Psi_B(M)\rtimes\Gamma$, *тогда справедливы формулы*

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2)=\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_1)\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_2)\ \text{и}\ \sigma_X(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2)=\sigma_X(\mathcal{D}_1)\sigma_X(\mathcal{D}_2).$$

Операторы, действующие между образами проекторов. Рассмотрим операторы Буте де Монвеля, действующие между образами матричных проекторов (см., напр., [21; 52]).

Определение 2.4. *Матричным* Γ-*оператором Буте де Монвеля* называется такая тройка $(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$, что

- $\mathcal{D}\in\mathrm{Mat}_N(\Psi_B(M)\rtimes\Gamma)$ — матрица с компонентами из скрещенного произведения $\Psi_B(M)\rtimes\Gamma$;
- $\mathcal{P}_j\in\mathrm{Mat}_N((C^\infty(M)\oplus C^\infty(X))\rtimes\Gamma)$, $j=1{,}2$, — матричные проекторы, т.е. выполнено соотношение $(\mathcal{P}_j)^2=\mathcal{P}_j$, $j=1{,}2$;
- выполнено соотношение $\mathcal{P}_2\mathcal{D}\mathcal{P}_1=\mathcal{D}$.

Теперь определим оператор

$$\mathcal{D} : \mathcal{P}_1(L^2(M,\mathbb{C}^N) \oplus L^2(X,\mathbb{C}^N)) \longrightarrow \mathcal{P}_2(L^2(M,\mathbb{C}^N) \oplus L^2(X,\mathbb{C}^N)), \tag{2.3}$$

действующий между образами проекторов в пространствах L^2. Оператор (2.3) будем обозначать через $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$.

Определение 2.5. Оператор $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ называется *эллиптическим*, если существует такой матричный оператор $(\mathcal{R}, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1)$, что выполнены следующие равенства

$$\sigma(\mathcal{D})\sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{P}_2), \qquad \sigma(\mathcal{R})\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{P}_1). \tag{2.4}$$

Напомним следующую теорему

Теорема 2.6 (Никольский, Аткинсон)**.** *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Линейный ограниченный оператор $A : H_1 \to H_2$ фредгольмов тогда и только тогда, когда существует такой линейный ограниченный оператор $R : H_2 \to H_1$, что*

$$RA = 1 + K_1, \qquad AR = 1 + K_2,$$

где K_1, K_2 — компактные операторы.

Теорема 2.7. *Эллиптический оператор* (2.3) *фредгольмов.*

Доказательство. Доказательство является стандартным (см., напр., [27]). □

Г-условие Шапиро–Лопатинского. В теории классических краевых задач эллиптичность описывается условием Шапиро–Лопатинского. В случае краевых задач, ассоциированных с действием группы это условие необходимо модифицировать. Опишем эту модификацию. Для этого рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\begin{cases} Du & = f \quad \text{на } M, \\ \displaystyle\sum_{0\leqslant j<d} B_j \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\Big|_{x_n=0} & = g \quad \text{на } X, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$D = \sum_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma T_\gamma, \quad \operatorname{ord} D = d, B_j = \sum_{\gamma\in\Gamma} B_{j\gamma} T_\gamma, \quad \operatorname{ord} B_j = b - j.$$

Здесь $\{D_\gamma\}$ — дифференциальные операторы на M и $\{B_{j\gamma}\}$ — дифференциальные операторы на X. Функции u,f,g являются элементами пространств

$$u \in P_1 H^s(M,\mathbb{C}^N), \quad f \in P_2 H^{s-d}(M,\mathbb{C}^N), \quad g \in P_3 H^{s-b-1/2}(X,\mathbb{C}^{N_d}),$$

где P_1,P_2 — $N \times N$ матричные проекторы над $C^\infty(M) \rtimes \Gamma$, а P_3 — $N_d \times N_d$ матричный проектор над $C^\infty(X) \rtimes \Gamma$. Реализуем задачу (2.5) в виде следующего оператора (ср. с оператором (2.3)):

$$(D,B) : P_1 H^s(M,\mathbb{C}^N) \to P_2 H^{s-d}(M,\mathbb{C}^N) \oplus P_3 H^{s-b-1/2}(X,\mathbb{C}^{N_d}) \tag{2.6}$$

$$u \longmapsto \left(Du, \sum_{0 \leqslant j < d} B_j \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\bigg|_{x_n=0} \right).$$

Здесь мы полагаем, что $D = P_2 D P_1$ и $P_3 B = B$, где $B = (B_0,\ldots,B_{d-1})$.

Отметим, что в локальном случае, т.е., когда операторы D,B_j,P_j не содержат операторов сдвига T_γ для $\gamma \neq e$, задача (2.6) является классической краевой задачей. Дадим условия эллиптичности задачи (2.6), которые обобщают условие Шапиро–Лопатинского. Для этого запишем задачу (2.5) в окрестности края в виде

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} D_\gamma \left(x_n, -i\frac{\partial}{\partial x_n}, x', -i\frac{\partial}{\partial x'} \right) T_\gamma u & = \; f, \\ \displaystyle\sum_j \sum_{\gamma\in\Gamma} B_{j\gamma} \left(x', -i\frac{\partial}{\partial x'} \right) T_\gamma \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\bigg|_{x_n=0} & = \; g. \end{cases} \tag{2.7}$$

Для того, чтобы сформулировать условие Шапиро–Лопатинского для задачи (2.7), определим аналог расслоения Кальдерона в этой ситуации. Определим для простоты гладкое скрещенное произведение $\mathcal{A} = C^\infty(S^*X) \rtimes \Gamma$ и рассмотрим однородную систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\sigma(D)\left(0, -i\frac{d}{dx_n}, x', \xi'\right) u(x_n) = 0, \tag{2.8}$$

где $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^N)$. Положим, что тройка (D,P_1,P_2) является *внутренне* эллиптической (это значит, что соотношение (2.4) справедливо для внутренних символов этих операторов). Тогда решение $u \in P_1 C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^N)$ системы (2.8) стремится к нулю или при $x_n \to +\infty$ или при $x_n \to -\infty$. Более того, только решение $u(x_n) \equiv 0$ стремится к нулю при $x_n \to \infty$ и $x_n \to -\infty$. Обозначим через $L_{\pm}(D)$ подпространство данных Коши решений системы уравнений (2.8), которые стремятся к нулю при $x_n \to \pm\infty$:

$$L_{\pm}(D) = \left\{ W = (W_0,...W_{d-1}) \in P_1(\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^N) \otimes \mathbb{C}^d \middle| \exists u \in P_1 C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^N), \right.$$

$$\left. \sigma(D)\left(0, -i\frac{d}{dx_n}, x', \xi'\right) u(x_n) = 0, u(x_n) \to 0 \text{ при } x_n \to \pm\infty, W_j = \left.\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right|_{x_n=0} \right\}.$$

Тогда $L_{\pm}(D) \subset \mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^{Nd}$ — правые $\mathcal{A}$-модули. Обозначим через $Q \in \mathrm{Mat}_{Nd}(\mathcal{A})$ проектор, определяющий модуль $L_+(D)$.

Определение 2.8. Задача (2.7) с внутренне эллиптической тройкой (D,P_1,P_2) удовлетворяет *условию Шапиро–Лопатинского*, если тройка $(\sigma(B),Q,P_3)$ эллиптична на S^*M, т.е. существует такая тройка $(\sigma(C),P_3,Q)$, что $\sigma(C)\sigma(B) = \sigma(Q)$, $\sigma(B)\sigma(C) = \sigma(P_3)$ в $\mathrm{Mat}_{N_d}(C^{\infty}(S^*X) \rtimes \Gamma)$.

Теорема 2.9. *Пусть оператор* $D : P_1 H^s(M,\mathbb{C}^N) \to P_2 H^{s-d}(M,\mathbb{C}^N)$ *в задаче* (2.5) *эллиптичен и выполнено условие Шапиро–Лопатинского (в смысле определения 2.8). Тогда оператор* (2.6) *фредгольмов.*

2.1.2 Когомологии де Рама многообразий с расслоенным краем

В данном параграфе вводятся комплексы де Рама многообразий с расслоенным краем и их группы когомологий. Дадим необходимые определения.

Определение 2.10. Пусть M — гладкое многообразие с границей ∂M. Будем считать, что граница является тотальным пространством локально тривиального расслоения $\pi : \partial M \to X$ со слоем F. Тогда пара (M,π) называется *многообразием с расслоенным краем*.

Предположим, что многообразия M и X являются ориентированными, а их ориентации согласованы с ориентацией слоев следующим образом. Обозначим $n = \dim M$ и выберем как положительно ориентированную форму $(-1)^n dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{\nu} \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k \wedge dx_n$, где $t_1,\ldots,t_{\nu}$ — некоторые положительно ориентированные координаты на слое, $y_1,\ldots,y_{n-\nu-1}$ — некоторые положительно ориентированные координаты на крае X, а $x_n \geqslant 0$ — определяющая функция края.

Обозначим через $\Omega^*(M)$ алгебру дифференциальных форм на многообразии M, а через $\Omega^*_c(\partial M)$ алгебру дифференциальных форм на ∂M с компактным носителем. Вложение $i : \partial M \hookrightarrow M$ индуцирует отображение сужения

$$i^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(\partial M)$$

дифференциальных форм на границу. Проекция π определяет индуцированное вложение $\pi^* : \Omega^*(X) \to \Omega^*(\partial M)$ и отображение

$$\pi_* : \Omega^*_c(\partial M) \longrightarrow \Omega^{*-\nu}_c(X), \quad \nu = \dim F, \tag{2.9}$$

интегрирования по слоям дифференциальных форм с компактным носителем над слоем F (см., напр., [32]). Здесь мы полагаем, что слои расслоения π имеют ориентацию, непрерывно зависящую от точки базы. Напомним определение интеграла, используемого в формуле (2.9) (см., напр., [8, §6]).

Для простоты будем полагать, что многообразия X и ∂M ориентированы, а ориентация границы ∂M дается ориентацией слоев и базы.

Определение 2.11. Пусть дана форма $\omega \in \Omega^k_c(\partial M)$. Ее *интеграл по слою* расслоения $\pi : \partial M \to X$ является такой дифференциальной формой $\pi_*\omega \in \Omega^{k-\nu}_c(X)$, что

$$\int\limits_X \Big(\pi_*\omega\Big) \wedge \omega_1 = \int\limits_{\partial M} \omega \wedge \pi^*\omega_1$$

для любых дифференциальных форм ω_1 на X.

Справедливы следующие свойства:

1. $\pi_*(\omega \wedge \pi^*\omega_1) = (\pi_*\omega) \wedge \omega_1$ для любых форм $\omega \in \Omega^k_c(\partial M), \omega_1 \in \Omega^l_c(X)$;
2. $d(\pi_*\omega) = (-1)^\nu \pi_*(d\omega)$ для любых форм $\omega \in \Omega^k_c(\partial M)$, где d — внешний дифференциал на алгебре дифференциальных форм $\Omega^k_c(\partial M)$ с компактным носителем.

Рассмотрим градуированный морфизм

$$(\Omega^*_c(M), d) \xrightarrow{\pi_* i^*} (\Omega^{*-\nu}_c(X), d), \quad d\pi_* i^* = (-1)^\nu \pi_* i^* d \tag{2.10}$$

комплексов де Рама на M и X. Обозначим конус морфизма $\pi_* i^*$ через $(\Omega^*_c(M,\pi), \partial)$, где

$$\Omega^j_c(M,\pi) = \Omega^j_c(M) \oplus \Omega^{j-\nu-1}_c(X), \quad \partial = \begin{pmatrix} d & 0 \\ \pi_* i^* & (-1)^{\nu+1} d \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Матрица ∂ выше в самом деле является дифференциалом, поскольку

$$\partial^2 = \begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ \pi_* i^* d + (-1)^{\nu+1} d(\pi_* i^*) & (-1)^{2\nu+2} d^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi_* i^* d + (-1)^{\nu+1} d\pi_* i^* & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Последнее равенство следует из уравнения (2.10). Группы когомологий комплекса $(\Omega_c^*(M,\pi),\partial)$ будем обозначать через $H_c^*(M,\pi)$.

Также рассмотрим комплекс $(\widetilde{\Omega}^*(M,\pi),\widetilde{\partial})$:

$$\widetilde{\Omega}^j(M,\pi) = \{(\omega,\omega_X) \in \Omega^j(M) \oplus \Omega^j(X) \mid i^*\omega = \pi^*\omega_X\}, \quad \widetilde{\partial} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Отметим, что $di^*\omega = d\pi^*\omega_X$, поскольку $i^*\omega = \pi^*\omega_X$. Следовательно, $i^*d\omega = \pi^*d\omega_X$, поскольку i^* и π^* — индуцированные отображения на дифференциальных формах. Следовательно, дифференциал $\widetilde{\partial}$ корректно определен. Обозначим группы когомологий комплекса $(\widetilde{\Omega}^*(M,\pi),\widetilde{\partial})$ через $\widetilde{H}^*(M,\pi)$.

Покомпонентное внешнее произведение дифференциальных форм дает произведение

$$\wedge : \Omega_c^j(M,\pi) \times \widetilde{\Omega}^k(M,\pi) \longrightarrow \Omega_c^{j+k}(M,\pi). \quad (2.13)$$

Предложение 2.12. *Для произведения* (2.13) *справедливо правило Лейбница*

$$\partial(a \wedge b) = \partial a \wedge b + (-1)^j a \wedge \widetilde{\partial} b, \quad a \in \Omega_c^j(M,\pi), b \in \widetilde{\Omega}^k(M,\pi). \quad (2.14)$$

Доказательство. В самом деле, запишем формы $a \in \Omega_c^j(M,\pi)$ и $b \in \widetilde{\Omega}^k(M,\pi)$ в виде

$$a = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_X \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} \omega' \\ \omega'_X \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\partial(a\wedge b)=\partial\begin{pmatrix}\omega\wedge\omega'\\ \omega_X\wedge\omega'_X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d(\omega\wedge\omega')\\ \pi_*i^*(\omega\wedge\omega')+(-1)^{\nu+1}d(\omega_X\wedge\omega'_X)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}d\omega\wedge\omega'+(-1)^j\omega\wedge d\omega'\\ \pi_*(i^*\omega\wedge i^*\omega')+(-1)^{\nu+1}d\omega_X\wedge\omega'_X+(-1)^{\nu+1}(-1)^{j-\nu-1}\omega_X\wedge d\omega'_X\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}d\omega\wedge\omega'\\ \pi_*i^*(\omega)\wedge\omega'_X+(-1)^{\nu+1}d\omega_X\wedge\omega'_X\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(-1)^j\omega\wedge d\omega'\\ (-1)^j\omega_X\wedge d\omega'_X\end{pmatrix}=$$
$$=\partial\begin{pmatrix}\omega\\ \omega_X\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\omega'\\ \omega'_X\end{pmatrix}+(-1)^j\begin{pmatrix}\omega\\ \omega_X\end{pmatrix}\wedge\widetilde{\partial}\begin{pmatrix}\omega'\\ \omega'_X\end{pmatrix}.$$

□

Из правила Лейбница (2.14) следует, что операция $\wedge$ определяет произведение в когомологиях

$$\wedge: H^j_c(M,\pi)\times\widetilde{H}^k(M,\pi)\longrightarrow H^{j+k}_c(M,\pi). \tag{2.15}$$

Определим линейный функционал (интегрирование по фундаментальному циклу)

$$\begin{array}{rcc}\langle\cdot,[M,\pi]\rangle: H^*_c(M,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ (\omega,\omega_X) & \longmapsto & \displaystyle\int\limits_M\omega-(-1)^n\int\limits_X\omega_X.\end{array} \tag{2.16}$$

Предложение 2.13. *Функционал* (2.16) *корректно определен.*

Доказательство. Для того, чтобы показать, что этот функционал корректно определен, достаточно показать, что он обращается в нуль на точных формах. Выберем дифференциальные формы с компактным носителем

$$\omega=f(t,y,x_n)dt_1\wedge\ldots\wedge dy_{n-\nu-1},\qquad \omega_X=g(y)dy_1\wedge\ldots\wedge dy_{n-\nu-1}$$

и вычислим значение функционала (2.16) от дифференциала ∂ пары этих форм

$$\langle \partial(\omega,\omega_X),[M,\pi]\rangle = \int\limits_M d\omega - (-1)^n \int\limits_X \left(\pi_* i^*\omega + (-1)^{\nu+1} d\omega_X\right) =$$

$$= \int\limits_{\partial M} i^*\omega - (-1)^n \int\limits_X (\pi_* i^*\omega) = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^{n-\nu-1}} f(t,y,0)dt_1...dy_{n-\nu-1} -$$

$$- (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-\nu-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^\nu} f(t,y,0)dt_1...dt_\nu \right) dy_1...dy_{n-\nu-1} = 0.$$

□

Изоморфизм Тома. Граница $\partial(T^*M) \simeq T^*X \times \mathbb{R}$ кокасательного расслоения T^*M расслоена над T^*X со слоем $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующую проекцию через $\pi : \partial(T^*M) \to T^*X$, а вложение $\partial(T^*M) \subset T^*M$ через i. Проекция π определяет отображение

$$\pi_* : \Omega^*_c(\partial(T^*M)) \longrightarrow \Omega^{*-1}_c(T^*X) \tag{2.17}$$

интегрирования дифференциальных форм с компактным носителем вдоль слоев проекции π.

Рассмотрим комплекс $(\Omega^*_c(T^*M,\pi),\partial)$:

$$\Omega^k_c(T^*M,\pi) = \{(\omega,\omega_X) \in \Omega^k_c(T^*M) \oplus \Omega^{k-2}_c(T^*X)\}, \quad \partial = \begin{pmatrix} d & 0 \\ \pi_* i^* & d \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Когомологии этого комплекса обозначим через $H^*(T^*M,\pi)$.

Также рассмотрим комплекс

$$\Omega^k(M,\mathrm{id}) = \{(\omega,\omega_X) \in \Omega^k(M) \oplus \Omega^{k-1}(X)\}, \quad \partial' = \begin{pmatrix} d & 0 \\ j^* & -d \end{pmatrix},$$

где отображение $j : X \hookrightarrow M$ означает естественное вложение края. Его когомологии совпадают с относительными когомологиями $H^*(M,X)$ пары (M,X).

Предположим, что многообразие M ориентировано, а край X наделен индуцированной ориентацией как граница M. Определим отображение

$$\begin{array}{rcl} \Omega^*(T^*M,\pi) & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^{*-n}(M,\mathrm{id}), \\ \alpha(\omega,\omega_X) & = & \left(\pi^M_*\omega, -\pi^X_*\omega_X\right), \end{array} \qquad n = \dim M, \tag{2.19}$$

где интегрирование производится вдоль слоев проекций

$$\pi^M : T^*M \longrightarrow M, \qquad \pi^X : T^*X \longrightarrow X.$$

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между двумя указанными выше комплексами.

Лемма 2.14. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \longrightarrow & \Omega^k(T^*M,\pi) & \stackrel{\partial}{\longrightarrow} & \Omega^{k+1}(T^*M,\pi) & \longrightarrow & \ldots \\ & & {}^{\alpha}\downarrow & & \downarrow^{\alpha} & & \\ \ldots & \longrightarrow & \Omega^{k-n}(M,\mathrm{id}) & \stackrel{\partial'}{\longrightarrow} & \Omega^{k+1-n}(M,\mathrm{id}) & \longrightarrow & \ldots \end{array} \tag{2.20}$$

коммутативна с точностью до знака.

Доказательство. Нам нужно доказать, что

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ j^* & -d \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_X \end{pmatrix} = \pm\alpha \begin{pmatrix} d & 0 \\ \pi_* i^* & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_X \end{pmatrix}, \qquad \forall(\omega,\omega_X) \in \Omega^k(T^*M,\pi).$$

Это следует из трех равенств

$$\begin{aligned} d\pi_*^M\omega &= (-1)^n\pi_*^M d\omega, \\ d\pi_*^X\omega_X &= (-1)^{n-1}\pi_*^X d\omega_X = -(-1)^n\pi_*^X d\omega_X, \\ j^*\pi_*^M\omega &= (-1)^{n-1}\pi_*^X\pi_* i^*\omega = -(-1)^n\pi_*^X\pi_* i^*\omega. \end{aligned}$$

□

Из леммы 2.14 следует, что отображение α индуцирует гомоморфизм в когомологиях.

Определение 2.15. Отображение

$$\alpha : H^*(T^*M,\pi) \longrightarrow H^{*-n}(M,X). \tag{2.21}$$

называется *изоморфизмом Тома*.

Докажем, что оно в самом деле является изоморфизмом.

Предложение 2.16. *Отображение* (2.21) *является изоморфизмом.*

Доказательство. Короткая точная последовательность комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{*-1}(X) & \longrightarrow & \Omega^*(M,X) & \longrightarrow & \Omega^*(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \omega_X & \longmapsto & (0,\omega_X) & & & & \\ & & & & (\omega,\omega_X) & \longmapsto & \omega & & \end{array}$$

дает длинную точную последовательность в когомологиях

$$\cdots \longrightarrow H^{*-1}(M) \xrightarrow{j^*} H^{*-1}(X) \longrightarrow H^*(M,X) \longrightarrow H^*(M) \xrightarrow{j^*} H^*(X) \longrightarrow \ldots$$

Короткая точная последовательность комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_c^{*-2}(T^*X) & \longrightarrow & \Omega^*(T^*M,\pi) & \longrightarrow & \Omega_c^*(T^*M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \omega_X & \longmapsto & (0,\omega_X) & & & & \\ & & & & (\omega,\omega_X) & \longmapsto & \omega & & \end{array}$$

дает длинную точную последовательность в когомологиях

$$\cdots \longrightarrow H_c^{*-1}(T^*M) \xrightarrow{\pi_* i^*} H_c^{*-2}(T^*X) \longrightarrow H^*(T^*M,\pi)$$
$$\longrightarrow H_c^*(T^*M) \xrightarrow{\pi_* i^*} H_c^{*-1}(T^*X) \longrightarrow \ldots.$$

Рассмотрим эти длинные точные последовательности как строки в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} H_c^{*-1}(T^*M) & \longrightarrow & H_c^{*-2}(T^*X) & \longrightarrow & H^*(T^*M,\pi) & \longrightarrow & H_c^*(T^*M) & \longrightarrow & H_c^{*-1}(T^*X) \\ \downarrow \pi_*^M & & \downarrow \pi_*^X & & \downarrow \alpha & & \downarrow \pi_*^M & & \downarrow \pi_*^X \\ H^{*-n-1}(M) & \longrightarrow & H^{*-n-1}(X) & \longrightarrow & H^{*-n}(M,X) & \longrightarrow & H^{*-n}(M) & \longrightarrow & H^{*-n}(X). \end{array} \tag{2.22}$$

Прямое вычисление показывает, что эта диаграмма коммутативна с точностью до знака. Здесь все вертикальные отображения кроме α являются изоморфизмами (обратными к изоморфизму Тома) на M и на X. По лемме о пяти гомоморфизмах отображение α является изоморфизмом.

Предложение 2.16 доказано. □

2.1.3 Характер Черна эллиптических символов

В этом разделе определим характер Черна символов эллиптических операторов (2.3). Это определение использует некоммутативные дифференциальные формы на кокасательных расслоениях T^*M и T^*X, которые будут определены ниже.

Некоммутативные дифференциальные формы. Пусть $C^\infty_{tr}(T^*M) \subset C^\infty(T^*M)$ — подалгебра классических символов порядка $\leqslant 0$, которые удовлетворяют свойству трансмиссии (см. (1.5)). Пусть $\Omega_{T^*M} \subset \Omega(T^*M)$ — подалгебра дифференциальных форм на T^*M с коэффициентами из $C^\infty_{tr}(T^*M)$.

