РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ

Адхамова Амина Шухратовна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Александр Леонидович Скубачевский
доктор физико-математических наук, профессор

Москва — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В диссертации изучаются системы дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами запаздывающего и нейтрального типов, связанных с задачей Н.Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием.

Современная теория функционально-дифференциальных уравнений, которая берет свое начало с работ А. Д. Мышкиса [32, 33], в дальнейшем развивалась многими математиками, такими как Л. Э. Эльсгольц [67], Н. Н. Красовский [23, 24], Г. А. Каменский [20, 71], Дж. Хейл [64], Р. Беллман и К. Кук [9], и др. Существенные результаты по теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, методы которой существенно используются в настоящей диссертации, посвящен целый ряд работ - Ф. Хартмана и Г. Стампакья [72], А. Б. Антоневича [8], В. С. Рабиновича [41] и др. Интерес к этим уравнениям связан прежде всего с многими важными приложениями: в теории систем управления с последействием [23–25, 36, 48], в теории упругости [35, 73, 74, 79], в нелинейной оптике [12, 42, 56, 80, 82], в теории многомерных диффузионных процессов [13, 55, 70, 77, 79, 81] и др. Важно отметить, что краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений тесно связаны с нелокальными краевыми задачами для эллиптических дифференциальных уравнений [50, 54, 68, 69, 79], теория которых стала активно разрабатываться после опубликования известной работы А. В. Бицадзе, А. А Самарского [10].

Основы теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений, содержащих сдвиги аргумента, которые могут отображать точки границы в область, построил в своих работах А. Л. Скубачевский [50–54, 58, 78]. Наиболее полно результаты А. Л. Скубачевского в этой области представлены в монографии [79].

В дальнейшем исследования краевых задач для дифференциально-разностных уравнений были продолжены его учениками. Так, краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений исследовались в [34, 57, 65, 66], краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов рассматривались в [18, 19], случай дифференциально-разностных уравнений с вырождением - в работах [39, 40], спектральная асимптотика сильно эллиптических задач - в работах [37, 38], вторая и третья краевые задачи - в работах [46, 47], задача Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей - в работе [34], смешанные задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений второго порядка со сдвигами по пространственным переменным в старших производных - в работах [27, 28], краевые задачи для дифференциально разностных уравнений второго порядка на интервале конечной длины - в работах [59, 60].

Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с аффинными преобразованиям аргументов и в том числе с растяжениями-сжатиями изучались в работах Л. Е. Россовского и его учеников [44, 45, 75, 76]. Статьи А. Б. Муравника посвящены краевым задачам для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве [30, 31], а также задаче Коши для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами аргументов в старших членах [29]. Нелинейные эллиптические функционально-дифференциальные уравнения изучались в работах О. В. Солонухи, см. [61–63]. В работах В. В. Власова, Н. А. Раутиан методами спектральной теории изучаются эволюционные функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени, см. [14–16].

Широко известно, что обратная связь в системе управления может приводить к задержке сигнала [см. Рис.1].

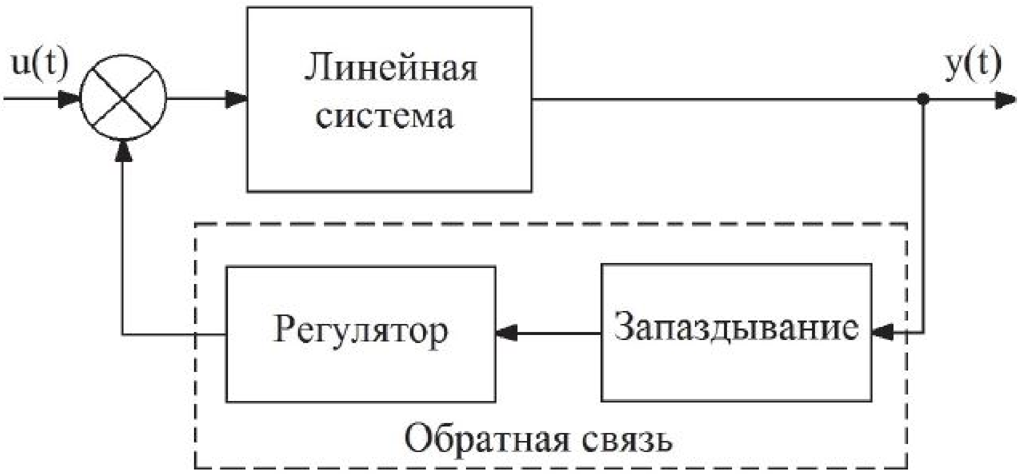

Рис. 1

Впервые задача об успокоении системы управления с последействием рассматривалась Н. Н. Красовским [24]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [48, 49] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [26]. Системы управления с последействием запаздывающего типа изучались в [25, 36]. Отметим также работы, посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием [21, 22], исследование для случая запаздывания, пропорционального времени (уравнение пантографа) – Л.Е. Россовским [43], а также исследование системы управления произвольного порядка с глобальным последействием на графе - С.А. Бутериным [11].