Обозначим через $\widetilde{\Sigma}_X \subset C^\infty(T^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C}))$ подалгебру таких семейств операторов $a_X(x',\xi')$, $(x',\xi') \in T^*X$, что семейство $a_X(x',\xi')$ определяется как в формуле (1.6), где

- $b \in C^\infty(T^*X,H_-)$,
- $c \in C^\infty(T^*X,H_+)$,
- $g \in C^\infty(T^*X,H_+ \otimes H_-)$,
- $q(x',\xi') \in C^\infty(T^*X)$,

а функция $a(x',0,\xi',\xi_n)$ является сужением на границу $\partial(T^*M) \simeq T^*X \times \mathbb{R}$ символа $a(x',x_n,\xi',\xi_n) \in C^\infty_{tr}(T^*M)$.

Обозначим через $\Omega_{T^*X} \subset \Omega(T^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+ \oplus \mathbb{C}))$ подалгебру дифференциальных форм на T^*X с коэффициентами в $\widetilde{\Sigma}_X$. Рассмотрим действие группы Γ на алгебрах Фреше Ω_{T^*M} и Ω_{T^*X} дифференциальных форм и соответствующие гладкие скрещенные произведения

$$\Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma \text{ и } \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma.$$

Эти скрещенные произведения являются дифференциальными градуированными алгебрами относительно градуировок, определенных градуировками дифференциальных форм и дифференциалов, определенных внешними дифференциалами дифференциальных форм

$$d : \Omega^*(T^*M) \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega^{*+1}(T^*M) \rtimes \Gamma$$

$$d' : \Omega^*(T^*X) \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega^{*+1}(T^*X) \rtimes \Gamma.$$

Напомним некоторые определения, необходимые для введения характера Черна. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Подмногообразие $M^\gamma \subset M$, определяемое формулой

$$M^\gamma = \{x \in M \,|\, \gamma(x) = x, \quad \gamma \in \Gamma\}$$

называется *подмногообразием неподвижных точек* (подробнее см., [47, §1.2]).

Аналогичное обозначение будем использовать для подмногообразия неподвижных точек $X^\gamma \subset X$.

Предположим, что задана компактная группа Ли $\overline{\Gamma}$ изометрий, действующая на многообразии M, и вложение $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$, причем сужение действия группы

$\overline{\Gamma}$ на подгруппу Γ совпадает с исходным действием группы Γ. Напомним, что *централизатором* $C^\gamma \subset \overline{\Gamma}$ элемента $\gamma \in \Gamma$ называется подгруппа элементов, коммутирующих с γ. Централизатор является замкнутой подгруппой Ли в $\overline{\Gamma}$. Обозначим элементы централизатора через h, а индуцированную меру Хаара на нем через dh. Под *мерой Хаара* будем понимать форму объема на группе, инвариантную относительно действия группы, т.е. $\gamma^*(dh) = dh$, $\forall \gamma \in \overline{\Gamma}$. Предполагаем, что эта мера нормирована:

$$\int\limits_{C^\gamma} dh = 1.$$

Классом сопряженности $\langle\gamma\rangle$ элемента $\gamma \in \Gamma$ называется множество

$$\langle\gamma\rangle = \{\gamma' \in \Gamma \mid \exists z \in \Gamma \text{ такой, что } \gamma' = z\gamma z^{-1}\}.$$

Теперь для элемента $\gamma' \in \langle\gamma\rangle$ из класса сопряженности элемента γ зафиксируем произвольный элемент $z = z(\gamma,\gamma')$, сопрягающий элементы γ и $\gamma' = z\gamma z^{-1}$. Любой такой элемент определяет диффеоморфизм $\partial z : T^*M^\gamma \to T^*M^{\gamma'}$ соответствующих подмногообразий неподвижных точек.

Градуированный след на алгебре некоммутативных форм. Определим отображения (ср. с [15; 47])

$$\tau^\gamma : \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega_{T^*M^\gamma}, \qquad \tau^\gamma_X : \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega_{T^*X^\gamma}. \tag{2.23}$$

Первое отображение в (2.23) определяется формулой

$$\tau^\gamma(\omega) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} h^*\big(z^*\omega(\gamma')\big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh, \quad \text{где } \omega \in \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma, \tag{2.24}$$

а второе — формулой

$$\tau^\gamma_X(\omega_X) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X \left(h^*\big(z^*\omega_X(\gamma')\big)\big|_{T^*X^\gamma} \right) dh, \quad \text{где } \omega_X \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma. \tag{2.25}$$

Здесь

$$\operatorname{tr}_X \left(\sum_I \omega_I(t) dt^I \right) = \sum_I \operatorname{tr}'(\omega_I(t)) dt^I,$$

где $\operatorname{tr}' \colon \widetilde{\Sigma}_X \to C^\infty(T^*X)$ — регуляризованный след, определенный ранее в формуле (1.13), а через I обозначен набор индексов.

Опишем необходимые нам свойства функционалов (2.23).

Предложение 2.17. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Слагаемые в формулах* (2.24) *и* (2.25) *не зависят от выбора элементов* z.
2. *Функционалы* (2.24) *и* (2.25) *обладают следующими свойствами:*

$$\tau^\gamma(\omega_1 \wedge \omega_2) = (-1)^{\deg\omega_1 \deg\omega_2}\tau^\gamma(\omega_2 \wedge \omega_1), \tag{2.26}$$

для любых $\omega_1,\omega_2 \in \Omega_{T^*M} \rtimes \Gamma$ *и*

$$d\tau^\gamma_X(\omega) = \tau^\gamma_X(d\omega) \quad \textit{для любых } \omega \in \Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma. \tag{2.27}$$

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. В самом деле, пусть $z_1 \in \Gamma$ — другой элемент, такой что $\gamma' = z_1\gamma z_1^{-1}$. Тогда для слагаемых в формуле (2.24) имеем:

$$\int\limits_{C^\gamma} h^*\big(z_1^*\omega(\gamma')\big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh = \int\limits_{C^\gamma} (z_1h)^*\big(\omega(\gamma')\big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh = \int\limits_{C^\gamma} h^*\big(z^*\omega(\gamma')\big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh.$$

Здесь в последнем равенстве выполнена замена переменных $z_1h = zh'$ в интеграле, а также была использована инвариантность меры Хаара. Равенство (2.25) доказывается аналогично.

Теперь перейдем к доказательству второго утверждения. Покажем, что τ^γ — градуированный след, т.е. справедливо равенство (2.26). Достаточно доказать это свойство для форм ω_1, ω_2 следующего вида:

$$\omega_1(\gamma) = \begin{cases} a, & \gamma = \gamma_1, \\ 0, & \gamma \neq \gamma_1, \end{cases} \qquad \omega_2(\gamma) = \begin{cases} b, & \gamma = \gamma_2, \\ 0, & \gamma \neq \gamma_2. \end{cases}$$

Тогда

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{при } \gamma \neq \gamma_1\gamma_2, \\ a \wedge \gamma_1^{*-1}b, & \text{при } \gamma = \gamma_1\gamma_2. \end{cases}$$

Поскольку выражения в (2.24) не зависят от выбора элемента z, для простоты будем полагать $z = e \in \Gamma$.

С одной стороны, для $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ имеем

$$\tau^\gamma(\omega_1 \wedge \omega_2) = \int\limits_{C^\gamma} h^*\Big(a \wedge \gamma_1^{*-1}b\Big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh = \int\limits_{C^\gamma} (h^*a \wedge h^*\gamma_1^{*-1}b)\Big|_{T^*M^\gamma} dh =$$

$$= \int\limits_{C^\gamma} (h^*a \wedge \gamma^*h^*\gamma_1^{*-1}b)\Big|_{T^*M^\gamma} dh, \tag{2.28}$$

поскольку форма рассматривается над T^*M^γ и над этим многообразием $\gamma^* = \mathrm{Id}$. Так как $h \in C^\gamma$ в (2.28), то имеем $h^*\gamma^* = \gamma^* h^*$. Следовательно, из выражения (2.28) получаем

$$\tau^\gamma(\omega_1 \wedge \omega_2) = \int\limits_{C^\gamma} h^* a \wedge h^*\gamma^*\gamma_1^{*-1} b\Big|_{T^*M^\gamma} dh = \int\limits_{C^\gamma} h^*\Big(a \wedge \gamma_2^* b\Big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh, \qquad (2.29)$$

так как $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ и $\gamma^*\gamma_1^{*-1} = \gamma_2^*$.

С другой стороны, для $z = \gamma_2$ имеем

$$\tau^\gamma(\omega_2 \wedge \omega_1) = \int\limits_{C^\gamma} h^*\Big(z^*\Big(b \wedge \gamma_2^{*-1} a\Big)\Big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh =$$
$$= (-1)^{\deg\omega_1 \deg\omega_2} \int\limits_{C^\gamma} h^*\Big(z^*\Big(\gamma_2^{*-1} a \wedge b\Big)\Big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh =$$
$$= (-1)^{\deg\omega_1 \deg\omega_2} \int\limits_{C^\gamma} h^*\Big(a \wedge \gamma_2^* b\Big)\Big|_{T^*M^\gamma} dh = (-1)^{\deg\omega_1 \deg\omega_2} \tau^\gamma(\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Здесь в последнем равенстве мы воспользовались формулой (2.29).

Теперь докажем равенство (2.27):

$$\tau_X^\gamma(d\omega_X) = \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(h^*\big(z^*(d\omega_X(\gamma'))\big)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh =$$
$$= \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(d\big(h^*\big(z^*(\omega_X(\gamma'))\big)\big)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh =$$
$$= d \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(h^*\big(z^*(\omega_X(\gamma'))\big)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh = d\tau_X^\gamma(\omega_X).$$

Таким образом, доказан пункт 2 предложения 2.17, а вместе с ним и само предложение. $\square$

Определение характера Черна. Рассмотрим эллиптический оператор $(\mathcal{D}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. Для краткости мы часто будем обозначать его через $\mathcal{D}$. Продолжим внутренние символы $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}), \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{R})$ исходного оператора и его почти обратного на T^*M гладкими символами, которые обладают свойством трансмиссии. Продолжим также и граничные символы $\sigma_X(\mathcal{D})$ и $\sigma_X(\mathcal{R})$ на T^*X гладкими символами. Обозначим эти продолжения через

$$a, r \in C^\infty_{tr}(T^*M) \rtimes \Gamma, \qquad a_X, r_X \in \widetilde{\Sigma}_X \rtimes \Gamma,$$

где $C^\infty_{tr}(T^*M)\subset C^\infty(T^*M)$ — подалгебра классических символов порядка $\leqslant 0$, которые удовлетворяют свойству трансмиссии, а $\widetilde{\Sigma}_X\subset C^\infty(T^*X,\mathcal{B}(\overline{H}_+\oplus\mathbb{C}))$ — подалгебра таких семейств операторов $a_X(x',\xi')$, $(x',\xi')\in T^*X$, что семейство $a_X(x',\xi')$ определяется как в формуле (3). Будем полагать, что эти продолжения являются согласованными, т.е. главный символ граничного символа равен сужению внутреннего символа на границу и выполнены следующие равенства:

$$a=P_2aP_1,\quad r=P_1rP_2,\quad a_X=P_2'a_XP_1',\quad r_X=P_1'r_XP_2', \tag{2.30}$$

где

$$P_j=\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{P}_j),\qquad P_j'=\sigma_X(\mathcal{P}_j).$$

Искомые продолжения могут быть определены следующим образом. Внутренние символы $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}),\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{R})$ продолжаются на T^*_0M по однородности нулевой степени и далее умножаются на гладкую срезающую функцию $\chi(|\xi|)$, равную 0 при малых $|\xi|$ и равную 1 при $|\xi|\geqslant 1$.

Схожим образом продолжаются граничные символы $\sigma_X(\mathcal{D}),\sigma_X(\mathcal{R})$ из S^*X на область $|\xi'|\geqslant 1$ как скрученно однородные функции степени нуль.

Теперь выберем произвольные продолжения граничной, кограничной и компоненты Грина (b,c,g,q) в формуле (1.7) на область $|\xi'|\leqslant 1$ такие, что справедливы равенства (2.30).

Определим некоммутативные связности (ср. [8])

$$\nabla_{P_j}=P_j\cdot d\cdot P_j\quad\text{на}\quad T^*M\quad\text{и}\quad\nabla_{P_j'}=P_j'\cdot d'\cdot P_j'\quad\text{на}\quad T^*X,\ \text{где } j=1,2,$$

где d' обозначает внешний дифференциал на T^*X. Также определим связность на T^*M

$$\widetilde{\nabla}_{P_1}=\nabla_{P_1}+r(\nabla a),\ \text{где } \nabla a\equiv\nabla_{P_2}a-a\nabla_{P_1}, \tag{2.31}$$

и связность на T^*X

$$\widetilde{\nabla}_{P_1'}=\nabla_{P_1'}+r_X(\nabla' a_X),\ \text{где } \nabla' a_X=\nabla_{P_2'}a_X-a_X\nabla_{P_1'}.$$

Лемма 2.18. *Формы кривизны связностей $\widetilde{\nabla}_{P_1}$ и $\widetilde{\nabla}_{P_1'}$ равны выражениям*

$$\widetilde{\Omega}_{P_1}\overset{\mathrm{def}}{=}(\widetilde{\nabla}_{P_1})^2=\nabla^2_{P_1}+\nabla_{P_1}(r\nabla a)+(r\nabla a)^2,$$

$$\widetilde{\Omega}_{P_1'}\overset{\mathrm{def}}{=}(\widetilde{\nabla}_{P_1'})^2=\nabla^2_{P_1'}+\nabla_{P_1'}(r_X\nabla' a_X)+(r_X\nabla' a_X)^2.$$

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\widetilde{\Omega}_{P_1}u = (\widetilde{\nabla}_{P_1})^2 u = (\nabla_{P_1} + r\nabla a)^2 u = (\nabla_{P_1}^2 + \nabla_{P_1} r\nabla a + r(\nabla a)\nabla_{P_1} + (r\nabla a)^2)u = \\ = (\nabla_{P_1}^2 + \nabla_{P_1}(r\nabla a) + (r\nabla a)^2)u,$$

$$\widetilde{\Omega}_{P_1'}v = (\widetilde{\nabla}_{P_1'})^2 v = (\nabla_{P_1'} + r_X\nabla' a_X)^2 v = \\ = (\nabla_{P_1'}^2 + \nabla_{P_1'} r_X\nabla' a_X + r_X(\nabla' a_X)\nabla_{P_1'} + (r_X\nabla' a_X)^2)v = \\ = (\nabla_{P_1'}^2 + \nabla_{P_1'}(r_X\nabla' a_X) + (r_X\nabla' a_X)^2)v.$$

□

Ниже обозначим продолжения отображений (2.23) на матричные алгебры над соответствующими скрещенными произведениями через $\tau^\gamma, \tau^\gamma_X$. Эти продолжения получены как композиции матричного следа и отображений (2.23).

Определение 2.19. Дифференциальные формы с компактными носителями

$$\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}) \in \Omega^{ev}_c(T^*M^\gamma), \quad \mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D}) \in \Omega^{ev}_c(T^*X^\gamma) \tag{2.32}$$

на кокасательных расслоениях подмногообразий неподвижных точек называются *характерами Черна* и определяются формулами

$$\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}) = \tau^\gamma\left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i}(P_1 - ra)\right) - \tau^\gamma\left(P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i} - a e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i} r\right), \tag{2.33}$$

$$\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D}) = \\ = \tau^\gamma_X\left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1'}/2\pi i}(P_1' - r_X a_X)\right) - \tau^\gamma_X\left(P_2' e^{-\nabla^2_{P_2'}/2\pi i} - a_X e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1'}/2\pi i} r_X\right). \tag{2.34}$$

Используя тот факт, что

$$ar = P_2, ra = P_1, a_X r_X = P_2', r_X a_X = P_1'$$

на бесконечности на кокасательных расслоениях, можно показать, что некоммутативные дифференциальные формы в формулах (2.33) и (2.34) имеют компактные носители на T^*M и T^*X. Следовательно, формы Черна (2.33) и (2.34) имеют компактные носители на T^*M^γ и T^*X^γ соответственно.

Замечание 2.20. Так как τ^γ — градуированный след, формула (2.33) может быть переписана в виде

$$\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}) = \tau^\gamma\left(e^{-\widetilde{\Omega}_{P_1}/2\pi i} P_1 - P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i}\right).$$

Свойства характера Черна. Отметим, что граница $\partial(T^*M^\gamma) \simeq T^*X^\gamma \times \mathbb{R}$ расслоена над T^*X^γ со слоем $\mathbb{R}$. Обозначим соответствующую проекцию через

$$\pi^\gamma : \partial(T^*M^\gamma) \to T^*X^\gamma,$$

а вложение $\partial(T^*M^\gamma) \subset T^*M^\gamma$ — через i_γ. Следовательно, пара (T^*M^γ,π^γ) является многообразием с расслоенным краем в смысле определения 2.10. Аналогично (2.11) рассмотрим комплекс $(\Omega^*_c(T^*M^\gamma,\pi^\gamma),\partial)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 2.21.

1. Для любого элемента $\gamma \in \Gamma$ пара $(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}), -\,\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D}))$ является замкнутой в комплексе $(\Omega^*_c(T^*M^\gamma,\pi^\gamma),\partial)$ (см. (2.11)), а именно, выполнены равенства
$$d\left(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D})\right) = 0, \tag{2.35}$$
$$d'\left(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D})\right) = \pi^\gamma_* i^*_\gamma\left(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D})\right). \tag{2.36}$$

2. Класс когомологий пары $(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D}), -\,\mathrm{ch}^\gamma_{T^*X}\,\sigma(\mathcal{D}))$, обозначаемый через
$$\mathrm{ch}^\gamma\,\sigma(\mathcal{D}) \in H^{ev}(T^*M^\gamma,\pi^\gamma),$$
не зависит от выбора элементов a,r,a_X,r_X и не изменяется при гомотопиях эллиптических символов.

Доказательство. 1. Равенство (2.35) может быть доказано стандартным образом (см., напр., [61, §1.4]):

$$\begin{aligned}
d\left(\mathrm{ch}^\gamma_{T^*M}\,\sigma(\mathcal{D})\right) &= d\tau^\gamma\left(e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1}/2\pi i}P_1\right) - d\tau^\gamma\left(P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i}\right) = \\
&= \tau^\gamma\left(\widetilde{\nabla}_{P_1}\left(e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1}/2\pi i}P_1\right)\right) - \tau^\gamma\left(\nabla_{P_2}\left(P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i}\right)\right) = \\
&= \tau^\gamma\left[\widetilde{\nabla}_{P_1}, e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1}/2\pi i}P_1\right] - \tau^\gamma\left[\nabla_{P_2}, P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку коммутаторы в нем равны нулю.

2. Далее докажем равенство (2.36). Вычислим правую часть в равенстве (2.36). Обозначим сужение формы кривизны $\widetilde{\Omega}_{P_1}$ на ∂T^*M через $\Omega_1 = \widetilde{\Omega}_{P_1}|_{\partial T^*M}$. Ясно, что форма кривизны Ω_1 равна форме кривизны пары сужений $(a|_{\partial T^*M}, r|_{\partial T^*M})$. Также обозначим через $\Omega_2 = \Omega_2(\xi_n) = \widetilde{\Omega}_{P_1}|_{\partial T^*X \cap \{\xi_n = \mathrm{Const}\}}$ семейство форм кривизны для сужений $(a|_{\partial T^*M\cap\{\xi_n=\mathrm{Const}\}}, r|_{\partial T^*M\cap\{\xi_n=\mathrm{Const}\}})$, где

ξ_n рассматривается как параметр. Имеем

$$i^*_\gamma \operatorname{ch}^\gamma_{T^*M} \sigma(\mathcal{D}) = \tau^\gamma_0 \left(e^{-\Omega_1/2\pi i} P_1 - P_2 e^{-\nabla^2_{P_2}/2\pi i} \right),$$

$$\pi^\gamma_* i^*_\gamma \operatorname{ch}^\gamma_{T^*M} \sigma(\mathcal{D}) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \tau^\gamma \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} \lrcorner \Omega_1 \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} \right) d\xi_n. \tag{2.37}$$

Здесь τ^γ_0 означает след, определенный по формуле (2.24), но для многообразия $\partial T^*M = T^*X \times \mathbb{R}$, причем через $\frac{\partial}{\partial \xi_n} \lrcorner$ обозначена подстановка выражения $\partial/\partial\xi_n$ в дифференциальную форму. Отметим, что подынтегральное выражение в формуле (2.37) имеет компактный носитель. Следовательно, его интеграл корректно определен. Согласно лемме 2.18, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \lrcorner \Omega_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_n} \lrcorner \left(\nabla^2_{P_1} + \nabla_{P_1}(r\nabla a) + (r\nabla a)^2 \right). \tag{2.38}$$

Теперь подставим выражение $\partial/\partial\xi_n$ в каждое слагаемое формулы (2.38). Для этого представим связности в следующем виде:

$$d = d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} + d', \quad \nabla = \nabla' + d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n},$$

$$\nabla_{P_j} = P_j d' P_j + P_j d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \equiv \nabla'_{P_j} + P_j d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}.$$

Для первого слагаемого в правой части равенства (2.38) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \lrcorner \nabla^2_{P_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_n} \lrcorner (P_1 d P_1)^2 = 0, \tag{2.39}$$

поскольку проектор P_1 не зависит от переменной ξ_n. Для второго слагаемого в формуле (2.38) имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{P_1}(r\nabla a) &= \left(\nabla'_{P_1} + P_1 d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right) \left(r\nabla' a + r \frac{\partial a}{\partial \xi_n} d\xi_n \right) = \\ &= \nabla'_{P_1}(r\nabla' a) + \nabla'_{P_1} \left(r \frac{\partial a}{\partial \xi_n} d\xi_n \right) + \left(P_1 d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right) (r\nabla' a) + \\ &\quad + \left(P_1 d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right) \left(r \frac{\partial a}{\partial \xi_n} d\xi_n \right) = \\ &= \nabla'_{P_1}(r\nabla' a) + \nabla'_{P_1} \left(r \frac{\partial a}{\partial \xi_n} \right) d\xi_n + d\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}(r\nabla' a). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Теперь подставим выражение $\partial/\partial\xi_n$ в равенство (2.40):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi_n}\lrcorner\nabla_{P_1}(r\nabla a) = -\nabla'_{P_1}\left(r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_n}(r\nabla' a) = \\
&= -\left(\nabla' r\right)\frac{\partial a}{\partial\xi_n} - r\nabla'\frac{\partial a}{\partial\xi_n} + \frac{\partial r}{\partial\xi_n}\nabla' a + r\nabla'\frac{\partial a}{\partial\xi_n} = -\left(\nabla' r\right)\frac{\partial a}{\partial\xi_n} + \frac{\partial r}{\partial\xi_n}\nabla' a. \quad (2.41)
\end{aligned}
$$

Для третьего слагаемого в формуле (2.38) получаем

$$
\frac{\partial}{\partial\xi_n}\lrcorner\left(\left(r\nabla' a + r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}d\xi_n\right)\left(r\nabla' a + r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}d\xi_n\right)\right) = r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}r\nabla' a - (r\nabla' a)r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}. \tag{2.42}
$$

Подставляя вычисленные выражения (2.39), (2.41) и (2.42) в формулу (2.37), получаем

$$
\begin{aligned}
&\pi^\gamma_* i^*_\gamma \operatorname{ch}^\gamma_{T^*M}\sigma(\mathcal{D}) = \\
&\quad = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\tau^\gamma_0\left(\left(\frac{\partial r}{\partial\xi_n}\nabla' a - \left(\nabla' r\right)\frac{\partial a}{\partial\xi_n} + \left[r\frac{\partial a}{\partial\xi_n}, r\nabla' a\right]\right)e^{-\Omega_2/2\pi i}\right)d\xi_n. \quad (2.43)
\end{aligned}
$$

Как и в формуле (2.37), аргумент отображения τ^γ_0 в формуле (2.43) имеет компактный носитель.

3. Для вычисления левой части в формуле (2.36) сначала докажем две леммы.

Лемма 2.22. *Для любой такой формы* $\omega' \in \operatorname{Mat}_N(\Omega_{T^*X} \rtimes \Gamma)$, *что* $\omega' = P'_1\omega' P'_1$, *имеем*

$$
d'\tau^\gamma_X(\omega') = \tau^\gamma_X(\nabla_{P'_1}\omega'). \tag{2.44}
$$

Доказательство. Разность между левой и правой частями в равенстве (2.44) равна

$$
\begin{aligned}
d'\tau^\gamma_X(\omega') - \tau^\gamma_X(\nabla_{P'_1}\omega') &= \tau^\gamma_X(d'(P'_1\omega') - P'_1 d'\omega') = \tau^\gamma_X((d'P'_1)\omega') = \\
&= \tau^\gamma_X((d'P'_1)P'_1\omega' P'_1) = \tau^\gamma_X(P'_1 d'P'_1 P'_1\omega') = 0, \quad (2.45)
\end{aligned}
$$

где в последней строке было использовано следовое свойство: $\tau^\gamma_X(\omega' P'_1) = \tau^\gamma_X(P'_1\omega')$. Последнее равенство справедливо в силу того, что проектор P'_1 действует как скалярный оператор по переменной ξ_n. В последнем равенстве в (2.45) мы воспользовались тождеством $P'_1(d'P'_1)P'_1 = 0$ для проектора P'_1.

Лемма 2.22 доказана. □

Используя лемму 2.22, получим следующее выражение для левой части в равенстве (2.36)

$$d'\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X}\sigma(\mathcal{D})=\tau^{\gamma}_X\left(\nabla_{P_1'}\big(e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\big)\right)-\tau^{\gamma}_X\left(\nabla_{P_2'}\big(P_2'e^{-\nabla^2_{P_2'}/2\pi i}\big)\right)+$$
$$+\,d'\tau^{\gamma}_X\left[a_X,e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}r_X\right]. \quad (2.46)$$

Для первого слагаемого в равенстве (2.46) имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{P_1'}&\left(e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\right)=\\&=\big[\nabla_{P_1'},e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\big]=\big[(\nabla_{P_1'}+r_X\nabla'a_X)-r_X\nabla'a_X,e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\big]=\\&=\big[\widetilde{\nabla}_{P_1'},e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\big]-\big[r_X\nabla'a_X,e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\big]=-\big[r_X\nabla'a_X,e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\big].\end{aligned}$$

Для второго слагаемого в (2.46) имеем

$$\nabla_{P_2'}\left(P_2'e^{-\nabla^2_{P_2'}/2\pi i}\right)=\big[\nabla_{P_2'},P_2'e^{-\nabla^2_{P_2'}/2\pi i}\big]=0.$$

Подставляя последние две формулы в равенство (2.46), получим

$$d'\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X}\sigma(\mathcal{D})=-\tau^{\gamma}_X\left[r_X\nabla'a_X,e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}P_1'\right]+d'\tau^{\gamma}_X\left[a_X,e^{-\widetilde{\nabla}^2_{P_1'}/2\pi i}r_X\right]. \quad (2.47)$$

Следующая лемма является обобщением формулы (1.14).

Лемма 2.23. *Для форм $\omega_{X,1},\omega_{X,2}\in\Omega_{T^*X}\rtimes\Gamma$ справедлива формула*

$$\tau^{\gamma}_X[\omega_{X,1},\omega_{X,2}]=-i\Pi'\left(\tau^{\gamma}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_n}\omega_2\right)\right)=i\Pi'\left(\tau^{\gamma}\left(\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi_n}\right)\right), \quad (2.48)$$

где ω_1,ω_2 — главные символы форм $\omega_{X,1}$ и $\omega_{X,2}$ причем

$$[a,b]=ab-(-1)^{kl}ba,\quad k=\deg a,l=\deg b.$$

Доказательство. Рассмотрим некоммутативные формы

$$\omega_{X,1}=a_{X,1}\alpha_1,\,\omega_{X,2}=a_{X,2}\alpha_2,\quad \text{где } a_{X,1},a_{X,2}\in\widetilde{\Sigma}_X\rtimes\Gamma,\,\alpha_1,\alpha_2\in\Omega(T^*X).$$

Как и в доказательстве предложения 2.17, достаточно рассмотреть символы $a_{X,1},a_{X,2}$ вида

$$a_{X,1}(g)=\begin{cases}b_{X,1}, & g=\gamma_1,\\ 0, & g\neq\gamma_1,\end{cases}\qquad a_{X,2}(g)=\begin{cases}b_{X,2}, & g=\gamma_2,\\ 0, & g\neq\gamma_2,\end{cases}$$

где $\gamma = \gamma_1\gamma_2$.

Прямым вычислением получаем, что

$$(a_{X,1}\alpha_1 a_{X,2}\alpha_2)(g) = \begin{cases} b_{X,1}\gamma_1^{*-1}(\alpha_1 b_{X,2})(\gamma_1\gamma_2)^{*-1}(\alpha_2), & \text{если } g = \gamma_1\gamma_2, \\ 0, & \text{если } g \neq \gamma_1\gamma_2, \end{cases} \tag{2.49}$$

$$(a_{X,2}\alpha_2 a_{X,1}\alpha_1)(g) = \begin{cases} b_{X,2}\gamma_2^{*-1}(\alpha_2 b_{X,1})(\gamma_2\gamma_1)^{*-1}(\alpha_1), & \text{если } g = \gamma_2\gamma_1, \\ 0, & \text{если } g \neq \gamma_2\gamma_1. \end{cases} \tag{2.50}$$

Подставляя выражения (2.49) и (2.50) в $\tau_X^\gamma[\omega_{X,1},\omega_{X,2}]$, получаем

$$\begin{aligned} \tau_X^\gamma[\omega_{X,1},\omega_{X,2}] = \tau_X^\gamma\left(\omega_{X,1}\omega_{X,2} - (-1)^{kl}\omega_{X,2}\omega_{X,1}\right) = \\ = \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X\left(h^*\left(z^*\left(a_{X,1}\alpha_1 a_{X,2}\alpha_2(\gamma)\right)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh - \\ - \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X\left(h^*\left(z'^*\left((-1)^{kl} a_{X,2}\alpha_2 a_{X,1}\alpha_1(\gamma')\right)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Далее рассмотрим первое слагаемое в выражении (2.51). Выберем $z = e \in \Gamma$ и подставим формулу (2.49) в первое слагаемое выражения (2.51). Получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X\left(h^*\left(z^*\left(a_{X,1}\alpha_1 a_{X,2}\alpha_2(\gamma)\right)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh = \\ = \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X\left(h^*\left(b_{X,1}\gamma_1^{*-1}(\alpha_1 b_{X,2})\gamma^{*-1}(\alpha_2)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh = \\ = \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X\left(\left(h^*\left(b_{X,1}\gamma_1^{*-1}(b_{X,2}\alpha_1)\right)(h^*\gamma^{*-1}(\alpha_2)\right)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Поскольку $h \in C^\gamma$, имеем $h^*\gamma^{*-1} = \gamma^{*-1}h^*$ и $\gamma^{*-1}h^* = h^*$, так как форма в (2.52) рассматривается над T^*X^γ. Поэтому выражение (2.52) равно

$$\begin{aligned} \int\limits_{C^\gamma} \operatorname{tr}_X\left(\left(h^*\left(b_{X,1}\gamma_1^{*-1}(b_{X,2}\alpha_1)\alpha_2\right)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh = \\ = \int\limits_{C^\gamma} h^*\left(\operatorname{tr}_X\left(\left(b_{X,1}\gamma_1^{*-1}(b_{X,2})\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right)\left(\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\alpha_2\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в формуле (2.51). Здесь $\gamma' = \gamma_2\gamma_1$ и $z' = \gamma_2$. Подставим формулу (2.50) во второе слагаемое в (2.51):

$$\int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(h^* \left(z'^* \left(a_{X,2}\alpha_2 a_{X,1}\alpha_1(\gamma') \right)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh =$$

$$= \int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(h^* \left(\gamma_2{}^* \left(b_{X,2}\gamma_2^{*-1}(\alpha_2 b_{X,1})(\gamma_2\gamma_1)^{*-1}(\alpha_1)\right)\right)\Big|_{T^*X^\gamma}\right) dh =$$

$$= \int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(h^* \left(\gamma^*\gamma_1^{*-1}(b_{X,2}) b_{X,1}\alpha_2\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh, \quad (2.54)$$

поскольку $\gamma_2^* = \gamma^*\gamma_1^{*-1}$. Так как $h^*\gamma^* = h^*$ над T^*X^γ, получаем, что выражение в (2.54) равно

$$\int\limits_{C^\gamma} \mathrm{tr}_X \left(h^* \left(\gamma_1^{*-1}(b_{X,2}) b_{X,1}\alpha_2\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) dh =$$

$$= (-1)^{kl} \int\limits_{C^\gamma} h^* \left(\mathrm{tr}' \left((\gamma_1^{*-1}(b_{X,2}) b_{X,1})\big|_{T^*X^\gamma} \left(\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\alpha_2\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right)\right) dh. \quad (2.55)$$

Наконец, подставим выражения (2.53) и (2.55) в формулу (2.51) и получим

$$\tau_X^\gamma[\omega_{X,1},\omega_{X,2}] =$$

$$= \int\limits_{C^\gamma} h^*\big(\mathrm{tr}' \left(\left(b_{X,1}\gamma_1^{*-1}(b_{X,2}) - \gamma_1^{*-1}(b_{X,2}) b_{X,1}\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) \left(\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\alpha_2\right)\big|_{T^*X^\gamma} dh =$$

$$= \int\limits_{C^\gamma} h^*\big(\mathrm{tr}' \left(\left([b_{X,1}, \gamma_1^{*-1}(b_{X,2})]\right)\big|_{T^*X^\gamma}\right) \left(\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\alpha_2\right)\big|_{T^*X^\gamma} dh. \quad (2.56)$$

Теперь используем формулу (1.14) и покажем, что выражение (2.56) равняется

$$\int\limits_{C^\gamma} h^* \left(-i\Pi' \left(\frac{\partial b_1}{\partial \xi_n}\gamma_1^{*-1}(b_2)\right)\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\alpha_2\right)\Bigg|_{T^*X^\gamma} dh =$$

$$= -i\Pi' \int\limits_{C^\gamma} h^* \left(\frac{\partial b_1}{\partial \xi_n}\gamma_1^{*-1}(b_2)\gamma_1^{*-1}(\alpha_1)\alpha_2\right)\Bigg|_{T^*X^\gamma} dh =$$

$$= -i\Pi' \int\limits_{C^\gamma} h^* \left(\left(\frac{\partial a_1}{\partial \xi_n}\alpha_1 a_2\alpha_2\right)(\gamma)\Bigg|_{T^*X^\gamma}\right) dh = -i\Pi' \left(\tau_0^\gamma \left(\frac{\partial \omega_{X,1}}{\partial \xi_n}\omega_{X,2}\right)\right),$$

где b_1, b_2 — главные символы символов $b_{X,1}, b_{X,2}$, соответственно. Здесь мы воспользовались формулой (2.49). Второе равенство в (2.48) доказывается аналогично.

Лемма 2.23 доказана. □

Теперь вычислим следы в формуле (2.47), используя лемму 2.23:

$$
\begin{aligned}
d' \operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X} \sigma(\mathcal{D}) &= i\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} (r\nabla' a) \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} P_1 \right) - id'\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \xi_n} e^{-\Omega_2/2\pi i} r \right) = \\
&= i\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} (r\nabla' a) \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} \right) - i\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left[\widetilde{\nabla}'_{P_1}, r\frac{\partial a}{\partial \xi_n} e^{-\Omega_2/2\pi i} \right] = \\
&= i\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} (r\nabla' a) - \left[\widetilde{\nabla}'_{P_1}, r\frac{\partial a}{\partial \xi_n} \right] \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} \right) = \\
&= i\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \xi_n} \nabla' a + r\nabla' \frac{\partial a}{\partial \xi_n} - \nabla'_{P_1} \left(r\frac{\partial a}{\partial \xi_n} \right) - \left[r\nabla' a, r\frac{\partial a}{\partial \xi_n} \right] \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} \right) = \\
&= i\Pi'\tau^{\gamma}_0 \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \xi_n} \nabla' a - (\nabla' r) \frac{\partial a}{\partial \xi_n} + \left[r\frac{\partial a}{\partial \xi_n}, r\nabla' a \right] \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} \right), \quad (2.57)
\end{aligned}
$$

где $\widetilde{\nabla}'_{P_1} = \nabla'_{P_1} + r\nabla' a$ (мы имеем $(\widetilde{\nabla}'_{P_1})^2 = \Omega_2$). Поскольку аргумент функционала τ^{γ}_0 в формуле (2.57) совпадает с аргументом в формуле (2.43), а следовательно, функционал имеет компактный носитель, мы воспользуемся формулами (1.1) и (2.57) и получим формулу

$$
\begin{aligned}
&d' \operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X} \sigma(\mathcal{D}) = \\
&\quad = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \tau^{\gamma}_0 \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \xi_n} \nabla' a - (\nabla' r) \frac{\partial a}{\partial \xi_n} + \left[r\frac{\partial a}{\partial \xi_n}, r\nabla' a \right] \right) e^{-\Omega_2/2\pi i} \right) d\xi_n. \quad (2.58)
\end{aligned}
$$

Поскольку выражения в формулах (2.43) и (2.58) равны, то мы получаем искомое равенство (2.36). Пункт 1 доказан.

4. Теперь перейдем к доказательству второго пункта. Рассмотрим согласованные семейства внутренних символов a_t, r_t над $T^*M \times [0,1]$ и граничные символы $a_{X,t}, r_{X,t}$ над $T^*X \times [0,1]$, которые гладко зависят от t. Для таких пар символов рассмотрим формы Черна $\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]} \sigma(\mathcal{D})$ и $\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X\times[0,1]} \sigma(\mathcal{D})$. Представим форму $\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]} \sigma(\mathcal{D})$ в виде

$$
\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]} \sigma(\mathcal{D}) = dt \wedge \alpha + \beta, \qquad (2.59)
$$

где $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega_{T^*M}$ — гладкие семейства форм. Здесь

$$
\beta(t_0) = \operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times\{t=t_0\}} \sigma(\mathcal{D}), \qquad \alpha = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]}.
$$

По уже доказанному пункту 1 теоремы имеем $d \operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]} \sigma(\mathcal{D}) = 0$. Используя формулу (2.59), получаем

$$
d \operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]} \sigma(\mathcal{D}) = -dt \wedge d\alpha + d\beta + dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0.
$$

Следовательно, получаем формулу

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = d\alpha,$$

откуда

$$\beta(1) - \beta(0) = d\int\limits_0^1 \alpha(t)dt.$$

Теперь используем разложение

$$\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D}) = dt\wedge\alpha_X + \beta_X, \tag{2.60}$$

где $\alpha_X(t),\beta_X(t)\in\Omega_{T^*X}$. Вычислим $\pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D})$. Имеем

$$i^*_{\gamma}\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D}) = dt\wedge i^*_{\gamma}\alpha + i^*_{\gamma}\beta,$$

$$\pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D}) = -dt\wedge\pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\alpha + \pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\beta. \tag{2.61}$$

Теперь вычислим $d\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D})$. Используя разложение (2.60), получаем

$$d\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D}) = -dt\wedge d'\alpha_X + dt\wedge\frac{\partial\beta_X}{\partial t} + d'\beta_X. \tag{2.62}$$

По пункту 1 теоремы левые части в равенствах (2.61) и (2.62) отличаются на знак. Следовательно, их правые части также отличаются на знак:

$$-dt\wedge\pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\alpha + \pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\beta = dt\wedge d'\alpha_X - dt\wedge\frac{\partial\beta_X}{\partial t} - d'\beta_X,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial\beta_X}{\partial t} = d'\alpha_X + \pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\alpha.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$\beta_X(1) - \beta_X(0) = d'\int\limits_0^1 \alpha_X(t)dt + \pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\int\limits_0^1 \alpha(t)dt.$$

Таким образом, получаем равенства

$$\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*M}\sigma(\mathcal{D})(1) - \operatorname{ch}_{T^*M}\sigma(\mathcal{D})(0) = d\omega, \tag{2.63}$$

$$\operatorname{ch}^{\gamma}_{T^*X}\sigma(\mathcal{D})(1) - \operatorname{ch}_{T^*X}\sigma(\mathcal{D})(0) = d'\omega_X + \pi^{\gamma}_* i^*_{\gamma}\omega, \tag{2.64}$$

откуда

$$\omega = \int_0^1 \alpha(t)dt, \qquad \omega_X = \int_0^1 \alpha_X(t)dt.$$

Из равенств (2.63) и (2.64) следует, что разность

$$(\mathrm{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D})(1), -\mathrm{ch}^{\gamma}_{T^*X\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D})(1))-$$
$$-(\mathrm{ch}^{\gamma}_{T^*M\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D})(0), -\mathrm{ch}^{\gamma}_{T^*X\times[0,1]}\sigma(\mathcal{D})(0))$$

является кограницей в комплексе $(\Omega_c(T^*M^{\gamma},\pi^{\gamma}),\partial)$. Это доказывает гомотопическую инвариантность характера Черна.

Пусть теперь $a_1, r_1, a_{X,1}, r_{X,1}$ — различные продолжения эллиптических символов на T^*M и T^*X, соответственно. Тогда рассмотрим гомотопии

$$a_t = a(1-t) + a_1\cdot t, \qquad r_t = r(1-t) + r_1\cdot t,$$

$$a_{X,t} = a_X(1-t) + a_{X,1}\cdot t, \qquad r_{X,t} = r_X(1-t) + r_{X,1}\cdot t,$$

где $t\in[0,1]$. При $t=0$ имеем множество a,r,a_X,r_X, а при $t=1$ имеем множество $a_1, r_1, a_{X,1}, r_{X,1}$. Тогда гомотопическая инвариантность дает независимость от выбора продолжений. $\square$

Замечание 2.24. Полученные выше результаты справедливы и для операторов Буте де Монвеля ненулевых порядка и типа.

2.1.4 Теорема об индексе

Чтобы дать нашу формулу индекса, определим нужные эквивариантные характеристические классы. Во-первых, определим формы Тодда на M^{γ}.

Определение 2.25. *Формой Тодда* на подмногообразии M^{γ} называется дифференциальная форма $\mathrm{Td}(T^*M^{\gamma}\otimes\mathbb{C})\in\Omega^{ev}(M^{\gamma})$, определяемая как

$$\mathrm{Td}(T^*M^{\gamma}\otimes\mathbb{C}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det\left(\frac{-\Omega^{\gamma}/2\pi i}{1-\exp(\Omega^{\gamma}/2\pi i)}\right),$$

где Ω^{γ} — форма кривизны связности Леви–Чивиты на M^{γ}.

Форма Тодда $\mathrm{Td}(T^*X^\gamma \otimes \mathbb{C})$ на X^γ определяется аналогично. Пара этих форм является замкнутой в комплексе $(\widetilde{\Omega}^*(M^\gamma,\pi^\gamma),\widetilde{\partial})$ (см. (2.12)), а ее класс когомологий будем обозначать через

$$\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) \in \widetilde{H}^{ev}(M^\gamma,\pi^\gamma). \tag{2.65}$$

Обозначим через N^γ конормальное расслоение подмногообразия $M^\gamma \subset M$.

Определение 2.26. *Конормальным расслоением* подмногообразия $M^\gamma \subset M$ называется подмножество

$$N^\gamma = \{(x,\xi) \in T^*M \mid x \in M^\gamma, \xi(v) = 0 \ \forall v \in T_xM^\gamma \subset T_xM\}.$$

Определим класс когомологий (ср. [3])

$$\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \frac{\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma) - \mathrm{ch}\,\Omega^{odd}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)} \in H^{ev}(M^\gamma), \tag{2.66}$$

где N^γ — нормальное расслоение подмногообразия $M^\gamma \subset M$, $\Omega^{ev/odd}$ — векторное расслоение внешних форм четной/нечетной степени, а класс $\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)$ определен как линейная комбинация обычных характеров Черна

$$\mathrm{ch}\,\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma) = \sum_k \lambda_k \,\mathrm{ch}\, V_{\lambda_k}.$$

Здесь $\Omega^{ev}(N^\gamma \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus\limits_k V_{\lambda_k}$ — разложение векторного расслоения на собственные подрасслоения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k \in \mathbb{S}^1$ эндоморфизма расслоений γ. Класс $\Omega^{odd}(N^\gamma \otimes \mathbb{C})(\gamma)$ определяется аналогично. Отметим, что деление в формуле (2.66) корректно, поскольку компонента нулевой степени в делителе ненулевая (см. [6]).

Следующая теорема является основным результатом этой главы.

Теорема 2.27. *Пусть $\mathcal{D}$ — эллиптический оператор в смысле определения 2.5. Справедлива формула индекса*

$$\mathrm{ind}\,\mathcal{D} = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma} \langle \mathrm{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D}) \wedge \mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}),[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle, \tag{2.67}$$

где суммирование производится по классам сопряженности группы Γ, а ряд сходится абсолютно. Здесь

- $\mathrm{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D}) \in H^{ev}(T^*M^\gamma, \pi^\gamma)$ — *класс Черна оператора $\mathcal{D}$;*

- $\mathrm{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\in\widetilde{H}^{ev}(M^\gamma,\pi^\gamma)$ — *класс Тодда подмногообразия* M^γ*;*
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *функционал* (2.16) *интегрирования по фундаментальному циклу.*

Перед тем, как доказать теорему 2.27, введем дополнительные обозначения. Каждому проектору $P\in\mathrm{Mat}_N(C^\infty(X)\rtimes\Gamma)$ сопоставим специальную краевую задачу. А именно, рассмотрим матричный $N\times N$ оператор (ср. [41, Corollary 20.3.1]) на M:

$$\Lambda_P=\chi\left(\frac{\partial}{\partial x_n}(2P-1)+\Lambda_X\right)+(1-\chi)\Lambda_M, \tag{2.68}$$

где Λ_M,Λ_X — неотрицательные ПДО порядка 1 на M и X, соответственно, $\chi\in C^\infty(M)$ — такая функция $0\leqslant\chi\leqslant 1$, тождественно равная единице в окрестности края и равная нулю в несколько большей окрестности края. Здесь мы полагаем, что операторы Λ_M и Λ_X коммутируют с действием группы Γ на M и X. Рассмотрим следующую краевую задачу для оператора (2.68):

$$\begin{pmatrix}\Lambda_P\\ Pi^*\end{pmatrix}:H^1(M,\mathbb{C}^N)\longrightarrow\begin{array}{c}L^2(M,\mathbb{C}^N)\\ \oplus\\ PH^{1/2}(X,\mathbb{C}^N)\end{array}. \tag{2.69}$$

Аналогично работе [13] можно показать, что эта краевая задача фредгольмова, а ее индекс равен нулю. Теперь сведем задачу (2.69) к задаче в пространствах L^2. Для этого обозначим через Λ_- оператор (2.69) при $P=0$. Отметим, что последний оператор без граничных условий является фредгольмовым. Теперь определим краевую задачу нулевого порядка:

$$\begin{pmatrix}\Lambda_P(\Lambda_-)^{-1}\\ \Lambda_X^{1/2}Pi^*(\Lambda_-)^{-1}\end{pmatrix}:L^2(M,\mathbb{C}^N)\longrightarrow\begin{array}{c}L^2(M,\mathbb{C}^N)\\ \oplus\\ PL^2(X,\mathbb{C}^N).\end{array} \tag{2.70}$$

Эта задача фредгольмова с нулевым индексом как композиция оператора Λ_-^{-1}, задачи (2.69) и оператора $\Lambda_X^{1/2}$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.27.

Доказательство. В силу гомотопической классификации, построенной Савиным [33, Theorem 5], достаточно доказать формулу индекса в двух случаях: а) в случае операторов, тривиальных в окрестности края; б) в случае специальных краевых задач (2.70).