Цели и задачи работы

Цель работы заключается в следующем:

1) для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального и запаздывающего типов установить связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка;

2) изучить разрешимость соответствующей краевой задачи для систем диф-

ференциально-разностных уравнений;

3) исследовать гладкость обобщенных решений рассматриваемой краевой задачи на подынтервалах и на всем интервале существования решения.

Научная новизна

В работе получены новые результаты об обобщенных решениях краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального и запаздывающего типов, полученных из вариационных задач.

Рассмотрены краевые задачи для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального и запаздывающего типов. Впервые была доказана однозначная разрешимость и исследована гладкость обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами нейтрального и запаздывающего типов. Доказано, что гладкость обобщенных решений для системы уравнений нейтрального типа сохраняется на подынтервалах и может нарушаться на всем интервале. Получены достаточные условия сохранения гладкости обобщенных решений на всем интервале.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в общей теории нелокальных краевых задач и в теории управления систем с последействием, а также для анализа результатов численного моделирования решений подобных задач.

Результаты работы включены в исследования по гранту РФФИ Аспиранты № 20-31-90119 «Многомерные системы управления с последействием».

Методология и методы исследования

Изучение вариационных и краевых задач для дифференциально-разностных уравнений основано на комбинации методов исследования эллиптических дифференциальных уравнений, свойствах разностных операторов и теории пространств Соболева. В части результатов, связанных прежде всего с разрешимостью, используется вариационный подход, суть которого заключается в получении оценок коэрцитивности соответствующих билинейных форм.

Положения, выносимые на защиту:

1. Установлена связь между вариационными задачами, соответствующими задаче Н.Н. Красовского об успокоении нестационарной системы управ-

ления с последействием в случаях нейтрального и запаздывающего типов, и краевыми задачами для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

2. Единым методом доказаны теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для соответствующих систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка нейтрального и запаздывающего типов. Получены априорные оценки решений в пространствах Соболева.

3. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений на подынтервалах для системы уравнений нейтрального типа. Получены достаточные условия сохранения гладкости на всем интервале.

4. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений для системы уравнений запаздывающего типа на всем интервале.

5. Для системы управления с последействием с различным числом входов и выходов построено фридрихсово расширение оператора, соответствующего краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Полный объем диссертации составляет 100 страниц с 1 рисунком.

Список литературы содержит 82 наименования.

Глава 1 состоит из 3 параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений с постоянными матричными коэффициентами. Основные результаты опубликованы в работе [1].

Параграф 1.1 содержит постановку задачи. А именно, рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t, \tag{0.1}$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ – неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция управления, A_m, B_m – матрицы порядка $n \times n$ с постоянными элементами, A_0 – невырожденная матрица, запаздывание $\tau > 0$ – константа, $M \in \mathbb{N}$.

Предыстория системы описывается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t),\ t \in [-M\tau, 0], \tag{0.2}$$

где $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ – заданная вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (0.1) с начальным условием (0.2) в положение равновесия. Для этого будем искать такое управление $u(t),\ \ 0 < t < T$, что

$$y(t) = 0,\ t \in [T - M\tau, T], \tag{0.3}$$

где $T > (M+1)\tau,\ T - M\tau = (N+\theta)\tau,\ N \in \mathbb{N},\ 0 < \theta \leq 1.$

Управление, обеспечивающее выполнение (0.1) - (0.3), не единственно. Среди всех возможных управлений, будем искать управление, доставляющее минимум функционалу

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма. Получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) = \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{0.4}$$

с краевыми условиями (0.2) - (0.3).

В работе Н.Н. Красовского задача (0.2) - (0.4) рассматривалась в случае $A_m = 0,\ m \neq 0.$

В параграфе 1.2 были введены обозначения для различнх вещественных функциональных пространств:

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N},$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\le i\le k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0,\dots,k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b),$$

$$W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b),$$

$$\mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i, w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i, w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\dots,v_n)^T,\ w = (w_1,\dots,w_n)^T$.

Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Показано, что вариационная задача (0.4), (0.2), (0.3) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка:

$$-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T A_m y'(t + (l-m)\tau))' +$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} [B_l^T A_m y'(t + (l-m)\tau) - A_l^T B_m y'(t + (l-m)\tau) + \tag{0.5}$$

$$+ B_l^T B_m y(t + (l-m)\tau)] = 0,\ t \in (0, T - M\tau).$$

с краевыми условиями (0.2) - (0.3) при выполнении следующего условия:

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T A_m y'(t + (l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{0.6}$$

Определение 0.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (0.5), (0.2), (0.3), если выполняется условие (0.6), и вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет системе уравнений (0.5) а также краевым условиям (0.2), (0.3).