Случай а): поскольку оператор является тривиальным в окрестности края, он может быть продолжен на дубль многообразия с сохранением индекса. В этом случае формула индекса (2.67) следует из теоремы об индексе в [47, §9.2.1]. В самом деле, рассмотрим эллиптическую тройку $(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$, тривиальную в окрестности края $X \subset M$. Тривиальность здесь означает, что в окрестности края оператор $\mathcal{D}$ имеет компоненты в подалгебре

$$(C^\infty(M) \oplus C^\infty(X)) \rtimes \Gamma \subset \Psi_B(M) \rtimes \Gamma. \tag{2.71}$$

Тогда имеем равенство

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D},\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = \operatorname{ind}(D,P_1,P_2), \tag{2.72}$$

где $P_{1,2} \in \operatorname{Mat}_N(C^\infty(M)) \rtimes \Gamma$ — компоненты проекторов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ на M, а D — псевдодифференциальный оператор в операторе $\mathcal{D}$ на M.

Обозначим через $2M$ дубль многообразия M. Как топологическое пространство он получается склеиванием двух копий многообразия M вдоль границы. Определим пространство гладких функций на нем формулой

$$C^\infty(2M) = \{(u,v) \in C^\infty(M_\varepsilon) \oplus C^\infty(M_\varepsilon) | u(x',x_n) = v(x',-x_n) \text{ для всех } |x_n| < \varepsilon\},$$

где многообразие M_ε получено склеиванием многообразия M и цилиндра $X \times (-\varepsilon,0]$ вдоль края.

Полагаем, что коэффициенты тройки (D,P_1,P_2) не зависят от x_n при малых $|x_n|$. При таком условии рассмотрим симметрическое продолжение тройки (D,P_1,P_1) на дубль (как в [55]) и обозначим это продолжение через $(\tilde{D},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2)$. С одной стороны, оператор $\tilde{D} : \operatorname{Im}\tilde{P}_1 \to \operatorname{Im}\tilde{P}_2$ изоморфен прямой сумме двух копий исходного оператора $D : \operatorname{Im}P_1 \to \operatorname{Im}P_2$. Тогда получаем равенство

$$\operatorname{ind}(\tilde{D},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2) = 2\operatorname{ind}(D,P_1,P_2). \tag{2.73}$$

С другой стороны, применяя формулу индекса из [47, §9.2.1] к индексу оператора $(\tilde{D},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2)$, получим формулу

$$\operatorname{ind}(\tilde{D},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma} \langle \operatorname{ch}^\gamma \sigma(\tilde{\mathcal{D}}) \wedge \operatorname{Td}^\gamma(T^*2M \otimes \mathbb{C}) \wedge \operatorname{ch}^\gamma \Lambda(2\mathcal{N}^\gamma \otimes \mathbb{C})^{-1}, [T^*2M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle. \tag{2.74}$$

Поскольку оператор $\tilde{D}$ тривиален при малых $|x_n|$, подынтегральное выражение в формуле (2.74) тождественно равно нулю при малых $|x_n|$. Более того, поскольку оператор $(\tilde{D},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2)$ определяется симметрическим продолжением тройки

(D,P_1,P_2), из равенства (2.73) получаем формулу

$$\operatorname{ind}(\tilde{D},\tilde{P}_1,\tilde{P}_2) = 2\sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma}\langle \operatorname{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D})\wedge \operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\wedge \operatorname{ch}^\gamma\Lambda(\mathcal{N}^\gamma\otimes\mathbb{C})^{-1},[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle. \tag{2.75}$$

Из формул (2.72), (2.73) и (2.75) следует искомая формула

$$\operatorname{ind}(D,P_1,P_2) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma}\langle \operatorname{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D})\wedge \operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\wedge \operatorname{ch}^\gamma\Lambda(\mathcal{N}^\gamma\otimes\mathbb{C})^{-1},[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle$$

индекса оператора (D,P_1,P_2).

Случай б): покажем, что в этом случае топологический индекс оператора (D,P_1,P_2) равен нулю.

В самом деле, пусть дан проектор P и соответствующая задача $(\mathcal{D}_P,\mathcal{P}_{1,P},\mathcal{P}_{2,P})$. Тогда индекс в теореме 2.27 равен сумме вкладов классов сопряженности $\langle\gamma\rangle\subset\Gamma$. Каждый такой вклад

$$\langle \operatorname{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D}_P)\wedge \operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\wedge \operatorname{ch}^\gamma\Lambda(\mathcal{N}^\gamma\otimes\mathbb{C})^{-1},[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle \tag{2.76}$$

равен сумме интегралов форм, представляющих классы когомологий на расслоениях T^*M^γ и T^*X^γ. Утверждается, что каждый такой интеграл равен нулю.

Во-первых, выберем локальные координаты (y,η) на T^*X^γ и введем сферические координаты

$$\eta = r\omega, \quad \text{где} \quad r=|\eta|, \quad \omega=\frac{\eta}{|\eta|}. \tag{2.77}$$

Тогда из формул (2.68),(2.69), (2.70) и (2.65), (2.66) следует, что дифференциальные формы, отвечающие компонентам на T^*X^γ класса когомологий в (2.76), не содержат дифференциалов $d\omega$. Следовательно, интеграл по T^*M^γ равен нулю.

Во-вторых, выберем координаты (y,x_n,η,τ) в окрестности края расслоения T^*M^γ. Здесь также введем сферические координаты (2.77) и отметим, что подынтегральное выражение интеграла по T^*M^γ не содержит дифференциалов $d\omega$. Тогда интеграл равен нулю.

Таким образом, формула индекса (2.67) доказана.

□

2.2 Приложение. Индекс скрученных краевых задач

Полученная в предыдущем параграфе формула индекса является достаточно громоздкой для ее применения. В данном параграфе рассмотрен специальный класс операторов Буте де Монвеля, для которых вычисление индекса производится по более простой формуле. Будем рассматривать операторы Буте де Монвеля, действующие в сечениях некоторых векторных расслоений многообразий (см. [22]). Результаты данного параграфа опубликованы в статье [34].

2.2.1 Скрученные краевые задачи

Γ-инвариантные операторы. Как и раньше, пусть M — гладкое компактное риманово многообразие с краем X, а Γ — дискретная конечнопорожденная группа изометрий $\gamma : M \to M$, сохраняющих край $\gamma(X) = X$.

Определение 2.28. Векторное расслоение E над многообразием M называется Γ-*расслоением*, если для любых точек $m \in M$ и элементов $\gamma \in \Gamma$ существует изоморфизм слоев

$$t_m(\gamma) : E_m \to E_{\gamma(m)},$$

гладко зависящий от m и удовлетворяющий равенству

$$t(\gamma_1)t(\gamma_2) = t(\gamma_1\gamma_2), \qquad \forall \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma.$$

Определим оператор сдвига

$$T(\gamma) : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E), \qquad (T(\gamma)u)(m) = t_{\gamma^{-1}(m)}(\gamma)u(\gamma^{-1}m). \tag{2.78}$$

Нетрудно показать, что справедлива формула

$$T(\gamma_1)T(\gamma_2) = T(\gamma_1\gamma_2) \qquad \forall \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma.$$

Пусть

$$\mathcal{D} : \begin{array}{c} C^\infty(M,E_1) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M,E_2) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_2) \end{array} \tag{2.79}$$

— эллиптический оператор Буте де Монвеля без сдвигов, действующий в сечениях Γ-расслоений E_i,F_i, $i = 1,2$.

Теперь определим матричные операторы

$$\mathcal{T}_i(\gamma) = \begin{pmatrix} T_{E_i}(\gamma) & 0 \\ 0 & T_{F_i}(\gamma) \end{pmatrix} : \begin{array}{c} C^\infty(M,E_i) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_i) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M,E_i) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_i) \end{array},$$

где операторы $T_{E_i}(\gamma)$, $T_{F_i}(\gamma)$, $i = 1{,}2$, обозначают операторы сдвига (2.78) в векторных Γ-расслоениях E_i, F_i.

Определение 2.29. Оператор (2.79) без сдвигов называется Γ-*инвариантным*, если выполнено равенство

$$\mathcal{D}\mathcal{T}_1(\gamma) = \mathcal{T}_2(\gamma)\mathcal{D} \qquad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{2.80}$$

Γ-проекторы. Рассмотрим гладкое скрещенное произведение $C^\infty(M) \rtimes \Gamma$. Пусть дан матричный $n \times n$ проектор

$$P \in \operatorname{Mat}_n(C^\infty(M) \rtimes \Gamma). \tag{2.81}$$

Определим оператор

$$\widetilde{P}_j : \begin{matrix} C^\infty(M,E_j \otimes \mathbb{C}^n) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_j \otimes \mathbb{C}^n) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,E_j \otimes \mathbb{C}^n) \\ \oplus \\ C^\infty(X,F_j \otimes \mathbb{C}^n) \end{matrix}, \quad j = 1{,}2,$$

по формуле

$$\widetilde{P}_j = \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 \otimes P(\gamma))(\mathcal{T}_j(\gamma) \otimes 1). \tag{2.82}$$

Лемма 2.30. *Оператор* (2.82) *является проектором, т.е.* $\widetilde{P}_j^2 = \widetilde{P}_j$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_j^2 = \sum_{\gamma_1,\gamma_2} P(\gamma_1)\mathcal{T}_j(\gamma_1)P(\gamma_2)\mathcal{T}_j(\gamma_2) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2} (P(\gamma_1)\gamma_1^{*-1}P(\gamma_2))\mathcal{T}_j(\gamma_1\gamma_2) = \\ = \sum_{\gamma} \left(\sum_{\gamma_1\gamma_2 = \gamma} P(\gamma_1)\gamma_1^{*-1}P(\gamma_2) \right) \mathcal{T}_j(\gamma) = \sum_{\gamma} P(\gamma)\mathcal{T}_j(\gamma) = \widetilde{P}_j, \end{aligned} \tag{2.83}$$

где мы воспользовались тем фактом, что $P^2 = P$. Для краткости в вычислениях выше был опущен знак $\otimes$. $\square$

Скрученные операторы. Путь $\mathcal{D}$ — Γ-инвариантный оператор (2.79), а P — проектор как в формуле (2.81). Обозначим прямую сумму n копий оператора $\mathcal{D}$ через $\mathcal{D} \otimes 1_n$.

Определение 2.31. Оператор

$$\widetilde{P}_2(\mathcal{D}\otimes 1_n)\widetilde{P}_1 : \mathrm{Im}\widetilde{P}_1 \longrightarrow \mathrm{Im}\widetilde{P}_2, \quad \text{где } \mathrm{Im}\widetilde{P}_j \subset L^2(M,E_j\otimes\mathbb{C}^n)\oplus L^2(X,F_j\otimes\mathbb{C}^n), \tag{2.84}$$

обозначается через $\mathcal{D}\otimes 1_P$ и называется *оператором $\mathcal{D}$, скрученным проектором P.*

Лемма 2.32. *Оператор* (2.84) *фредгольмов.*

Доказательство. Утверждается, что оператор

$$\widetilde{P}_1(\mathcal{R}\otimes 1_n)\widetilde{P}_2 \tag{2.85}$$

является почти обратным к (2.84). Здесь $\mathcal{R}$ — почти обратный оператор к $\mathcal{D}$.

В самом деле, опустив для краткости знак $\otimes$, получаем

$$\widetilde{P}_2\mathcal{D} = \sum_\gamma P(\gamma)\mathcal{T}_2(\gamma)\mathcal{D} = \sum_\gamma P(\gamma)\mathcal{D}\mathcal{T}_1(\gamma) = \sum_\gamma (\mathcal{D}P(\gamma)+[P(\gamma),\mathcal{D}])\mathcal{T}_1(\gamma) =$$
$$= \mathcal{D}\sum_\gamma P(\gamma)\mathcal{T}_1(\gamma) + K = \mathcal{D}\widetilde{P}_1 + K, \tag{2.86}$$

где K обозначает некоторые компактные операторы. Здесь мы воспользовались инвариантностью (2.80) и тем фактом, что коммутатор $[P(\gamma),\mathcal{D}]$ компактен. Тогда из равенства (2.86) следует, что

$$\widetilde{P}_2\mathcal{D}\widetilde{P}_1\mathcal{R}\widetilde{P}_2 = \widetilde{P}_2^2\mathcal{D}\mathcal{R}\widetilde{P}_2+K = \widetilde{P}_2(1+K)\widetilde{P}_2+K = \widetilde{P}_2+K = 1+K : \mathrm{Im}\widetilde{P}_2 \to \mathrm{Im}\widetilde{P}_2.$$

Схожим образом доказывается, что

$$\widetilde{P}_1\mathcal{R}\widetilde{P}_2\mathcal{D}\widetilde{P}_1 = 1+K : \mathrm{Im}\widetilde{P}_1 \to \mathrm{Im}\widetilde{P}_1.$$

Лемма 2.32 доказана. □

2.2.2 Формула индекса

Для получения формулы индекса аналогично параграфу 2.1.3 определим необходимые характеры Черна.

Характер Черна проектора. Определим характер Черна проектора (2.81)

$$\operatorname{ch}^\gamma(P) \in H^{ev}(M^\gamma) \tag{2.87}$$

по формуле

$$\operatorname{ch}^\gamma(P) = \operatorname{tr} \tau^\gamma \left(P \exp\left(-\frac{\nabla_P^2}{2\pi i} \right) \right) \in \Omega^*(M^\gamma), \tag{2.88}$$

где τ^γ — функционал (2.24), $\nabla_P = P \cdot d \cdot P$ и $\nabla_P^2 = P(dP)^2$. Форма (2.88) является замкнутой, а ее класс когомологий также обозначим через (2.87).

Характер Черна символа оператора Буте де Монвеля. Теперь определим характер Черна символа $\sigma(\mathcal{D})$. Рассмотрим эллиптический Г-инвариантный оператор $\mathcal{D}$ (см. определение 2.29). Как и ранее, обозначим через a,r и a_X,r_X гладкие продолжения внутреннего и граничного символа гладкими символами на T^*M и на T^*X соответственно.

Реализуем расслоения E_i,F_i в терминах некоторых матричных проекторов. А именно, рассмотрим их как подрасслоения $E_j \subset M \times \mathbb{C}^N$, $F_j \subset X \times \mathbb{C}^N$, определенные как образы матричных проекторов q_{E_j},q_{F_j}. Более того, мы возьмем такое унитарное представление $\overline{\Gamma} \to U(\mathbb{C}^N)$, что проекторы q_{E_j},q_{F_j} Г-инвариантны, а $E_j \simeq \operatorname{Im} q_{E_j}$, $F_j \simeq \operatorname{Im} q_{F_j}$ — изоморфизмы Г-расслоений.

Определим связности

$$\nabla_{E_j} = q_{E_j} d q_{E_j},$$

где d означает внешнюю производную на T^*M, и связность

$$\widetilde{\nabla} = \nabla_{E_1} + r(\nabla a), \text{ где } \nabla a \equiv \nabla_{E_2} a - a \nabla_{E_1}.$$

Ее форма кривизны равна

$$\widetilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla})^2 = \nabla_{E_1}^2 + \nabla_{E_1}(r\nabla a) + (r\nabla a)^2.$$

Определим характер Черна по формуле

$$\operatorname{ch}^M(\mathcal{D})(\gamma) = \operatorname{tr}\left(\gamma \left(e^{-\widetilde{\Omega}/2\pi i} q_{E_1} - q_{E_2} e^{-\nabla_{E_2}^2/2\pi i} \right) \right) \in \Omega_c^{ev}(T^*M^\gamma), \tag{2.89}$$

где tr — матричный след.

Теперь выполним аналогичные построения для граничного символа на T^*X. Определим проекторы на T^*X

$$q'_j = \operatorname{diag}(q_{E_j}\big|_X, q_{F_j})$$

и связности

$$\nabla'_j = q'_j d' q'_j, \qquad \widetilde{\nabla}' = \nabla'_1 + r_X(\nabla' a_X),$$

где d' означает внешнюю производную на T^*X, а $\nabla' a_X = \nabla'_2 a_X - a_X \nabla'_1$. Кривизна связности $\widetilde{\nabla}'$ равна

$$\widetilde{\Omega}' \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\nabla}')^2 = \nabla_1'^2 + \nabla'_1(r_X \nabla' a_X) + (r_X \nabla' a_X)^2.$$

Определим характер Черна по формуле

$$\begin{gathered}
\operatorname{ch}^X(\mathcal{D})(\gamma) = \operatorname{tr}'\left(\gamma\left(e^{-\widetilde{\Omega}'/2\pi i}(q'_1 - r_X a_X)\right)\right) - \\
- \operatorname{tr}'\left(\gamma\left(q'_2 e^{-(\nabla'_2)^2/2\pi i} - a_X e^{-\widetilde{\Omega}'/2\pi i} r_X\right)\right), \\
\operatorname{ch}^X(\mathcal{D})(\gamma) \in \Omega^{ev}_c(T^*X^\gamma). \qquad (2.90)
\end{gathered}$$

Здесь tr' — регуляризованный след (1.13) граничного символа.

Замечание 2.33. Если $\partial M = \varnothing$, то определение (2.89) переходит в определение из [3].

Аналогично предложению 2.21 можно показать, что пара форм (2.89),(2.90) определяет класс в когомологиях

$$\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma) = [\operatorname{ch}^M(\mathcal{D})(\gamma), \operatorname{ch}^X(\mathcal{D})(\gamma)] \in H^*(T^*M^\gamma, \pi^\gamma).$$

Напомним, что здесь рассматривается группа когомологий, определенная комплексом (2.18) на кокасательном расслоении подмногообразия T^*M^γ с проекцией $\pi^\gamma : \partial(T^*M^\gamma) \longrightarrow T^*X^\gamma$. Класс $\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)$ корректно определен, что можно доказать аналогично проделанному в параграфе 2.1.4.

Формула индекса. Предположим, что все подмногообразия неподвижных точек M^γ ориентированы и диффеоморфизмы $\gamma_1 : M^{\gamma_2} \to M^{\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}}$ сохраняют ориентацию для любых элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Рассмотрим проекцию

$$\pi^\gamma : \partial(T^*M^\gamma) \longrightarrow T^*X^\gamma.$$

Для этой проекции аналогично формуле (2.21) определим соответствующий изоморфизм Тома

$$\alpha^\gamma : H^*(T^*M^\gamma,\pi^\gamma) \longrightarrow H^{*-n}(M^\gamma,X^\gamma).$$

Следующая теорема дает формулу индекса скрученных операторов.

Теорема 2.34. *Справедлива следующая формула индекса скрученных операторов:*

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}\otimes 1_P) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma} \langle \alpha^\gamma\left(\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)\right)\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\operatorname{ch}^\gamma(P),[M^\gamma,X^\gamma]\rangle\,, \qquad (2.91)$$

где $[M^\gamma,X^\gamma]\in H_{n_\gamma}(M^\gamma,X^\gamma), n_\gamma=\dim M^\gamma$ — *фундаментальный класс в относительных гомологиях, а* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *означает спаривание между когомологиями и гомологиями.*

Доказательство. Доказательство является аналогичным доказательству теоремы 10 в работе [16]. Укажем основные моменты в доказательстве.

1. Напомним формулу индекса из параграфа 2.1.4

$$\operatorname{ind}(\mathcal{D}\otimes 1_P) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma}\langle \operatorname{ch}^\gamma\sigma(\mathcal{D}\otimes 1_P)\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C}),[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle \qquad (2.92)$$

для индекса общих краевых задач со сдвигами. Здесь $\operatorname{ch}^\gamma\sigma(\mathcal{D}\otimes 1_P)\in H^{ev}(T^*M^\gamma,\pi^\gamma)$ — характер Черна главного символа нашего скрученного оператора, а спаривание с фундаментальным классом подмногообразия T^*M^γ определяется аналогично формуле (2.16) как

$$\begin{aligned} \langle\cdot,[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle : H^*(T^*M^\gamma,\pi^\gamma) &\longrightarrow \mathbb{C},\\ (\omega,\omega_X) &\longmapsto \int\limits_{T^*M^\gamma}\omega-\int\limits_{T^*X^\gamma}\omega_X. \end{aligned} \qquad (2.93)$$

Напомним, что кокасательные расслоения имеют ориентацию $(\xi_1,x_1,\xi_2,x_2,\ldots)$.

2. Аналогично [47, Lemma 9.10] можно доказать мультипликативное свойство характеров Черна

$$\operatorname{ch}^\gamma[\sigma(\mathcal{D}\otimes 1_P)] = \operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)\cdot\operatorname{ch}^\gamma(P). \qquad (2.94)$$

3. Теперь пусть $(\omega,\omega_X)\in\Omega^{ev}_c(T^*M^\gamma)\oplus\Omega^{ev}_c(T^*X^\gamma)$ — представитель класса $\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma)$, а $\omega_0\in\Omega^{ev}(M^\gamma)$ — представитель класса $\operatorname{ch}^\gamma(P)\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})$. Тогда

имеем

$$\langle \operatorname{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D}\otimes 1_P)\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C}),[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle = \int\limits_{T^*M^\gamma}\omega\wedge\omega_0 - \int\limits_{T^*X^\gamma}\omega_X\wedge\omega_0 =$$

$$= \int\limits_{M^\gamma}\pi_*^{M^\gamma}\omega\wedge\omega_0 - \int\limits_{X^\gamma}\pi_*^{X^\gamma}(\omega_X)\wedge\omega_0 = \langle\alpha[(\omega,\omega_X)][\omega_0],[M^\gamma,X^\gamma]\rangle, \quad (2.95)$$

где мы использовали формулу (2.93) и свойства интегрирования по слоям. Тогда равенство (2.95) дает формулу

$$\langle \operatorname{ch}^\gamma \sigma(\mathcal{D}\otimes 1_P)\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C}),[T^*M^\gamma,\pi^\gamma]\rangle = \\ = \langle\alpha^\gamma(\operatorname{ch}(\mathcal{D})(\gamma))\operatorname{Td}^\gamma(T^*M\otimes\mathbb{C})\operatorname{ch}^\gamma(P),[M^\gamma,X^\gamma]\rangle.$$

Отсюда и из формулы (2.92) получаем искомую формулу индекса (2.91).

□

Отметим, что вычисление индекса по формуле (2.91) оказывается проще, чем по формуле (2.67).

2.2.3 Пример. Оператор Эйлера

Рассмотрим краевую задачу для оператора Эйлера:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} d+d^* \\ i^* \end{pmatrix} : \Omega^{ev}(M) \longrightarrow \begin{matrix}\Omega^{odd}(M)\\ \oplus \\ \Omega^{ev}(X)\end{matrix}, \quad (2.96)$$

где $i : X \hookrightarrow M$ естественное вложение края, $d : \Omega^{ev}(M) \to \Omega^{odd}(M)$ — внешний дифференциал, а d^* — сопряженный к нему относительно римановой метрики на M.

Эта краевая задача является Γ-инвариантной, поскольку группа Γ действует на M изометриями. Известно, что эта краевая задача является эллиптической, т.е. она удовлетворяет условию Шапиро–Лопатинского.

Пусть $P \in \operatorname{Mat}_N(C^\infty(M)\rtimes\Gamma)$ — матричный проектор над гладким скрещенным произведением. Рассмотрим скрученную краевую задачу $\mathcal{E}\otimes 1_P$.

Теорема 2.35. *Индекс скрученной краевой задачи $\mathcal{E}\otimes 1_P$ равен*

$$\operatorname{ind}(\mathcal{E}\otimes 1_P) = \sum_{\langle\gamma\rangle\subset\Gamma}{\sum}'\chi(M^\gamma,\partial M^\gamma)\operatorname{ch}_0^\gamma(P).$$

Здесь

- $\chi(M^\gamma,\partial M^\gamma)$ *обозначает относительную эйлерову характеристику множества неподвижных точек* M^γ*;*
- *число* $\mathrm{ch}_0^\gamma(P)$ *равно компоненте нулевой степени характера Черна проектора* P*;*
- $\chi(M^\gamma,\partial M^\gamma)$ *и* $\mathrm{ch}_0^\gamma(P)$ *рассматриваются как локально постоянные функции на множестве* M^γ*;*
- *знак* $\sum{}'$ *обозначает суммирование по компонентам связности множества* M^γ.

Доказательство. Сужение внутреннего символа $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{E})$ на подмногообразие неподвижных точек элемента γ имеет разложение

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{E})|_{T^*M^\gamma} \simeq \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{E}_{M^\gamma}) \otimes 1_{\Omega^{ev}(N)} \oplus \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{E}^*_{M^\gamma}) \otimes 1_{\Omega^{odd}(N)}, \tag{2.97}$$

где через $\mathcal{E}_{M^\gamma}$ обозначена краевая задача Эйлера на M^γ, а $\mathcal{E}^*_{M^\gamma}$ — сопряженная к ней. Это разложение следует из ортогонального разложения касательного расслоения

$$TM|_{M^\gamma} \simeq TM^\gamma \oplus N^\gamma,$$

где N^γ — нормальное расслоение подмногообразия $M^\gamma \subset M$ и соответствующего градуированного разложения $\Omega(TM)|_{M^\gamma} \simeq \Omega(TM^\gamma)\otimes\Omega(N^\gamma)$ внешних форм. Похожее разложение справедливо и для граничного символа $\sigma_X(\mathcal{E})|_{T^*X^\gamma}$.

Из разложения (2.97) для внутреннего и граничного символов следует, что

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E})(\gamma) = \mathrm{ch}\,\sigma(\mathcal{E}_{M^\gamma}) \cdot \mathrm{ch}(\Omega^{ev}(N^\gamma) - \Omega^{odd}(N^\gamma))(\gamma).$$

Следовательно, получаем

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E})(\gamma)\mathrm{Td}^\gamma(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}_{M^\gamma})(\gamma)\mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C}).$$

Подставляя эту формулу в равенство (2.91), мы видим, что вклад подмногообразия M^γ в формулу индекса равен

$$\begin{aligned}\langle \alpha^\gamma \left(\mathrm{ch}^M(\mathcal{E}_{M^\gamma})(\gamma)\right) \mathrm{Td}(T^*M^\gamma \otimes \mathbb{C})\,\mathrm{ch}^\gamma(P),[M^\gamma,X^\gamma]\rangle &=\\ = \langle e(TM^\gamma)\,\mathrm{ch}^\gamma(P),[M^\gamma,X^\gamma]\rangle &= \sum{}'(\chi(M^\gamma,\partial M^\gamma))\,\mathrm{ch}_0^\gamma(P),\end{aligned}$$

где через $e(TM^\gamma)$ обозначен класс Эйлера расслоения TM^γ, определенный в терминах римановой метрики, а суммирование берется по компонентам связности.

Теорема 2.35 доказана. □

В качестве иллюстрации к теореме 2.35 рассмотрим следующие примеры.

Примеры. На диске $\mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1\}$ рассмотрим краевую задачу для оператора Эйлера

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} d + d^* \\ i^* \end{pmatrix} : \Omega^{ev}(\mathbb{D}^2) \longrightarrow \begin{matrix} \Omega^{odd}(\mathbb{D}^2) \\ \oplus \\ \Omega^{ev}(\mathbb{S}^1) \end{matrix} \tag{2.98}$$

и скрученную краевую задачу $\mathcal{E} \otimes 1_P$, где $P \in \mathrm{Mat}_2(C^\infty(\mathbb{D}^2) \rtimes \Gamma)$ — матричный проектор над гладким скрещенным произведением. Вычислим индекс этой задачи для групп $\Gamma = \mathbb{Z}_n$ (при различных n) и их действий по формуле

$$\mathrm{ind}(\mathcal{E} \otimes 1_P) = \sum_{\langle\gamma\rangle \subset \Gamma} \chi(M^\gamma, \partial M^\gamma) \sum_{\gamma' \in \langle\gamma\rangle} \mathrm{tr} P(\gamma'),$$

где

$$P = \frac{1}{n}(1 + T + ... + T^{n-1}),$$

T — оператор сдвига, отвечающий действию образующей группы Γ.

1. Пусть группа $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ действует на диске $\mathbb{D}^2$ поворотами на угол π вокруг центра диска. Поворот осуществляется оператором сдвига T по формуле

$$Tu(x,y) = u(-x, -y),$$

а проектор равен $P = \frac{1}{2}(1 + T)$. При $\gamma = 0$ имеем $M^\gamma = \mathbb{D}^2$, $\partial M^\gamma = \mathbb{S}^1$, $\chi(\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1) = 1$. При $\gamma = 1$ подмногообразием неподвижных точек является центр диска pt, $\chi(\mathrm{pt}) = 1$. Вычислим индекс:

$$\mathrm{ind}(\mathcal{E} \otimes 1_P) = \mathrm{tr} P(0) + \mathrm{tr} P(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2. Пусть группа $\Gamma = \mathbb{Z}_4$ действует на диске $\mathbb{D}^2$ поворотами на углы $\pi/2$ вокруг центра диска. Оператор сдвига равен

$$T^k u(x,y) = u\left(x \cos\frac{k\pi}{2} + y \sin\frac{k\pi}{2}, -x\cos\frac{k\pi}{2} + y \sin\frac{k\pi}{2}\right),$$

а проектор равен $P = \frac{1}{4}(1 + T + T^2 + T^3)$. При $\gamma = 0$ имеем $M^\gamma = \mathbb{D}^2$, $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$, $\chi(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1) = 1$. При $\gamma \neq 0$ неподвижной точкой является центр диска pt, $\chi(\mathrm{pt}) = 1$. Вычислим индекс

$$\mathrm{ind}(\mathcal{E} \otimes 1_P) = \sum_{\gamma=0}^{3} \mathrm{tr} P(\gamma) = \mathrm{tr} P(0) + \mathrm{tr} P(1) + \mathrm{tr} P(2) + \mathrm{tr} P(3) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

3. Пусть группа $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ действует на диске $\mathbb{D}^2$ отражениями относительно горизонтальной оси. Оператором сдвига T равен

$$Tu(x,y) = u(x,-y),$$

а проектор равен $P = \frac{1}{2}(1+T)$. При $\gamma = 0$ имеем $M^\gamma = \mathbb{D}^2$, $\partial M^\gamma = \mathbb{S}^1$, $\chi(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1) = 1$. При $\gamma = 1$ имеем M^γ — диаметр $\{[-1,1],0\}$, а $\chi(M^\gamma,\partial M^\gamma) = -1$. Вычислим индекс

$$\operatorname{ind}(\mathcal{E}\otimes 1_P) = \operatorname{tr}P(0) + \operatorname{tr}P(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Действие группы на диске $\mathbb{D}^2$	Индекс
$\mathbb{Z}_2$ поворот на угол π вокруг центра диска	1
$\mathbb{Z}_4$ поворот на угол $\pi/2$ вокруг центра диска	1
$\mathbb{Z}_2$ отражение относительно горизонтальной оси	0

Глава 3. Неизометрическое действие группы

Настоящая глава посвящена краевым задачам, ассоциированным с неизометрическим действием дискретной группы. В §3.1 рассматриваются нелокальные краевые задачи для дифференциальных операторов со сдвигами. Для таких операторов вычислены траекторные символы и найдены условия эллиптичности. Показана фредгольмовость эллиптических операторов. В §3.2 строятся периодические циклические коциклы на алгебре символов Буте де Монвеля, ассоциированной с действием группы. Полученные коциклы позволяют построить топологический индекс операторов Буте де Монвеля. В §3.3 рассматривается пример нелокальной краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра. Для такой задачи вычислены траекторные символы и найдены условия эллиптичности.

3.1 Фредгольмовость краевых задач

В данном параграфе рассмотрены нелокальные краевые задачи для дифференциальных операторов со сдвигами. Формулируются условия их эллиптичности и показано, что нелокальные эллиптические операторы являются фредгольмовыми в соответствующих пространствах Соболева. Результаты такого типа хорошо известны в литературе (см. [27; 28]). Здесь мы приведем формулировку в случае, когда действие группы не сохраняет переменную, нормальную к краю многообразия (эти результаты опубликованы в статье [36] и существенно опираются на методы из работ [27; 31]).

3.1.1 Постановка задачи

Пусть M — гладкое компактное подмногообразие с краем ∂M, Γ — дискретная конечнопорожденная группа диффеоморфизмов $\boldsymbol{\gamma} : M \to M$, сохраняющих край $\boldsymbol{\gamma}(\partial M) = \partial M$. Рассмотрим оператор сдвига на M

$$T_\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \qquad T_\gamma u(x) = u(\boldsymbol{\gamma}^{-1}x).$$

Напомним, что через $\Psi_B(M)$ обозначается алгебра псевдодифференциальных задач нулевых порядка и типа на M. Действие группы Γ на паре $(M,\partial M)$ индуцирует действие автоморфизмами алгебры $\Psi_B(M)$.

Пусть $\Psi_B^{m,d}(M)$ — пространство операторов Буте де Монвеля порядка $m \in \mathbb{Z}$ и типа $d \in \mathbb{Z}_+$ на M.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{D}_\gamma \mathcal{T}_\gamma : \mathcal{H}^s(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-m}(M), \tag{3.1}$$

где $\mathcal{H}^s(M) = H^s(M) \oplus H^s(\partial M)$, $\mathcal{D}_\gamma \in \Psi_B^{m,d}(M)$, $\mathcal{T}_\gamma$ — оператор сдвига

$$\mathcal{T}_\gamma(u(x),v(x')) = (\gamma^{*-1}u(x), \gamma^{*-1}v(x')).$$

3.1.2 Внутренний траекторный символ

Фиксируем точку $(x,\xi) \in T_0^*M$. Для произвольного элемента $\gamma \in \Gamma$ через $\partial\gamma : T^*M \to T^*M$ обозначим кодифференциал $\partial\gamma = (d\gamma^t)^{-1}$ диффеоморфизма $\gamma : M \to M$. Пусть на многообразии M выбрана риманова метрика, vol_M — риманова форма объема, Δ — оператор Лапласа.

Определим следующие объекты:

- вес $\mu_s : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}_+$, определяемый формулой

$$\mu_s(\gamma) = \left[\frac{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta))^s\right](x,\xi); \tag{3.2}$$

- весовое пространство ℓ^2 на группе Γ:

$$\ell^2(\Gamma,s) = \left\{ \{w(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \,\middle|\, w(\gamma) \in \mathbb{C} \text{ при всех } \gamma \in \Gamma \text{ и } \sum_\gamma |w(\gamma)|^2\mu_s(\gamma) < \infty \right\}.$$

Определение 3.1. *Внутренний траекторный символ* оператора (3.1) определяется как оператор

$$\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x,\xi) : \ell^2(\Gamma, s) \longrightarrow \ell^2(\Gamma, s-m), \tag{3.3}$$

причем для оператора сдвига мы полагаем

$$(\sigma_{\mathrm{int}}(T_{\gamma_1})w)(\gamma) = w(\gamma\gamma_1),$$

а для оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}' \in \Psi_B^{m,d}(M)$ полагаем

$$(\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}')w)(\gamma) = \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}')(\partial\gamma^{-1}(x,\xi))w(\gamma).$$

3.1.3 Граничный траекторный символ

Фиксируем точку $(x',\xi') \in T_0^*\partial M$. Вложение касательных пространств $T_{x'}\partial M \subset T_{x'}M$ индуцирует проекцию кокасательных пространств

$$p : T_{x'}^*M \longrightarrow T_{x'}^*\partial M.$$

Слой этой проекции $p^{-1}(x',\xi')$ над точкой (x',ξ') является прямой. Снабдим эти прямые ориентацией, непрерывно зависящей от (x',ξ') так, что для прямой $p^{-1}(x',0)$ положительным ковектором $\xi \in p^{-1}(x',0)$ будет тот, для которого $\xi(v) > 0$ для любого касательного вектора $v \in T_{x'}M$, направленного внутрь многообразия M. Через $\mathrm{vol}_{x',\xi'}$ обозначим форму объема на прямой $p^{-1}(x',\xi') \subset T_{x'}^*M$, определяемую как форма объема сужения метрики на $T_{x'}^*M$ на эту прямую.

Через $H_\pm(x',\xi') \subset C^\infty(p^{-1}(x',\xi'))$ обозначим пространства $H_\pm$ на ориентированной прямой $p^{-1}(x',\xi')$. Через $H_\pm^s(x',\xi')$, $s \in \mathbb{Z}$, обозначим пополнение пространства $H_\pm$ по норме

$$\|u\|_{H_\pm^s}^2 = \int\limits_{p^{-1}(x',\xi')} |\Pi_\pm \ell_\pm^s u|^2 \mathrm{vol}_{x',\xi'},$$

где $\ell_\pm : T_0^*M \longrightarrow \mathbb{C}$ — эллиптические символы первого порядка, которые в окрестности края многообразия M равны $\ell_\pm(x',x_n,\xi',\xi_n) = \mp i\xi_n + |\xi'|$, $\Pi_\pm$ — проекторы на $H_\pm(x',\xi')$.

Теперь фиксируем элемент $\gamma \in \Gamma$. Тогда $\gamma^{-1}(x') \in \partial M$, а кодифференциал $\partial\gamma$ индуцирует аффинный изоморфизм прямых

$$\partial\gamma : p^{-1}(\partial\gamma^{-1}(x',\xi')) \longrightarrow p^{-1}(x',\xi'). \tag{3.4}$$

Определим пространство

$$\mathcal{E}^s = H_+^s(x',\xi') \oplus \mathbb{C}$$

и через $\ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^s)$ обозначим пространство функций $w(\gamma)$ на группе Γ со значениями в пространстве $\mathcal{E}^s$, для которых сходится ряд

$$\sum_\gamma \|w(\gamma)\|_{s,\gamma}^2.$$

Здесь $\|\cdot\|_{s,\gamma}$ — норма в пространстве $\mathcal{E}^s$, которая для пары $(w,z)\in H^s_+(x',\xi')\oplus\mathbb{C}$ задается формулой

$$\|(w,z)\|^2_{s,\gamma}=$$
$$=\|\Pi_+\partial\gamma^{*-1}\ell^s_+w\|^2_{L^2}\frac{\partial\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}+|z|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_\partial)^s)\left(\frac{\partial\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_{\partial M}}{\mathrm{vol}_{\partial M}}\right),\quad(3.5)$$

где vol_M и $\mathrm{vol}_{\partial M}$ — формы объема, определяемые метриками на M и ∂M, соответственно, а Δ_∂ — оператор Лапласа на подмногообразии ∂M.

Определение 3.2. *Граничный траекторный символ* оператора $\mathcal{D}$ (см. (3.1)) порядка m в точке $(x',\xi')\in T^*_0\partial M$ определяется как оператор

$$\sigma_\partial(\mathcal{D})(x',\xi'):\ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^s)\longrightarrow\ell^2(\Gamma,\mathcal{E}^{s-m}),\qquad(3.6)$$

причем символ оператора сдвига определяется формулой

$$(\sigma_\partial(T_{\gamma_1})w)(\gamma)=w(\gamma\gamma_1),$$

а символ оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}'$ определяется формулой

$$(\sigma_\partial(\mathcal{D}')(x',\xi')w)(\gamma)=\partial\gamma^{*-1}\sigma_\partial(\mathcal{D}')(\partial\gamma^{-1}(x',\xi'))\partial\gamma^*w(\gamma).$$

3.1.4 Теорема о фредгольмовости

Определение 3.3. Краевая задача $\mathcal{D}$ (см. (3.1)) называется *эллиптической*, если выполнены два условия:

1) внутренний символ $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x,\xi)$ (см. (3.3)) обратим для любых $(x,\xi)\in T^*_0M$;
2) граничный символ $\sigma_\partial(\mathcal{D})(x',\xi')$ (см. (3.6)) обратим для любых $(x',\xi')\in T^*_0\partial M$.

Рассмотрим C^*-алгебру $\overline{\Psi(M)}/\mathcal{K}$, где через $\overline{\Psi(M)}\subset\mathcal{B}(L^2(M)\oplus L^2(\partial M))$ обозначено замыкание по операторной норме алгебры $\Psi_B(M)$, а $\mathcal{K}$ — идеал компактных операторов. Обозначим через $S^\vee M$ пространство

$$S^\vee M=S^*M/\sim,$$

где мы отождествляем точки $(x',0,0,\xi_n)$ и $(x',0,0,-\xi_n)$, и рассмотрим объединение $S^\vee M\sqcup S^*\partial M$ непересекающихся множеств. Наделим это объединение следующей топологией: замыкание $\mathrm{cl}(U\sqcup V)$ множества

$$U\sqcup V\subset S^\vee M\sqcup S^*\partial M,\ \text{где}\ U\subset S^\vee M, V\subset S^*\partial M,$$

равно множеству

$$\mathrm{cl}(U\sqcup V)=(\overline{U}\cup\overline{V_M})\sqcup\overline{V},$$

где через $\overline{U}$ и $\overline{V}$ обозначены замыкания в подмножествах $S^\vee M$ и $S^*\partial M$, соответственно, и

$$V_M=\left\{(x',0,(\cos\varphi)\xi',(\sin\varphi)\xi_n)\in S^\vee M\;\middle|\;(x',\xi')\in V,\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Отметим, что это пространство не является хаусдорфовым. Построенное пространство обозначим через Σ.

В [27] доказано, что пространство примитивных идеалов алгебры $\overline{\Psi(M)}/\mathcal{K}$ гомеоморфно множеству Σ.

Определение 3.4. Напомним, что действие дискретной группы Γ на топологическом пространстве X называется *топологически свободным*, если для любого конечного набора $\gamma_1,\ldots,\gamma_N\in\Gamma\setminus\{e\}$ объединение соответствующих множеств неподвижных точек $X^{\gamma_1}\cup\ldots\cup X^{\gamma_N}$ не содержит в себе ни одного открытого множества.

Для того, чтобы сформировать основной результат, дадим следующее условие:

Условие 3.5. *Группа Γ аменабельна, а ее действие на пространстве примитивных идеалов Σ является топологически свободным.*

Теорема 3.6. *Пусть выполнено условие 3.5. Тогда краевая задача* (3.1) *фредгольмова тогда и только тогда, когда она эллиптична.*

Доказательство. Сначала сведем задачу (3.1) к задаче для оператора нулевого порядка, действующего в пространствах L^2. Для этого воспользуемся оператором редукции порядка (ср., напр., с [13, §3.1.2.1])

$$\Lambda: C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M),\quad \mathrm{ord}\Lambda=1, \tag{3.7}$$

который задается как

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_M & 0 \\ 0 & \Lambda_{\partial M} \end{pmatrix}$$

где $\Lambda_M, \Lambda_{\partial M}$ — неотрицательные эллиптические ПДО порядка 1 на M и ∂M, соответственно. Оператор (3.7) таков, что оператор $\mathcal{D}$ фредгольмов или не фредгольмов одновременно с оператором

$$\mathcal{D}_0 = \Lambda^{s-m}\mathcal{D}\Lambda^{-s} : \mathcal{H}^0(M) \longrightarrow \mathcal{H}^0(M).$$

Последний оператор является оператором вида (3.1). Из результатов работы [31] следует, что оператор $\mathcal{D}_0$ фредгольмов тогда и только тогда, когда он эллиптичен, т.е. его внутренний и граничный траекторные символы обратимы в смысле цитированной работы (теоремы из цитированной работы применимы в силу выполнения условия 3.5). При этом внутренний траекторный символ оператора $\mathcal{D}_0$ в смысле цитированной работы, обозначаемый через $\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_0)$, равен

$$\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_0) = \sigma'_{\mathrm{int}}(\Lambda^{s-m})\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\sigma'_{\mathrm{int}}(\Lambda^{-s}) : \ell^2(\Gamma,0) \longrightarrow \ell^2(\Gamma,0).$$

Оператор $\mathcal{D}$ запишем в виде

$$\mathcal{D} = \sum_{\gamma_1} \mathcal{D}_{\gamma_1}\mathcal{T}_{\gamma_1},$$

где $\mathcal{D}_{\gamma_1} \in \Psi^{0,0}_{\mathrm{BdM}}(M)$. Его внутренний символ в смысле работы [31] равен

$$\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = \sum_{\gamma_1} \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_{\gamma_1})\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{T}_{\gamma_1}).$$

Вычислим внутренний символ оператора сдвига $\mathcal{T}_{\gamma_1}$. Для этого запишем оператор $\mathcal{T}_{\gamma_1}$ в виде

$$\mathcal{T}_{\gamma_1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mathrm{vol}_M}{\gamma_1^{*-1}\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\mathrm{vol}_{\partial M}}{\gamma_1^{*-1}\mathrm{vol}_{\partial M}}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{T}}_{\gamma_1},$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_{\gamma_1}$ — унитарный оператор в $H^0(M)$. Тогда внутренний символ равен

$$\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{T}_{\gamma_1}) = \sigma_{\mathrm{int}}\left(\left(\frac{\mathrm{vol}_M}{\gamma_1^{*-1}\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2}\right)\sigma(\mathcal{T}_{\gamma_1}).$$

Наконец, вычислим внутренний символ оператора $\mathcal{D}_0$

$$\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_0) = \sigma'_{\mathrm{int}}(\Lambda^{s-m}\mathcal{D}\Lambda^{-s}) =$$
$$= \sum_{\gamma_1} \left(\frac{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2} \sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{s-m})\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_{\gamma_1}T_{\gamma_1})\sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{-s}) \left(\frac{\mathrm{vol}_M}{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\frac{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2} \sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{s-m})\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{-s}) \left(\frac{\mathrm{vol}_M}{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\Gamma,0) \arrow[r, "\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_0)"] \arrow[d, "\sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{-s})\left(\frac{\mathrm{vol}_M}{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2}"'] & \ell^2(\Gamma,0) \\
\ell^2(\Gamma,s) \arrow[r, "\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})"'] & \ell^2(\Gamma,s-m). \arrow[u, "\sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{s-m})\left(\frac{\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M}\right)^{1/2}"']
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Из эллиптичности внутренних символов $\sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{s-m}), \sigma_{\mathrm{int}}(\Lambda^{-s})$ следует, что вертикальные отображения в (3.8) являются обратимыми операторами. Следовательно, получаем искомую эквивалентность обратимости символов $\sigma'_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}_0)$ и $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})$.

Для граничных символов доказательство аналогично. Теорема доказана.

□

3.2 Топологический индекс в циклических когомологиях

В данном параграфе применяется аппарат циклических когомологий для получения формулы индекса нелокальных краевых задач. Определяются периодические циклические коциклы на алгебре символов операторов Буте де Монвеля и строится класс в периодических циклических когомологиях этой алгебры. С его помощью возможно определить топологический индекс нелокальных краевых задач с операторами сдвига. Результаты данного параграфа опубликованы в статье [35].

3.2.1 Периодические циклические когомологии

Напомним определение периодических циклических когомологий унитальной алгебры $\mathcal{A}$ в терминах операторов (b,B) (см. [38; 43]). Обозначим через $C^n(\mathcal{A}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n+1},\mathbb{C})$ пространство $(n+1)$-линейных функционалов $\varphi(a_0,...,a_n)$, где $a_0,...,a_n \in \mathcal{A}$. Такие функционалы называются *n-коцепями*. Рассмотрим следующие операторы:

- $B_0 : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n-1}(\mathcal{A})$,

$$(B_0\varphi)(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \varphi(1,a_0,\ldots,a_{n-1}) - (-1)^n\varphi(a_0,\ldots,a_{n-1},1);$$

- $N : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^n(\mathcal{A})$,

$$N\varphi(a_0,\ldots,a_n) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{nj}\varphi(a_j,\ldots,a_{j-1});$$

- дифференциал Конна $B : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n-1}(\mathcal{A}), B = NB_0$;
- дифференциал Хохшильда $b : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{A})$,

$$(b\varphi)(a_0,\ldots,a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi(a_0,\ldots,a_ia_{i+1},\ldots,a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1}\varphi(a_{n+1}a_0,\ldots,a_n);$$

- $b' : C^n(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{A})$,

$$(b'\varphi)(a_0,\ldots,a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi(a_0,\ldots,a_ia_{i+1},\ldots,a_{n+1}),$$

  при этом $bN = Nb'$.

Из соотношений $b^2 = 0, B^2 = 0, bB + Bb = 0$ следует, что определен следующий периодический комплекс:

$$\ldots \xrightarrow{B+b} C^{ev}(\mathcal{A}) \xrightarrow{B+b} C^{odd}(\mathcal{A}) \xrightarrow{B+b} C^{ev}(\mathcal{A}) \xrightarrow{B+b} \ldots, \tag{3.9}$$

где $C^{ev}(\mathcal{A}) = \bigoplus\limits_k C^{2k}(\mathcal{A})$, $C^{odd}(\mathcal{A}) = \bigoplus\limits_k C^{2k+1}(\mathcal{A})$.

Определение 3.7. *Периодическими циклическими когомологиями* алгебры $\mathcal{A}$ называются когомологии комплекса (3.9), обозначаемые через

$$HP^*(\mathcal{A}) = H^*(C^{ev/odd}(\mathcal{A}),B+b).$$

Таким образом, элементы HP^{odd} — это классы когомологий последовательностей

$$(\varphi_1,\varphi_3,\ldots,\varphi_{2n-1},0,\ldots),$$

для которых выполнены равенства

$$B\varphi_1 = 0, \quad b\varphi_1 + B\varphi_3 = 0, \quad b\varphi_3 + B\varphi_5 = 0, \quad \ldots, \quad b\varphi_{2n-1} = 0.$$

3.2.2 Эквивариантные циклические коциклы

Рассмотрим пространство $M = \mathbb{R}^n_+$ с координатами (x',x_n) и краем $X = \mathbb{R}^{n-1}$, определяемым уравнением $x_n = 0$. Будем рассматривать алгебру $\mathcal{A}$ символов Буте де Монвеля нулевых порядка и типа на M. Здесь элементы алгебры $\mathcal{A}$ — это пары

$$\widetilde{a} = (a,a_X) \in \mathcal{O}(T^*_0 M) \oplus \mathcal{O}(T^*_0 X,\mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})), \tag{3.10}$$

где a и a_X — внутренний и граничный символы, а через $\mathcal{O}$ обозначены пространства символов. Внутренний символ a — гладкая однородная функция нулевой степени однородности на кокасательном расслоении $T^*_0 M$ без нулевого сечения, удовлетворяющая свойству трансмиссии. Граничный символ $a_X(x',\xi')$ является скрученно однородным при $\xi' \neq 0$ (см. параграф 1.1, определение 1.6). Будем предполагать, что пары символов (3.10) являются скалярами на бесконечности.

Пусть $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ — дискретная конечнопорожденная группа диффеоморфизмов $\gamma : M \longrightarrow M$, сохраняющих край: $\gamma(X) = X$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Рассмотрим действие группы Γ на элементах $\widetilde{a} = (a,a_X)$ алгебры $\mathcal{A}$. Действие группы Γ на внутренних символах определяется как

$$a \longmapsto (\partial\gamma)^{*-1}a, \text{ где } \partial\gamma : T^*M \longrightarrow T^*M, \quad \partial\gamma(x,\xi) = \big(\gamma(x),\big((\frac{\partial\gamma}{\partial x})^t\big)^{-1}\xi\big), \tag{3.11}$$

— кодифференциал диффеоморфизма γ. В свою очередь, действие группы Γ на граничных символах дается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(T^*_0 X,\mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})) &\longrightarrow \mathcal{O}(T^*_0 X,\mathcal{B}(H_+ \oplus \mathbb{C})), \\ a_X(x',\xi') &\longmapsto \varkappa_{\lambda,\mu} a_X(\partial\gamma^{-1}(x',\xi'))\varkappa^{-1}_{\lambda,\mu}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mu \in \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\lambda = \lambda(x') = \frac{\partial\gamma_n}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0}, \quad \mu = \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=0}\right)\eta',$$

а через $\varkappa_{\lambda,\mu}$ обозначено представление аффинной группы $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \varkappa_{\lambda,\mu} : H_+ \oplus \mathbb{C} &\longrightarrow H_+ \oplus \mathbb{C}, \\ (u(\xi_n),v) &\longmapsto (\lambda^{1/2}u(\lambda\xi_n + \mu),v), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,\mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для краткости будем обозначать действие (3.11), (3.12) группы Γ на алгебре $\mathcal{A}$ через

$$(a,a_X) \longmapsto \gamma(a,a_X). \tag{3.13}$$

Наконец, определим алгебраическое скрещенное произведение $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$, отвечающее действию (3.13) группы Γ на алгебре $\mathcal{A}$.

Зададим $d : \Omega^*(S^*M) \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega^{*+1}(S^*M) \rtimes \Gamma$ — внешний дифференциал на косферическом расслоении многообразия M. Пусть $\Omega^*(S^*X)$ — пространство 2×2-матричных дифференциальных форм. Определим $d' : \Omega^*(S^*X) \rtimes \Gamma \longrightarrow \Omega^{*+1}(S^*X) \rtimes \Gamma$ — внешний дифференциал на косферическом расслоении края S^*X; Определим пару коцепей $(\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1}) \in C^{odd}(\mathcal{A} \rtimes \Gamma)$:

$$\varphi_{2n-1}(a_0, \ldots, a_{2n-1}) = \int\limits_{S^*M} (a_0 da_1 \ldots da_{2n-1})(e), \tag{3.14}$$

$$\varphi_{2n-3}(a_0, \ldots, a_{2n-3}) = \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}' \sum_{j=0}^{2n-3} (-1)^j (a_j d'a_{j+1} \ldots d'a_{j-1})(e) = \tag{3.15}$$

$$= N\varphi'_{2n-3}(a_0, \ldots, a_{2n-3}),$$

$$\text{где } \varphi'_{2n-3}(a_0, \ldots, a_{2n-3}) = \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'(a_0 d'a_1 \ldots d'a_{2n-3})(e), \tag{3.16}$$

Поясним обозначения в этих формулах:

- $a(e)$ — значение элемента скрещенного произведения $\mathcal{A} \rtimes \Gamma$ в элементе $\gamma = e$;
- в формуле (3.14) мы интегрируем выражение, определяемое внутренними символами;
- в формулах (3.15) и (3.16) мы имеем дело с граничными символами a_{jX} и для краткости обозначаем их через a_j, а tr' — это регуляризованный след (1.13).

Теперь дадим аналог формулы для регуляризованного следа коммутатора (см. (1.14)). Обозначим через Ω_X дифференциальную градуированную алгебру, порожденную граничными символами и дифференциальными формами на S^*X. Более точно, это пространство определяется как пространство всех матриц (1.6), где функции $a|_{\partial T^*M}, b, c, g, q$ принимают значения в пространстве внешних форм на S^*X.

Предложение 3.8. *Для любых форм $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_X \rtimes \Gamma$ справедлива формула*

$$\int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2](e) = -i \int\limits_{S^*X} \Pi' \left(d\omega_1\omega_2\right)(e), \tag{3.17}$$

где $[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2] = \widetilde{\omega}_1\widetilde{\omega}_2 - (-1)^{deg\widetilde{\omega}_1 deg\widetilde{\omega}_2}\widetilde{\omega}_2\widetilde{\omega}_1$ *— суперкоммутатор, а* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(T_0^*X)$ *— главные символы форм* $\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2$ *на* $S^*X \times \mathbb{R}_{\xi_n}$.

Доказательство. Для доказательства данного предложения рассмотрим формы вида $\widetilde{\omega}_1 = a_1\delta_\gamma, \widetilde{\omega}_2 = a_2\delta_{\gamma^{-1}}$, где δ_γ — дельта-функция на Γ с носителем в точке $\gamma \in \Gamma$.

1. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda = 1, \mu = 0$ в (3.12). С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2](e) &= \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}' \left(a_1\partial\gamma^{*-1}(a_2) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} a_2\partial\gamma^*(a_1)\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \partial\gamma^* \left(\mathrm{tr}' \left(a_1\partial\gamma^{*-1}(a_2)\right)\right) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}' \left(a_2\partial\gamma^*(a_1)\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}' \left(\partial\gamma^*(a_1)a_2 - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} a_2\partial\gamma^*(a_1)\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'[\partial\gamma^*(a_1),a_2] = -i \int\limits_{S^*X} \Pi' \frac{\partial}{\partial\xi_n} \left(\partial\gamma^* a_1\right) a_2,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где мы воспользовались формулой (1.14) для следа коммутатора. С другой стороны, интеграл в правой части равенства (3.17) равен

$$\int\limits_{S^*X} \Pi' \left(d\omega_1\omega_2\right)(e) = \int\limits_{S^*X} \Pi' \frac{\partial a_1}{\partial\xi_n}\partial\gamma^{*-1}(a_2) = \int\limits_{S^*X} \Pi' \left(\frac{\partial}{\partial\xi_n} \left(\partial\gamma^* a_1\right)\right) a_2. \tag{3.19}$$

Теперь из выражений (3.18) и (3.19) следует равенство (3.17).

2. Рассмотрим случай, когда $\gamma = \mathrm{Id}$ над X. Левая часть в формуле (3.17) равна

$$\int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2](e) = \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}' \left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}a_2\varkappa_{\lambda,\mu} - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} a_2\varkappa_{\lambda,\mu}a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\right). \tag{3.20}$$

Для доказательства этой части предложения воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.9. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{tr}'(\varkappa_{\lambda,\mu}a\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}) = \mathrm{tr}'a, \quad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Доказательство. Отметим, что когда мы ищем регуляризованный след tr' граничного символа, достаточно сравнить только операторы Грина в верхних левых блоках матриц (1.6). Имеем

$$\mathrm{tr}'(\varkappa_{\lambda,\mu} a \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}) = \lambda \Pi'_\eta g(\lambda\eta+\mu,\lambda\eta+\mu) = \Pi'_\eta g(\eta,\eta) = \mathrm{tr}' a,$$

где мы использовали трансляционную инвариантность функционала Π'. $\square$

Теперь вернемся к доказательству пункта 2 предложения 3.8. Применяя лемму 3.9 к первому слагаемому в (3.20), получим

$$\begin{aligned}
&\int_{S^*X} \mathrm{tr}'\left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}a_2\varkappa_{\lambda,\mu} - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} a_2 \varkappa_{\lambda,\mu} a_1 \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\right) = \\
&= \int_{S^*X} \mathrm{tr}'\left(\varkappa_{\lambda,\mu} a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}a_2 - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} a_2 \varkappa_{\lambda,\mu} a_1 \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\right) = \\
&= \int_{S^*X} \mathrm{tr}'\left[\varkappa_{\lambda,\mu} a_1 \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}, a_2\right] = -i\int_{S^*X} \Pi'\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}(\varkappa_{\lambda,\mu} a_1 \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}) a_2\right) = \qquad (3.21)\\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{S^*X}\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi_n} a_1(\lambda\xi_n+\mu)a_2(\xi_n)d\xi_n = -\frac{i}{2\pi}\int_{S^*X}\int_{\mathbb{R}} a_1'(\lambda\xi_n+\mu)a_2(\xi_n)\lambda d\xi_n = \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{S^*X}\int_{\mathbb{R}} a_1'(\eta)a_2((\eta-\mu)/\lambda)d\eta = -i\int_{S^*X}\Pi'(d\omega_1\omega_2)(e).
\end{aligned}$$

Равенства (3.20) и (3.21) дают нам искомую формулу (3.17) в рассматриваемом случае.

3. Теперь докажем формулу (3.17) в общем случае. С одной стороны, имеем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'[\widetilde{\omega}_1,\widetilde{\omega}_2](e) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2\partial\gamma^*(\varkappa_{\lambda,\mu})) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2} a_2\partial\gamma^*(\varkappa_{\lambda,\mu}(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}))\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2\partial\gamma^*(\varkappa_{\lambda,\mu}))\right) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2}\int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(a_2\partial\gamma^*(\varkappa_{\lambda,\mu}a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1})\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2\partial\gamma^*(\varkappa_{\lambda,\mu}))\right) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2}\int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}\right) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2}\int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}\right) - (-1)^{\deg a_1 \deg a_2}\int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left(\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}a_1\right) = \\
&= \int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left[a_1, \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}\right].
\end{aligned}
$$

Здесь в третьем равенстве мы воспользовались заменой переменных во втором интеграле, а в пятом равенстве применили лемму 3.9. Тогда согласно формуле (1.14) получаем

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{S^*X} \operatorname{tr}'\left[a_1, \varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}\right] &= -i\int\limits_{S^*X} \Pi'\left(\frac{\partial a_1}{\partial\xi_n}\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}\right) = \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int\limits_{S^*X}\int\limits_{\mathbb{R}_{\xi_n}} \frac{\partial a_1}{\partial\xi_n}\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}d\xi_n. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

С другой стороны, правая часть в формуле (3.17) равна

$$
\begin{aligned}
-i\int\limits_{S^*X} \Pi'\left(d\omega_1\omega_2\right)(e) &= -i\int\limits_{S^*X} \Pi'\frac{\partial}{\partial\xi_n}(a_1\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1})\partial\gamma^{*-1}(a_2\partial\gamma^*\varkappa_{\lambda,\mu}) = \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int\limits_{S^*X}\int\limits_{\mathbb{R}_{\xi_n}} \frac{\partial a_1}{\partial\xi_n}\varkappa_{\lambda,\mu}^{-1}\partial\gamma^{*-1}(a_2)\varkappa_{\lambda,\mu}d\xi_n. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Тогда из формул (3.22) и (3.23) получаем искомую формулу (3.17). □

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа.

Теорема 3.10. *Пара* $(k\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1})$, *где* $k = 2\pi i(2n-1)/(2n-2)$, *определяет класс в периодических циклических когомологиях* $HP^{odd}(\mathcal{A}\rtimes\Gamma)$. *Это означает, что справедливы следующие равенства:*

$$B\varphi_{2n-3} = 0; \qquad k b\varphi_{2n-3} + B\varphi_{2n-1} = 0; \qquad b\varphi_{2n-1} = 0. \tag{3.24}$$

Доказательство. 1. Докажем сначала первое равенство в формуле (3.24). Из равенства (3.15) и формулы для оператора B_0, учитывая $d'1 = 0$, получим

$$(B_0\varphi_{2n-3})(a_0, \ldots, a_{2n-4}) = \varphi_{2n-3}(1, a_0, \ldots, a_{2n-4}) + \varphi_{2n-3}(a_0, \ldots, a_{2n-4}, 1) =$$
$$= \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'(d'a_0 d'a_1 \ldots d'a_{2n-4})(e) - \int\limits_{S^*X} \mathrm{tr}'(d'a_0 d'a_1 \ldots d'a_{2n-4})(e) = 0.$$

2. Теперь докажем, что $b\varphi_{2n-1} = 0$. По определению дифференциала Хохшильда b имеем

$$(b\varphi_{2n-1})(a_0, \ldots, a_{2n}) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \int\limits_{S^*M} (a_0 da_1 \ldots d(a_i a_{i+1}) \ldots da_{2n+1})(e) +$$
$$+ (-1)^{2n+1} \varphi_{2n-1}(a_{2n+1} a_0 da_1 \ldots da_{2n})(e) =$$
$$= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \int\limits_{S^*M} (a_0 da_1 \ldots da_i a_{i+1} \ldots da_{2n+1} + a_0 da_1 \ldots a_i da_{i+1} \ldots da_{2n+1})(e) -$$
$$- \int\limits_{S^*M} (a_{2n+1} a_0 da_1 \ldots da_{2n})(e) =$$
$$= \int\limits_{S^*M} (a_0 da_1 \ldots da_{2n} a_{2n+1})(e) - \int\limits_{S^*M} (a_{2n+1} a_0 da_1 \ldots da_{2n})(e) = 0.$$

Здесь второе равенство следует из правила Лейбница, а третье равенство верно в силу того, что знаки слагаемых чередуются и слагаемые попарно сокращаются. Четвертое равенство справедливо в силу циклического свойства.

3. Наконец, докажем второе равенство в формуле (3.24). Для этого сначала вычислим величину $B\varphi_{2n-1}$. Имеем

$$(B_0\varphi_{2n-1})(a_0, \ldots, a_{2n-2}) =$$
$$= \varphi_{2n-1}(1, a_0, \ldots, a_{2n-2}) + \varphi_{2n-1}(a_0, \ldots, a_{2n-2}, 1) = \varphi_{2n-1}(1, a_0, \ldots, a_{2n-2}).$$

Подставим полученное выражение в формулу $B = NB_0$:

$$\begin{aligned}&(B\varphi_{2n-1})(a_0,\dots,a_{2n-2}) = (NB_0\varphi_{2n-1})(a_0,\dots,a_{2n-2}) =\\ &= (2n-1)\int\limits_{S^*M}(da_0da_1\dots da_{2n-2})(e) = (2n-1)\int\limits_{\partial(S^*M)}(da_0da_1\dots da_{2n-3}a_{2n-2})(e).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Здесь мы воспользовались циклическим свойством дифференциальных форм и формулой Стокса (см., напр., [8, §3]). Теперь выполним следующую замену переменных в последнем интеграле в формуле (3.25):

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{n-1}_{x'}\times\mathbb{S}^{n-2}_{\xi'}\times\mathbb{R}_{\xi_n} & \longrightarrow & \partial(S^*M) = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1},\\ (x',\xi',\xi_n) & \xmapsto{f} & \left(x',\dfrac{\xi'}{\sqrt{\xi_n^2+1}},\dfrac{\xi_n}{\sqrt{\xi_n^2+1}}\right).\end{array} \tag{3.26}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n-1}(B\varphi_{2n-1})(a_0,\dots,a_{2n-2}) = \int\limits_{\partial(S^*M)}(da_0da_1\dots da_{2n-3}a_{2n-2})(e) =\\ &= \int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}} f^*((da_0da_1\dots da_{2n-3}a_{2n-2})(e)) = \int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}(da_0da_1\dots da_{2n-3}a_{2n-2})(e) =\\ &= \int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}\left(\left(d'a_0+\frac{\partial a_0}{\partial\xi_n}d\xi_n\right)\dots\left(d'a_{2n-3}+\frac{\partial a_{2n-3}}{\partial\xi_n}d\xi_n\right)a_{2n-2}\right)(e) =\\ &= \int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}\sum_{j=0}^{2n-3}\left(d'a_0\wedge\dots\wedge\frac{\partial a_j}{\partial\xi_n}d\xi_n\wedge\dots\wedge d'a_{2n-3}a_{2n-2}\right)(e).\end{aligned} \tag{3.27}$$

В третьем равенстве воспользовались заменой переменных (3.26). В четвертом равенстве мы воспользовались однородностью символов. В пятом равенстве использовали подстановку $d = d' + d\xi_n\frac{\partial}{\partial\xi_n}$. Интегралы в формуле (3.27) сходятся при $\xi_n\to\infty$, так как подынтегральные выражения обращаются в нуль на бесконечности как $|\xi_n|^{-(n-1)}$.

Теперь вычислим величину $b\varphi_{2n-3}$. Поскольку $bN = Nb'$ и $\varphi_{2n-3} = N\varphi'_{2n-3}$, то мы сначала вычислим величину

$$
\begin{gathered}
(b'\varphi'_{2n-3})(a_0,\ldots,a_{2n-2}) = \sum_{i=0}^{2n-3}(-1)^i\int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'(a_0d'a_1\ldots d'(a_ia_{i+1})\ldots d'a_{2n-2})(e) = \\
= \int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'(a_0a_1d'a_2\ldots d'a_{2n-2})(e) + \\
+\sum_{i=1}^{2n-3}(-1)^i\int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'(a_0d'a_1\ldots(d'a_ia_{i+1}+a_id'a_{i+1})\ldots d'a_{2n-2})(e) = \\
= -\int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'(a_0d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2})(e).
\end{gathered}
$$

Здесь последнее равенство справедливо в силу того, что все слагаемые в сумме, кроме предпоследнего, попарно сокращаются. Следовательно, получаем

$$
\begin{gathered}
(b\varphi_{2n-3})(a_0,\ldots,a_{2n-2}) = (Nb'\varphi'_{2n-3})(a_0,\ldots,a_{2n-2}) = \\
= -\int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'(a_0d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2} + a_1d'a_2\ldots d'a_{2n-2}a_0 + \ldots + \\
+a_{2n-2}d'a_0\ldots d'a_{2n-4}a_{2n-3})(e). \quad (3.28)
\end{gathered}
$$

Теперь преобразуем первое слагаемое в интеграле в (3.28) следующим образом

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'(a_0d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2})(e) = \\
= \int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'\big([a_0, d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2}] + d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2}a_0\big)(e) = \\
= \int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'\big([a_0, d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2}] - a_1d'a_2\ldots d'a_{2n-3}(d'a_{2n-2}a_0 + a_{2n-2}d'a_0)\big)(e) = \\
= \int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'\big([a_0, d'a_1\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2}] - a_1d'a_2\ldots d'a_{2n-3}d'a_{2n-2}a_0\big)(e) - \\
- \int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'\big(a_1d'a_2\ldots d'a_{2n-3}a_{2n-2}d'a_0\big)(e), \quad (3.29)
\end{gathered}
$$

где во втором равенстве было проведено интегрирование по частям (это возможно, так как функционал $\int\limits_{S^*X}\operatorname{tr}'$ замкнут). Второе слагаемое в (3.29) и второе слагаемое в (3.28) взаимно уничтожаются. Преобразовывая похожим образом все слагаемые в формуле (3.28), получаем следующее выражение для $b\varphi_{2n-3}$:

$$(b\varphi_{2n-3})(a_0,\dots,a_{2n-2}) = \\ = -\int\limits_{S^*X}\left(\sum_{j=0}^{2n-3}(-1)^j \mathrm{tr}'[a_j\,,\,d'a_{j+1}\dots d'a_{2n-3}a_{2n-2}d'a_0\dots d'a_{j-1}](e)\right). \quad (3.30)$$

Теперь применим предложение 3.8 к следам коммутаторов в формуле (3.30):

$$\int\limits_{S^*X}\mathrm{tr}'[a_j,d'a_{j+1}\dots d'a_{2n-3}a_{2n-2}d'a_0\dots d'a_{j-1}](e) = \\ = -i\int\limits_{S^*X}\Pi'\left(da_jd'a_{j+1}\dots a_{2n-2}\dots d'a_{j-1}\right)(e) = \\ = -\frac{i}{2\pi}\int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}\left(\left(d'a_j+\frac{\partial a_j}{\partial\xi_n}d\xi_n\right)d'a_{j+1}\dots a_{2n-2}\dots d'a_{j-1}\right)(e) = \\ = -\frac{i}{2\pi}(-1)^{2n-2-j}\int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}\left(d'a_0\wedge\dots\wedge\frac{\partial a_j}{\partial\xi_n}d\xi_n\wedge d'a_{j+1}\dots d'a_{2n-1}a_{2n-2}\right)(e). \quad (3.31)$$

Здесь мы заменили Π' на $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_{\xi_n}}$ по определению функционала Π', поскольку подынтегральное выражение принадлежит L^1. Теперь подставим формулу (3.31) в (3.30) и получим

$$(b\varphi_{2n-3})(a_0,\dots,a_{2n-2}) = \\ = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}\sum_{j=0}^{2n-3}(-1)^j\left((-1)^{-j}d'a_0\wedge\dots\wedge\frac{\partial a_j}{\partial\xi_n}d\xi_n\wedge d'a_{j+1}\dots a_{2n-2}\right)(e) = \\ = \frac{i}{2\pi}(2n-2)\int\limits_{S^*X\times\mathbb{R}_{\xi_n}}\sum_{j=0}^{2n-3}\left(d'a_0\wedge\dots\wedge\frac{\partial a_j}{\partial\xi_n}d\xi_n\wedge d'a_{j+1}\dots a_{2n-2}\right)(e). \quad (3.32)$$

Наконец, сравнив формулы (3.27) и (3.32), получим искомое второе равенство в (3.24). □

Наконец, определим топологический индекс нелокальных краевых задач, используя полученный циклический коцикл. Пусть $K_1(\mathcal{A}\rtimes\Gamma)$ — группа K_1

скрещенного произведения алгебры символов Буте де Монвеля $\mathcal{A}$ и группы Γ. Эллиптический символ $\sigma = \sigma(\mathcal{D}) \in \mathcal{A} \rtimes \Gamma$ определяет класс

$$[\sigma] \in K_1(\mathcal{A} \rtimes \Gamma). \tag{3.33}$$

Обозначим класс из теоремы 3.10 через

$$\mathrm{Todd} = [k\varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1}] \in HP^{odd}(\mathcal{A} \rtimes \Gamma), \tag{3.34}$$

где $k = 2\pi i(2n-1)/(2n-2)$, коцепи φ_{2n-1},φ_{2n-3} определены в формулах (3.14) и (3.15).

Спаривание Черна–Конна классов (3.33) и (3.34) (ср., [50, §3]) обозначается через $\langle \mathrm{Todd},[\cdot]\rangle$ и равно

$$\langle \mathrm{Todd}, [\sigma]\rangle = \frac{(-1)^{n-1}}{2(2\pi i)^{n-1}} \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}\varphi_{2n-3}(\sigma^{-1}, \sigma, \ldots)+ \\ + \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^{n}} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\varphi_{2n-1}(\sigma^{-1}, \sigma, \ldots). \tag{3.35}$$

Определение 3.11. Топологический индекс нелокальной эллиптической краевой задачи $\mathcal{D}$ с символом $\sigma = \sigma(\mathcal{D})$ определим как число

$$\mathrm{ind}_t\mathcal{D} = \langle \mathrm{Todd}, [\sigma(\mathcal{D})]\rangle. \tag{3.36}$$

Отметим, что в случае замкнутого многообразия первое слагаемое в (3.35) равно нулю и формула (3.36) эквивалентна формуле индекса Федосова (см. [22, Гл.2 §4]).

Из теоремы 3.10 и спаривания Черна–Конна получаем следствие

Следствие 3.12. *Пусть $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0,1]$ — такое гладкое семейство краевых задач, что существует гладкое семейство обратимых символов $\sigma(\mathcal{D}_\varepsilon)^{-1} \in \mathcal{A} \rtimes \Gamma$. Тогда топологический индекс $\mathrm{ind}_t\mathcal{D}_\varepsilon = \mathrm{ind}_t\mathcal{D}_0$ не зависит от ε.*

3.3 Краевые задачи со скручиваниями конечного цилиндра

В данном параграфе рассматриваются краевые задачи для дифференциальных операторов со скручиваниями конечного цилиндра. Получены условия эллиптичности. Результаты данного параграфа опубликованы в статье [7].

3.3.1 Постановка задачи

Фиксируем число $\alpha > 0$, несоизмеримое с π. Рассмотрим бесконечный цилиндр $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, на котором группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует скручиваниями перпендикулярно образующей цилиндра $(x,t) \mapsto (x + k\alpha t,t), k \in \mathbb{Z}$. Элементу $k \in \mathbb{Z}$ сопоставим диффеоморфизм

$$\gamma : M \longrightarrow M, \qquad \gamma(x,t) = (x + k\alpha t,t)$$

и оператор сдвига, отвечающий скручиваниям, формулой

$$(Tu)(x,t) = u(x - \alpha t, t).$$

На конечном цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset Y$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D \\ i^*B \end{pmatrix} : H^s(M) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N). \end{matrix} \tag{3.37}$$

Определим операторы, участвующие в краевой задаче (3.37). Во-первых,

$$D = D\left(e^{ix},t,-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t},T\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} D_l\left(e^{ix},t,-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t}\right)T^l, \quad \mathrm{ord} D = m \tag{3.38}$$

— дифференциальный оператор со сдвигами на цилиндре M, а операторы D_l в нем являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant m$ с гладкими коэффициентами. Здесь и ниже для операторов со сдвигами предполагается, что операторы $D_l \neq 0$ только для конечного числа l. Во-вторых, оператор $B = (B_0,B_1)$ в задаче (3.37) представляет собой пару операторов на левом и правом основаниях цилиндра, соответственно, причем дифференциальный оператор на левом основании

$$B_0 = B_0\left(e^{ix},-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t}\right) \text{ имеет порядок } \mathrm{ord} B_0 = b_0$$

и определяет N граничных условий, а дифференциальный оператор со сдвигами на правом основании

$$B_1 = B_1\left(e^{ix},-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t},T\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} B_{1,l}\left(e^{ix},-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t}\right)T^l, \mathrm{ord} B_1 = b_1,$$

также определяет N граничных условий, в то время, как $B_{1,l}$ — дифференциальные операторы. Положим $b=(b_0,b_1)$ и обозначим

$$H^{s-b-1/2}(\partial M,\mathbb{C}^N)=H^{s-b_0-1/2}(\partial M|_{t=0},\mathbb{C}^N)\oplus H^{s-b_1-1/2}(\partial M|_{t=1},\mathbb{C}^N).$$

Вложение $i:\partial M\hookrightarrow M$ индуцирует отображение сужения $i^*:H^s(M)\longrightarrow H^{s-1/2}(\partial M)$ функций на границу при $s>1/2$.

Замечание 3.13. Левое основание цилиндра M является неподвижным относительно скручиваний. Поэтому добавление к оператору B_0 операторов сдвига не приведет к новому классу операторов.

Цель данного параграфа — дать условия эллиптичности задачи (3.37), обеспечивающие ее фредгольмовую разрешимость в явном виде. Общая теория была построена в работах [31;36] (см. также § 3.1), в которых условие эллиптичности дается в терминах внутреннего и граничного символов оператора (3.37).

3.3.2 Скручивания цилиндра

Перед тем, как дать внутренний и граничный символы задачи (3.37), опишем действие группы $\mathbb{Z}$ скручиваниями на T^*M — кокасательном расслоении цилиндра M.

Действие группы $\mathbb{Z}$ поднимается на касательное расслоение TM при помощи дифференциала

$$d\gamma: TM\longrightarrow TM$$
$$d\gamma(x,t,\xi_1,\xi_2)=(x+k\alpha t,t,\xi_1+k\alpha\xi_2,\xi_2)$$

диффеоморфизма γ и на кокасательное расслоение T^*M при помощи кодифференциала

$$\partial\gamma=((d\gamma)^t)^{-1}:T^*M\longrightarrow T^*M$$
$$\partial\gamma(x,t,\xi_1,\xi_2)=(x+k\alpha t,t,\xi_1,\xi_2-k\alpha\xi_1).$$

Фиксируем точку $(x,t,\xi_1,\xi_2)\in T^*_0M$. Поскольку диффеоморфизм γ линеен, то $d\gamma$ и $\partial\gamma$ действуют как операторы умножения на матрицы

$$d\gamma=\begin{pmatrix}1&k\alpha&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&k\alpha\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \partial\gamma=\begin{pmatrix}1&k\alpha&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-k\alpha&1\end{pmatrix}.$$

Исследуем топологическую свободу действия группы $\mathbb{Z}$ на топологическом пространстве Σ. Для этого определим пространство Σ, следуя п. 3.1.4. Напомним определение множества

$$S^\vee M = \{(x,t,\xi_1,\xi_2) \in S^*M\}/(\{(x,0,\xi_2) = (x,0,-\xi_2)\} \cup \{(x,1,\xi_2) = (x,1,-\xi_2)\})$$

и множества

$$S^*\partial M = S^*\partial M|_{t=0} \cup S^*\partial M|_{t=1} = \{(x,0,\pm 1) \mid x \in \mathbb{S}^1\} \cup \{(x,1,\pm 1) \mid x \in \mathbb{S}^1\}.$$

Пространство Σ по определению равно

$$\Sigma = S^\vee M \sqcup S^*\partial M.$$

Зададим топологию на этом пространстве. Замыкание $\mathrm{cl}(U \sqcup V_0 \sqcup V_1)$ множества $U \sqcup V_0 \sqcup V_1 \subset S^\vee M \sqcup S^*\partial M$ равно

$$\mathrm{cl}(U \cup V_0 \cup V_1) = (\overline{U} \cup \overline{V_M}) \sqcup \overline{V_0} \sqcup \overline{V_1},\ \text{где } U \subset S^\vee M, V_j \subset S^*\partial M|_{t=j}.$$

Здесь $\overline{U}$ определяется как замыкание $\overline{U} \subset S^\vee M$ в топологии на $S^\vee M$, $\overline{V_j}$ как замыкание $\overline{V_j} \subset S^*\partial M|_{t=j}$.

Наконец, определим множество V_M как объединение множеств на различных основаниях

$$V_M = V_M^0 \sqcup V_M^1,$$

где

$$V_M^j = \left\{(x,j,\xi_1\cos\varphi, \sin\varphi) \in S^\vee M \,\middle|\, (x,\xi_1) \in V^j, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Опишем действие группы $\mathbb{Z}$ на топологическом пространстве Σ. Сначала опишем действие диффеоморфизма $\partial\gamma$, отвечающего $k \in \mathbb{Z}$, на точке $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in S^\vee M$ формулой

$$(x,t,\xi_1,\xi_2) \xmapsto{\partial\gamma} \left(x + k\alpha t, t, \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + (\xi_2 - k\alpha\xi_1)^2}}, \frac{\xi_2 - k\alpha\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + (\xi_2 - k\alpha\xi_1)^2}}\right).$$

На множестве $S^*\partial M|_{t=0}$ группа действует как тождественное отображение

$$(x,0,\pm 1) \xmapsto{\partial\gamma} (x,0,\pm 1).$$

В свою очередь, на множестве $S^*\partial M|_{t=1}$ имеем действие диффеоморфизма $\partial\gamma$

$$(x,1,\pm 1) \xmapsto{\partial\gamma} (x + k\alpha, 1, \pm 1).$$

Теперь вычислим множество неподвижных точек диффеоморфизма $\partial\gamma$ на Σ. Для этого рассмотрим три случая:

1. Сначала возьмем точку $m = (x,t,\xi_1,\xi_2) \in S^\vee M$. Равенство $\partial\gamma(m) = m$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x = x + k\alpha t \bmod 2\pi \\ \xi_1 = \dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + (\xi_2 - k\alpha\xi_1)^2}} \\ \xi_2 = \dfrac{\xi_2 - k\alpha\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + (\xi_2 - k\alpha\xi_1)^2}}. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим множество неподвижных точек

$$\Sigma_0^\gamma = \left\{ \left(x, \frac{2\pi m}{k\alpha}, 0, \pm 1 \right) \middle| x \in \mathbb{S}^1, m \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \frac{2\pi m}{k\alpha} \leqslant 1 \right\}.$$

2. Множество $\Sigma_1^\gamma = S^*\partial M|_{t=0}$ является неподвижным относительно скручиваний.

3. Рассмотрим действие диффеоморфизма $\partial\gamma$ на множестве $S^*\partial M|_{t=1}$. Возьмем точку $m = (x, 1, \pm 1) \in S^*\partial M|_{t=1}$. Равенство $\partial\gamma(m) = m$ эквивалентно уравнению

$$x = x + k\alpha \bmod 2\pi.$$

Так как α несоизмеримо с 2π, а $k \in \mathbb{Z}$, то уравнение выше не имеет решений при $k \neq 0$, а потому на множестве $S^*\partial M|_{t=1}$ нет неподвижных точек диффеоморфизма $\partial\gamma$.

Теперь докажем, что множество Σ_1^γ открыто. Рассмотрим дополнение $\Sigma \setminus \Sigma_1^\gamma$:

$$\Sigma \setminus \Sigma_1^\gamma = S^\vee M \sqcup S^*\partial M|_{t=1}$$

и найдем его замыкание

$$\mathrm{cl}(\Sigma \setminus \Sigma_1^\gamma) = (\overline{U} \cup \overline{V_M}) \sqcup \overline{V}, \text{ где } U = S^\vee M, \quad V = S^*\partial M|_{t=1}.$$

Очевидно, $\overline{U} = U, \overline{V} = V$. Получаем, что замыкание $\mathrm{cl}(\Sigma \setminus \Sigma_1^\gamma)$ совпадает с самим множеством $\Sigma \setminus \Sigma_1^\gamma$, откуда следует, что оно замкнуто. Так как дополнение к множеству Σ_1^γ замкнуто, то само множество Σ_1^γ открыто.

Таким образом, показано, что множество неподвижных точек диффеоморфизма $\partial\gamma$ содержит открытое множество Σ_1^γ, а значит действие группы $\mathbb{Z}$ на Σ не является топологически свободным в смысле определения 3.4.

Поскольку действие группы $\mathbb{Z}$ на Σ не является топологически свободным, то результаты § 3.1 неприменимы к нелокальной краевой задаче (3.37). Для ее исследования воспользуемся аналогом теоремы 3.6 (см. [31, §6], а также [27] в случае не топологически свободного действия), в которой не предполагается, что действие группы топологически свободно.

3.3.3 Внутренний символ

Для вычисления внутреннего символа оператора $\mathcal{D}$ по формуле (3.3) из п. 3.1.2 сначала по формуле (3.2) из того же пункта вычислим вес, который равен

$$\mu_s(k) = \frac{\gamma^{*-1}(dx\wedge dt)}{dx\wedge dt}\partial\gamma^{*-1}(|\xi|^{2s}) = \frac{d(x-k\alpha t)\wedge dt}{dx\wedge dt}(\xi_1^2+(\xi_2+k\alpha\xi_1)^2)^s, \quad (3.39)$$

$$\mu_s(k)\sim\begin{cases}1, & \text{если } \xi_1=0,\\ |k|^{2s}, & \text{если } \xi_1\neq 0.\end{cases}$$

Здесь символом “$\sim$” обозначается эквивалентность весов[1].

Следуя п. 3.1.2, выпишем весовое пространство $\ell^2(\mathbb{Z},s)$:

$$\ell^2(\mathbb{Z},s) := \Big\{w:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{C}\Big|\sum_k |w(k)|^2\mu_s(k)<\infty\Big\}.$$

Тогда в соответствии с формулой (3.3) внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ в точке $(x,t,\xi_1,\xi_2)\in T_0^*M$ по определению равен

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{int}}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2):\ell^2(\mathbb{Z},s) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z},s-m),\\ \sigma_{\text{int}}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2) &= D(e^{i(x-k\alpha t)},t,\xi_1,\xi_2+k\alpha\xi_1,\mathcal{T}),\end{aligned} \quad (3.40)$$

где $(\mathcal{T}w)(k)=w(k+1)$, и является конечно-разностным оператором с переменными коэффициентами:

$$D(e^{i(x-k\alpha t)},t,\xi_1,k\alpha\xi_1+\xi_2,\mathcal{T}) = \sum_l D_l\left(e^{i(x-k\alpha t)},t,\xi_1,\xi_2+k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l,$$

[1] Веса $\mu_s,\mu_s':\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}_+$, называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1,C_2, что для любых $k\in\mathbb{Z}$ выполнены неравенства

$$C_1\mu_s(k)\leqslant\mu_s'(k)\leqslant C_2\mu_s(k).$$

где $D_l\left(e^{ix},t,\xi_1,\xi_2\right)$ — главные символы слагаемых в операторе (3.38).

Отметим, что в частном случае, когда $\xi_1 = 0$, в соответствии с формулой (3.39) получаем $\mu_s(k) \sim 1$, и внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ в точке $(x,t,0,\xi_2) \in T_0^*M$ равен

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x,t,0,\xi_2) : \ell^2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}), \\ \sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x,t,0,\xi_2) & = & D(e^{i(x-k\alpha t)},t,0,\xi_2,\mathcal{T}). \end{array} \tag{3.41}$$

3.3.4 Эллиптичность внутреннего символа

Выпишем условия эллиптичности внутреннего символа. В дальнейшем изложении будем пользоваться обратным преобразованием Фурье

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi} : \ \ell^2(\mathbb{Z},s) & \longrightarrow & H^s(\mathbb{S}^1), \\ \{w(k)\} & \longmapsto & \widetilde{w}(\varphi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w(k)e^{ik\varphi}, \end{array} \tag{3.42}$$

которое осуществляет изоморфизм весовых пространств на $\mathbb{Z}$ и пространств Соболева на окружности $\mathbb{S}^1$ с координатой φ. Следующее предложение дает условия эллиптичности внутреннего символа оператора $\mathcal{D}$.

Предложение 3.14. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *внутренний символ $\sigma_{int}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2)$ эллиптичен при любых значениях параметров $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in T_0^*M$;*
2) *семейство дифференциально-разностных операторов на окружности $\mathbb{S}^1$*

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) : &\ H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1), \\ \widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = &\ \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\mathcal{F}_{\varphi\to k} = D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t},t,1,\xi_2 - i\alpha\tfrac{d}{d\varphi}, e^{-i\varphi}\right), \end{aligned} \tag{3.43}$$

где $(\widetilde{T}_{\alpha t}u)(\varphi) = u(\varphi - \alpha t)$, обратимо при любых значениях параметров $(x,t) \in M$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства эквивалентности условий 1) и 2) преобразуем внутренний символ. Положим сначала $\xi_1 \neq 0$ и рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z},s) \arrow[r, "\sigma_{int}(\mathcal{D})"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}"'] & \ell^2(\mathbb{Z},s-m) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}"] \\ H^s(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_{int}(\mathcal{D})"] & H^{s-m}(\mathbb{S}^1). \end{tikzcd} \tag{3.44}$$

Здесь $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$ — обратное преобразование Фурье (3.42), а в нижней строке диаграммы (3.44) участвует оператор (3.43).

Коммутативность диаграммы (3.44) доказывается прямым вычислением. Приведем таблицу для операторов в k-пространстве и их образов в φ-пространстве под действием обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$:

Оператор в k-пространстве	Оператор в φ-пространстве
$w(k)\mapsto kw(k)$	$u(\varphi)\mapsto -i\partial_\varphi u(\varphi)$
$w(k)\mapsto e^{-ika}w(k), a\in\mathbb{R}$	$u(\varphi)\mapsto u(\varphi-a)$
$w(k)\mapsto w(k+1)$	$u(\varphi)\mapsto e^{-i\varphi}u(\varphi)$

Теперь рассмотрим случай $\xi_1=0$. Для оператора (3.43) рассмотрим условие его эллиптичности на окружности (см. [29, §4]). Это условие состоит в обратимости разностного оператора с переменными коэффициентами

$$D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t},t,0,\xi_2,e^{-i\varphi}\right): L^2(\mathbb{S}^1)\longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1) \qquad \forall (x,t)\in M,\ \xi_2\neq 0, \tag{3.45}$$

которая эквивалентна обратимости оператора (3.41).

Эквивалентность условий 1) и 2) следует из диаграммы (3.44) и изоморфности обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$. Предложение доказано. □

В случае операторов с постоянными по x коэффициентами условие можно упростить.

Замечание 3.15. Пусть операторы D_l в формуле (3.38) имеют постоянные по x коэффициенты (всюду ниже опускаем первый аргумент операторов). Тогда условия 1) и 2) из предложения 3.14 эквивалентны условию

3) семейство дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами на прямой

$$D\left(t,1,-i\alpha\frac{d}{d\psi},e^{-i\psi}\right): H^s(\mathbb{R})\longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}) \tag{3.46}$$

обратимо $\forall t\in[0,1], \psi\in[0,2\pi]$.

Доказательство. Для проверки эквивалентности условий 2) и 3) в этом случае воспользуемся преобразованием Фурье–Лапласа (см., напр., [59, §4]). Преобразование Фурье–Лапласа определяется формулой

$$\mathcal{F}_\theta : H^s(\mathbb{R}_\psi) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)),$$
$$(\mathcal{F}_\theta u)(\varphi,\theta) = e^{i\theta\varphi/2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta}u(\varphi+2\pi n),$$

а обратное — формулой

$$u(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\theta\psi/2\pi}(\mathcal{F}_\theta u)(\psi,\theta)\,d\theta.$$

В работе [11] показано, что это преобразование определяет изоморфизм указанных пространств.

Теперь положим $\xi_2 = -\alpha\theta/(2\pi)$, $\theta\in[0,2\pi]$, и семейству операторов (3.43) сопоставим оператор

$$a(\theta) = D\left(t,1,\alpha(-i\partial_\varphi - \theta/(2\pi)), e^{-i\varphi}\right) : L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^{s-m}(\mathbb{S}^1_\varphi)). \tag{3.47}$$

Применим к оператору (3.47) обратное преобразование Фурье–Лапласа и составим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^s(\mathbb{R}_\psi) \arrow[r, "\mathcal{F}_\theta^{-1}a(\theta)\mathcal{F}_\theta"] \arrow[d, "\mathcal{F}_\theta"'] & H^{s-m}(\mathbb{R}_\psi) \arrow[d, "\mathcal{F}_\theta"] \\ L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)) \arrow[r, "a(\theta)"] & L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^{s-m}(\mathbb{S}^1_\varphi)). \end{tikzcd} \tag{3.48}$$

Поскольку имеет место коммутационное соотношение

$$\left(-i\partial_\varphi - \frac{\theta}{2\pi}\right)(\mathcal{F}_\theta u(\psi)) =$$
$$= \left(-i\partial_\varphi - \frac{\theta}{2\pi}\right)\left(e^{i\theta\varphi/2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\theta n}u(\varphi+2\pi n)\right) = \mathcal{F}_\theta(-i\partial_\psi u(\psi)),$$

а экспоненты $e^{-i\psi}$ являются периодическими функциями, то оператор в верхней строчке диаграммы (3.48) совпадает с оператором (3.46).

В силу коммутативности диаграммы (3.48) эллиптичность внутреннего символа $\sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2)$ эквивалентна обратимости семейства операторов (3.46). $\square$

3.3.5 Граничный символ на левом основании цилиндра

Граничный символ представляет собой пару граничных символов на двух основаниях цилиндра. Рассмотрим сначала левое основание цилиндра $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Фиксируем точку $(x,\xi_1) \in T_0^*\partial M$, т.е. $\xi_1 \neq 0$. Граничный символ на левом основании — это оператор, действующий по формуле

$$\sigma_\partial^L(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H_+^s \longrightarrow \begin{matrix} H_+^{s-m} \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix} \qquad w(\xi_2) \overset{\sigma_\partial^L(\mathcal{D})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \Pi_+ D(e^{ix},0,\xi_1,\xi_2,T_{\alpha\xi_1})w(\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}(B_0(x,\xi_1,\xi_2)w(\xi_2)) \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

Здесь

- $B_0(x,\xi_1,\xi_2)$ — главный символ оператора B_0 в задаче (3.37);
- $T : H_+^s \longrightarrow H_+^s$ — оператор сдвига, действующий по формуле $(T_{\alpha\xi_1}w)(\xi_2) = w(\xi_2 + \alpha\xi_1)$;
- проектор Π_+, функционал Π' и пространство H_+^s были введены в § 1.1 и § 3.1.3.

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$, перейдем от задачи (3.49) к краевой задаче для оператора с периодическими коэффициентами периода $2\pi/(\alpha\xi_1)$ на полуоси

$$\widetilde{\sigma}_\partial^L(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix}, \tag{3.50}$$

где

$$\widetilde{\sigma}_\partial^L(\mathcal{D})(x,\xi_1) = \begin{pmatrix} D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t}) \\ j^*B_0(e^{ix},\xi_1,-i\partial_t) \end{pmatrix},$$

а j^* — сужение в точку $t=0$. Получим условия однозначной разрешимости краевой задачи (3.50).

Пусть $\mathcal{M}$ — матрица монодромии при $t=0$ оператора с периодическими коэффициентами

$$D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}). \tag{3.51}$$

Напомним, что *матрица монодромии* — это квадратная матрица $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$, равная

$$\mathcal{M}(v_0,\ldots,v_{m-1}) = (u(t),u'(t),\ldots,u^{(m-1)}(t))\Big|_{t=2\pi/\alpha\xi_1}.$$

Здесь $u(t)$ — решение однородного уравнения

$$D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t})u(t)=0$$

с данными Коши в начальной точке $t=0$

$$u(0)=v_0,\ldots,u^{(m-1)}(0)=v_{m-1}.$$

Из теории дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами (см., напр., [25, гл. 2]) известно, что оператор (3.51) обратим тогда и только тогда, когда спектр его матрицы монодромии не пересекает единичную окружность.

Составим матрицу монодромии $\mathcal{M}$ оператора (3.51) и обозначим через λ_k собственные значения этой матрицы. Обозначим через $L_+(x,\xi_1)$ пространство решений уравнения

$$D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t})u(t)=f(t),$$

стремящихся к нулю при $t\to+\infty$. Ясно, что имеет место изоморфизм конечномерных линейных пространств

$$L_+(x,\xi_1)\simeq\bigoplus_{k:|\lambda_k|<1}V_k,$$

где через V_k обозначено корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_k матрицы $\mathcal{M}$.

Предложение 3.16. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *граничный символ $\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ на левом основании цилиндра (см. (3.49)) эллиптичен при любых значениях параметров $(x,\xi_1)\in T^*_0\partial M|_{t=0}$;*
2) *краевая задача (3.50) на $\overline{\mathbb{R}}_+$ с периодическими коэффициентами обратима при любых значениях параметров $(x,\xi_1)\in T^*_0\partial M|_{t=0}$;*
3) *(условие Шапиро-Лопатинского на левом основании цилиндра $\mathbb{S}^1\times[0,1]$) оператор*

$$j^*\left(B_0(e^{ix},\xi_1,-i\partial_t)\right):L_+(x,\xi_1)\longrightarrow\mathbb{C}^N,\qquad(3.52)$$

где N — число граничных условий в задаче (3.37) на левом основании цилиндра, обратим.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) предложения следует из изоморфности преобразования Фурье.

Докажем эквивалентность условий 2) и 3), для чего воспользуемся следующей известной леммой.

Лемма 3.17. *Пусть дан ограниченный оператор*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} : H_1 \longrightarrow \begin{matrix} H_2 \\ \oplus \\ H_3 \end{matrix}, \tag{3.53}$$

где пространства H_1, H_2, H_3 банаховы, а оператор $A_1 : H_1 \longrightarrow H_2$ сюръективен. Тогда оператор A является изоморфизмом тогда и только тогда, когда сужение оператора $A_2|_{\ker A_1} : \ker A_1 \longrightarrow H_3$ на ядро оператора A_1 является изоморфизмом.

Вернемся к доказательству предложения 3.16. Утверждается, что оператор

$$D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \tag{3.54}$$

сюръективен. В самом деле, продолжим функцию $f \in H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ на всю прямую $\mathbb{R}$ с помощью оператора продолжения $\mathcal{E} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ (см., напр., [1, стр. 157]). Оператор

$$D(e^{ix},0,\xi_1,-i\partial_t,e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R})$$

является изоморфизмом на всей прямой (см. (3.46)). Применив оператор сужения на полупрямую $\overline{\mathbb{R}}_+$ к функции $u = (D^{-1}\mathcal{E})f$, получим функцию в $H^s(\overline{\mathbb{R}}_+)$, что доказывает сюръективность оператора (3.54) на полупрямой.

В силу приведенной леммы изоморфность оператора (3.52) эквивалентна обратимости краевой задачи (3.50) при любых значениях параметров $(x,\xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=0}$. Таким образом, условия 2) и 3) эквивалентны. Предложение доказано. $\square$

3.3.6 Граничный символ на правом основании цилиндра

Теперь рассмотрим правое основание $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ цилиндра. Фиксируем точку $(x,\xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=1}$. Граничный символ, обозначаемый через $\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x,\xi_1)$, согласно формуле (20) из [36] действует в пространствах

$$\sigma_{\partial}^{R}(\mathcal{D})(x,\xi_1) : \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^{s-m} \oplus \mathbb{C}) \tag{3.55}$$

по формуле

$$w(k,\xi_2) \longmapsto \begin{pmatrix} D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k,\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}\left(B_1(e^{i(x-k\alpha)},\xi_1,\xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k,\xi_2)\right) \end{pmatrix},$$

где $(\mathcal{T}w)(k,\xi_2) = w(k+1,\xi_2 + \alpha\xi_1)$, и выражения

$$D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}) = \sum_l D_l\left(e^{i(x-k\alpha)},1,\xi_1,\xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l,$$

$$B_1(e^{i(x-k\alpha)},\xi_1,\xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}) = \sum_l B_{1,l}\left(e^{i(x-k\alpha)},\xi_1,\xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l$$

определяются главными символами операторов D и B_1 в задаче (3.37). Дадим явные выражения для пространств в (3.55). Имеем пространство

$$\ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) = \left\{\{w(k)\} \,\middle|\, w(k) \in H_-^s \text{ и } \sum_k \|w(k)\|^2_{H_-^s} k^{2s} < \infty\right\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H_-^s} = \int_{\mathbb{R}} |\Pi_-(i\xi_2 + |\xi_1|)^s u(\xi_2)|^2 d\xi_2$$

и пространство

$$\begin{aligned} &\ell^2(\mathbb{Z}, H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \oplus \mathbb{C}^N) = \\ &\qquad = \left\{(w,v) = \{(w(k),v(k))\} \,\middle|\, w(k) \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-), v(k) \in \mathbb{C}^N \text{ и } \right. \\ &\qquad\qquad \left. \sum_k \|(w(k),v(k))\|^2_{s,k} < \infty\right\}, \end{aligned}$$

где в соответствии с формулой (19) из [36] семейство норм $\|(w,v)\|^2_{s,k}$ в последнем пространстве равно

$$\begin{aligned} &\|(w,v)\|^2_{s,k} = \\ &= \|\Pi_-\partial\gamma^{*-1}\ell_-^s w\|^2_{L^2}\frac{\partial\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_M}{\mathrm{vol}_M} + |v|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_{X_M})^s)\left(\frac{\partial\gamma^{*-1}\mathrm{vol}_{X_M}}{\mathrm{vol}_{X_M}}\right) = \\ &= \|\Pi_-\partial\gamma^{*-1}\ell_-^s w\|^2_{L^2} + |v|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_{X_M})^s) = \\ &= \|\Pi_-(i(\xi_2 + k\alpha\xi_1) + |\xi_1|)^s w\|^2_{L^2} + |v|^2\xi_1^{2s}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Здесь

- $\ell_-: T_0^*M \longrightarrow \mathbb{C}$ — эллиптические символы первого порядка, которые в окрестности края многообразия M равны $\ell_-(x,t,\xi_1,\xi_2) = i\xi_2 + |\xi_1|$;
- второе равенство в (3.56) справедливо в силу того, что формы объема $\mathrm{vol}_M = dx\wedge dt$ и $\mathrm{vol}_{X_M} = dx$ не изменяются при скручиваниях цилиндра;
- в третьем равенстве в (3.56) мы учли, что $\gamma(x,t) = (x+k\alpha t,t)$, и сделали подстановки $\partial\gamma^{*-1}\ell_- = i(\xi_2 + k\alpha\xi_1) + |\xi_1|$ и $\sigma(\Delta_{X_M}) = \xi_1^2$.

Далее для простоты будем полагать $\xi_1 = 1$ и приведем следующую лемму.

Лемма 3.18. *Справедлива коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) \arrow[r, "\sigma_\partial^R(\mathcal{D})"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\otimes\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}"'] & \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^{s-m}\oplus\mathbb{C}^N) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\otimes\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}"] \\
H_a^s(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_\partial^R(\mathcal{D})"] & H_a^{s-m}(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N),
\end{tikzcd} \tag{3.57}$$

где $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$ и $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$ — обратные преобразования Фурье, а в нижней строчке диаграммы участвует оператор, действующий по формуле

$$\widetilde{\sigma}_\partial^R(\mathcal{D})u(\varphi,t) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_t - i\alpha\partial_\varphi, e^{-i(\varphi-\alpha t)})u(\varphi,t) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_t - i\alpha\partial_\varphi, e^{-i(\varphi-\alpha t)})u(\varphi,0) \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\varphi,t) = u(\varphi-\alpha,t)$. Пространства H_a^s в диаграмме (3.57) являются анизотропными пространствами Соболева с нормой

$$\|w\|^2_{H_a^s(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)} = \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}}_-}\left[(1-(\partial_t+\alpha\partial_\varphi)^2)^s w(\varphi,t)\right]\overline{w(\varphi,t)}\,dt\,d\varphi. \tag{3.59}$$

Знак $\otimes$ в диаграмме (3.57) означает, что первое преобразование действует по первой переменной, а второе — по второй переменной.

Доказательство. Для нахождения нормы в пространстве $H_a^s(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)$ вычислим второе вертикальное отображение в диаграмме. Введем обозначения

$\hat{w}(k,\xi_2) = \mathcal{F}_{\varphi\to k}(w(\varphi,\xi_2))$ и $\hat{v}(k) = \mathcal{F}_{\varphi\to k}(v(\varphi))$ и выразим норму в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}, H^s_- \oplus \mathbb{C})$ в терминах обратных преобразований Фурье:

$$\|(\hat{w},\hat{v})\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z},H^s_-\oplus\mathbb{C})} = \sum_k \int\limits_{\mathbb{R}} \Pi_-((\xi_2 + k\alpha)^2 + 1)^s \hat{w}(k,\xi_2)\overline{\hat{w}(k,\xi_2)}d\xi_2 + |\hat{v}(k)|^2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\mathbb{R}} \Pi_-((\xi_2 - i\alpha\partial_\varphi)^2 + 1)^s w(\varphi,\xi_2)\overline{w(\varphi,\xi_2)}d\xi_2 d\varphi + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}}_-} (1 - (\partial_t + \alpha\partial_\varphi)^2)^s w(\varphi,t)\overline{w(\varphi,t)}dtd\varphi + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Полученное выражение является квадратом нормы в пространстве $H^s_a(\mathbb{S}^1 \times \overline{\mathbb{R}}_-) \oplus L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$. В первом интеграле мы воспользовались обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$, а во втором — обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$. Последнее равенство справедливо в силу того, что преобразование Фурье переводит проектор Π_- в отображение сужения на $\mathbb{R}_-$.

□

Воспользуемся в краевой задаче (3.58) следующей заменой переменных: $(\varphi,t) = (\psi + \alpha\tau, \tau)$ с соответствующей заменой производных $\partial_\psi = \partial_\varphi, \partial_\tau = \partial_t + \alpha\partial_\varphi$. Тогда задача (3.58) примет вид

$$\overline{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-,L^2(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-,L^2(\mathbb{S}^1)) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^N) \end{matrix}, \tag{3.60}$$

$$\overline{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})u(\tau,\psi) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(\tau,\psi) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(0,\psi) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\tau,\psi) = u(\tau,\psi - \alpha)$.

Следующее предложение является аналогом предложения 3.16 для граничного символа на правом основании цилиндра.

Предложение 3.19. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *граничный символ* $\sigma^R_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ *на правом основании цилиндра (см.* (3.55)) *эллиптичен при любых значениях параметров* $x \in \mathbb{S}^1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$;
2) *оператор* (3.60) *обратим при любых* $x \in \mathbb{S}^1$;

Если операторы D_l в формуле (3.38) *имеют постоянные по x коэффициенты при $t = 1$, то условия 1) и 2) эквивалентны условию*

3) (условие Шапиро-Лопатинского на правом основании цилиндра $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$) обратимо семейство краевых задач для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на полупрямой:

$$\begin{pmatrix} D(1,1,-i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \\ j^*B_1(1,-i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \end{pmatrix} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix} \tag{3.61}$$

с параметром $\psi \in [0,2\pi]$.

Доказательство. Аналогично предложению 3.16 условия 1) и 2) эквивалентны в силу диаграммы (3.57) и изоморфности преобразования Фурье. В случае, когда оператор $\mathcal{D}$ имеет постоянные по x коэффициенты, оператор (3.60) отвечает семейству операторов (3.61) с параметром $\psi \in [0,2\pi]$. В силу коммутативности диаграммы (3.57) и изоморфности преобразования Фурье условия 1) и 3) эквивалентны. □

Из предложений 3.14, 3.16 и 3.19 получаем условие эллиптичности задачи (3.37), которое является основным результатом данного параграфа.

Теорема 3.20. *Краевая задача* (3.37) *эллиптична тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

1) *внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ (см.* (3.40)*) эллиптичен;*
2) *выполнено условие Шапиро–Лопатинского на левом основании цилиндра M (см. предложение 3.16);*
3) *выполнено условие Шапиро–Лопатинского на правом основании цилиндра M (см. предложение 3.19).*

Поскольку α несоизмеримо с π, то применяя результаты из [31, следствие 2] и [36, §4], можно получить следующее следствие.

Следствие 3.21. *Если краевая задача* (3.37) *эллиптична (т.е. выполнены условия теоремы 3.20), то она фредгольмова.*

3.3.7 Пример

На цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ найдем условия эллиптичности задачи

$$\begin{cases}\partial_t^2 u + (1+\varepsilon(T+T^*))\partial_x^2 u = f(x,t),\\ \quad u|_{t=0} = g_0(x), \quad u|_{t=1} = g_1(x),\end{cases} \tag{3.62}$$

где $u \in H^s(M)$, $f \in H^{s-2}(M)$, $g_0,g_1 \in H^s(\mathbb{S}^1)$, $(Tu)(x,t) = u(x-\alpha t, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t) \in C^\infty[0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Нетрудно проверить, что оператор T является унитарным, а потому $T^* = T^{-1}$.

Выпишем условия эллиптичности задачи (3.62).

1. В силу предложения 3.14 обратимость внутреннего символа задачи (3.62) эквивалентна обратимости оператора Матье

$$\alpha^{-2}\widetilde{\sigma}_{\text{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos\varphi\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-2}(\mathbb{R}). \tag{3.63}$$

Оператор (3.63) является оператором Матье с коэффициентами $1/\alpha^2$ и $2\varepsilon/\alpha^2$ (см., напр., [51]). Хорошо известно, что оператор (3.63) будет фредгольмов тогда и только тогда, когда его ядро не содержит периодических функций.

2. В силу предложения 3.16 граничному символу $\sigma_\partial^L(\mathcal{D})(\xi_1)$ соответствует краевая задача

$$\begin{cases} -u''(t) + \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{2\varepsilon_0}{\alpha^2}\cos t\right) u(t) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_+),\\ u(0) = h_1,\end{cases} \tag{3.64}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$. Дифференциальный оператор в полученной краевой задаче является оператором Матье, аналогичным оператору (3.63). Условие эллиптичности состоит в однозначной разрешимости задачи (3.64).

3. Теперь зафиксируем $\psi \in [0,2\pi]$. В силу предложения 3.19 обратимость граничного символа задачи (3.62) на правом основании цилиндра эквивалентна однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} -\alpha^2 u''(\tau) + (1+2\varepsilon_1\cos\psi)\, u(\tau) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-),\\ u(0) = h_1,\end{cases} \tag{3.65}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon(1)$. Это условие легко проверить. Уравнение

$$-\alpha^2 u''(\tau) + (1+2\varepsilon\cos\psi)\, u(\tau) = 0$$

имеет решение $u(\tau) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}\tau} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}\tau}$, где $\lambda = \alpha^{-2}(1+2\varepsilon_1\cos\psi)$. Для однозначной разрешимости задачи (3.65) необходимо выполнение условия $1+2\varepsilon_1\cos\psi > 0$ при всех $\psi \in [0,2\pi]$, откуда получаем условие $|\varepsilon_1| < 1/2$.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 3.22. *Задача* (3.62) *эллиптична, когда выполнены следующие условия:*

1) оператор Матье (3.63) *обратим;*

2) выполнено условие $|\varepsilon(1)| < 1/2$.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получена формула индекса краевых задач, ассоциированных с изометрическим действием дискретной группы степенного роста. Эти результаты являются новыми даже в случае конечной группы.
2. Рассмотрено приложение полученной формулы индекса к скрученным краевым задачам. В частности, вычислен индекс скрученной краевой задачи для оператора Эйлера.
3. Определен топологический индекс краевых задач, ассоциированных с неизометрическим действием дискретной группы на многообразии с краем. В определении используются циклические когомологии.
4. Для краевых задач со скручиваниями конечного цилиндра получены условия эллиптичности в явном виде. Рассмотрен случай, когда эти условия эквивалентны однозначной разрешимости уравнения Матье.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Савину А.Ю. за постановку задачи, поддержку, помощь и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115)

Литература

1. Агранович М. С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей.* МЦНМО, М. 2013.

2. Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. I. *УМН*, 1968. — 23, № 5. — С.99–142.

3. Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. III. *УМН*, 1969. — 24, № 1. — С.127–182.

4. Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. IV. *УМН*, 1972. — 27, № 4. — С.161–178.

5. Атья М. Ф., Зингер И. М. Индекс эллиптических операторов. V. *УМН*, 1972. — 27, № 4. — С.179–188.

6. Атья М. Ф., Сегал Г. Б. Индекс эллиптических операторов. II. *УМН*, 1968. — 23, № 6. — С.135–149.

7. Болтачев А. В. Об эллиптичности операторов со скручиваниями, *СМФН*, 2023. — 69, № 4. — С.565–577.

8. Ботт Р., Ту Л. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, 1989.

9. Вишик М. И., Эскин Г. И. Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения, *УМН*, 1967. — 22, № 1. — С.15–76.

10. Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях. *УМН,* 1960. — 15, № 3. — С.121–132.

11. Жуйков К. Н., Савин А. Ю. Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром. *СМФН*, 2023. — 69, № 4. — С.599–620.

12. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю. О принципе локальности индекса в эллиптической теории. *Функц. анализ и его прил.*, 2001. — 35, № 2. — С.37–52.

13. Ремпель Ш., Шульце Б.-В. *Теория индекса эллиптических краевых задач*, Мир, М., 1986.

14. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции. *СМФН*, 2014. — 54. — С.3–138.

15. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе некоммутативных эллиптических операторов над C^*-алгебрами. *Матем. сб.*, 2010. — 201, № 3. — С.63–106.

16. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Некоммутативная эллиптическая теория. Примеры. *Труды МИАН*, 2010. — 271. — С.204–223.

17. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений. *Матем. сб.*, 2011. — 202, № 10. — С.99–130.

18. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем. *Уфимск. матем. журн.*, 2016. — 8, № 3. — С.126–134.

19. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические дифференциальные задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем. *Дифференц. уравнения*, 2017. — 53, №. 5. — С.1383–1392.

20. Тасевич А. Л. Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями на границе соседних подобластей. *СМФН*, 2023. — 69, № 1. — С.152–165.

21. Федосов Б. В. Теорема периодичности в алгебре символов, *Матем. сб.*, 1978. — 105, № 3, — С.431–462.

22. Федосов Б. В. Теоремы об индексе. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, 1991. — 65. — С.165–268.

23. Шварц А. С. Эллиптические операторы в квантовой теории поля *Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Совр. пробл. мат.*, 1981. — 17. — С.113–117.

24. Эскин Г. И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973.

25. Якубович В. А., Старжинский В. М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*, Наука, М., 1972.

26. Alvarez-Gaumé L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. *Commun. Math. Phys.*, 1983. — 90. — C.161–173.

27. Antonevich A., Belousov M., Lebedev A. *Functional differential equations. II. C^*-applications. Parts 1, 2.* Number 94, 95 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow, 1998.

28. Antonevich A., Lebedev A. *Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory.* Number 70 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow, 1994.

29. Antonevich A. B., Lebedev A. V. Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach. In *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. VI*, volume 199 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 25–116, Providence, RI, 2000. Amer. Math. Soc.

30. Atiyah M. F., Bott R. The index problem for manifolds with boundary *Bombay Colloquium on Differential Analysis*, 1964. — C.175–186.

31. Baldare A., Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schrohe E. C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators. *Math. Notes*, 2022. — 111, № 5. — C.701–721.

32. Berline N., Getzler E., Vergne M.*Heat Kernels and Dirac Operators.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298. Springer–Verlag, 1992.

33. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Elliptic boundary value problems associated with isometric group actions. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 2021. — 12, № 50. — P.1–34.

34. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Index of twisted elliptic boundary value problems associated with isometric group actions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022. — 43, № 10, P.2635–2646.

35. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Periodic Cyclic Cocycles on the Boutet de Monvel Symbol Algebra. *Russ. J. Math. Phys.*, 2022. — 29, №4. — P.417–425.

36. Boltachev A. V., Savin A. Yu. Trajectory Symbols and the Fredholm Property of Boundary Value Problems for Differential Operators with Shifts. *Russ. J. Math. Phys.*, 2023. — 30, № 2. — P.135–151.

37. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudodifferential operators. *Acta Math.*, 1971. — 126. — P.11–51.

38. Connes A. *Noncommutative geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

39. Getzler E. Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem. *Commun.Math. Phys.*, 1983. — 92. — P.163–178.

40. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1981. — 53. P.53–73.

41. Hörmander L.*The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III.* Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

42. Izvarina N. R., Savin A. Yu. Ellipticity of operators associated with Morse-Smale diffeomorphisms. *Differential equations on manifolds and mathematical physics. Trends in Math.*, 2020. — P.202–220.

43. Khalkhali M. Basic noncommutative geometry, *EMS Series of Lectures in Mathematics*, pp. xviii+239, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013.

44. Lee J. M. Introduction to Smooth Manifolds. *Graduate Texts in Mathematics*, 218. Springer, New York, NY, 2003.

45. Melo S. T., Nest R., Schrohe E. C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra. *J. Reine Angew. Math.*, 2003. — 561. — P.145–175.

46. Melo S. T., Schick Th., Schrohe E. A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems. *J. Reine Angew. Math.*, 2006. — 599. — P.217–233.

47. Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu. *Elliptic theory and noncommutative geometry,* vol. 183 of Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

48. Nazaikinskii V., Sternin B. Surgery and the relative index in elliptic theory. *Abstr. Appl. Anal.*, 2006. — 1, № 98081. — P.1–16.

49. Pedersen G. K. C^*-Algebras and Their Automorphism Groups, 14, *London Mathematical Society Monographs*, Academic Press, 1979.

50. Ponge R., A New Short Proof of the Local Index Formula and Some of Its Applications. *Commun. Math. Phys.*, 2003. — 241. — P.215–234.

51. Van der Pol B., Strutt M. J. O.. *II. On the stability of the solutions of Mathieu's equation.* The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1928. — 5, № 27. — P.18–38.

52. Savin A. Yu. Elliptic operators on manifolds with singularities and K-homology. *K-Theory*, 2005. — 34, № 1. — P.71–98.

53. Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Index of elliptic operators for diffeomorphisms of manifolds. *J. of Noncommut. Geometry*, 2014. — 8, № 3. — P.695–734.

54. Schrohe E. A short introduction to Boutet de Monvel's calculus. *Approaches to singular analysis*, 2001. — 125. — P.85–116.

55. Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.. On the index of differential operators on manifolds with conical singularities, *Annals of Global Analysis and Geometry*, 1998. — 16, № 2. — P.141–172.

56. Schweitzer L. B. Spectral invariance of dense subalgebras of operator algebras. *Internat. J. Math.*, 1993. — 4, № 2. — P.289–317.

57. Skubachevskii A. L. *Elliptic functional differential equations and applications.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1997.

58. Skubachevskii A. L. Boundary value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys*, 2016. — 71, № 5. — P.801–906.

59. Taubes C. H. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 1987. — 25. — P.363–430.

60. Zeller-Meier G. *Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes*, Gauthier-Villars, 1979.

61. Zhang W. *Lectures on Chern-Weil theory and Witten deformations*, volume 4 of *Nankai Tracts in Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.