Теорема 0.1. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ доставляет минимум функционалу (0.4) с краевыми условиями (0.2), (0.3) тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (0.5), (0.2), (0.3).*

В параграфе 1.3 была получена априорная оценка обобщенного решения и доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи:

Теорема 0.2. *Пусть $det A_0 \neq 0$. Тогда для каждого $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ существует единственное обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ краевой задачи (0.5), (0.2), (0.3), и*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leq c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{0.7}$$

где $c > 0$ не зависит φ.

Глава 2 состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с переменными коэффициентами, а также исследованию гладкости обобщенных решений. Основные результаты опубликованы в работах [2, 3, 5, 6].

Параграф 2.1 содержит постановку задачи. Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{0.8}$$

Здесь $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}, B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{0.9}$$

Здесь $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ — некоторая вектор-функция.

Мы рассматриваем задачу о приведении системы (0.8) с начальным условием (0.9) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{0.10}$$

где $T > (M+1)\tau,\ M, N \in \mathbb{N}, T - M\tau = (N+\theta)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| \sum_{m=0}^M A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t) y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min. \qquad (0.11)$$

В параграфе 2.2 установлена связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, доказывается однозначная разрешимость краевой задачи.

Показывается, что вариационная задача (0.9)–(0.11) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}
-(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau) A_m(t+l\tau) y'(t+(l-m)\tau))' +& \\
+ \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau) A_m(t+l\tau) y'(t+(l-m)\tau) -& \\
-(\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau) B_m(t+l\tau) y(t+(l-m)\tau))' +& \\
+ \sum_{l,m=0}^M B_l^T(t+l\tau) B_m(t+l\tau) y(t+(l-m)\tau) = 0,\ t \in (0, T - M\tau)& \qquad (0.12)
\end{aligned}$$

с краевыми условиями (0.9), (0.10) при выполнении следующего условия:

$$\sum_{l,m=0}^M A_l^T(t+l\tau) A_m(t+l\tau) y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \qquad (0.13)$$

Было сформулировано определение обобщенного решения полученной краевой задачи и установлена взаимосвязь между вариационной и краевой задачами.

Определение 0.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (0.12), (0.9), (0.10), если выполняется условие (0.13), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (0.12), а также краевым условиям (0.9), (0.10).

Теорема 0.3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. *Функционал* (2.4) *с краевыми условиями* (2.2), (2.3) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (2.12), (2.2), (2.3).

Далее была получена априорная оценка обобщенного решения и доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 0.4. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ *существует единственное обобщенное решение* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *краевой задачи* (0.12), (0.9), (0.10), *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leq c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{0.14}$$

где $c > 0$ *— постоянная, не зависящая от* φ.

Параграф 2.3 посвящен свойствам разностных операторов в пространстве $L_2(a,b)$ и в пространствах Соболева.

Параграф 2.4 посвящен исследованию гладкости обобщенного решения на подынтервалах. Для однозначной разрешимости краевой задачи было достаточно, чтобы матрица коэффициентов при столбце производных без запаздывания была невырожденной в каждой точке. Накладывать ограничения на поведение остальных коэффициентов (непрерывно дифференцируемых матриц) не нужно. Этого же условия достаточно для того, чтобы обобщенное решение обладало соответствующей гладкостью на подынтервалах, полученных выбрасыванием орбит концов интервала под действием группы сдвигов:

Теорема 0.5. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда обобщенное решение задачи* (0.12), (0.9), (0.10) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала* $(0, d)$:

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \ldots, N+1)$, *если* $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau)$ $(j = 1, \ldots, N+1)$ *и* $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \ldots, N)$, *если* $\theta < 1$.

Было доказано, что при выполнении некоторых условий на матрицы $A_l(t)$ и предположения, что $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$, обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ задачи (0.12), (0.9), (0.10) принадлежит пространству $W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$ тогда и только тогда, когда $(\varphi, \psi_j)_{W_2^{2,m}(-M\tau,0)} = 0,\ j = 1, \ldots, p$, где $\psi_j \in W_2^{2,m}(-M\tau, 0)$, $j = 1, \ldots, p$, - линейно независимые функции, где $p \leq 2m$.

Глава 3 состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа. Основные результаты опубликованы в работе [4].

Параграф 3.1 содержит постановку задачи. Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T, \tag{0.15}$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-функция управления, $A_0(t)$ - невырожденная матрица порядка $n \times n$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\ldots n}$ — матрица порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^0(t),\ b_{ij}^m(t)$, соответственно, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание, $T > (M+1)\tau$.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t) = \varphi(t) \textit{ для почти всех } t \in [-M\tau, 0], \tag{0.16}$$

где $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ – заданная вектор-функция, $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$.

Поскольку функция $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ определена п.в. на отрезке $[-M\tau, 0]$, мы зададим дополнительно начальное условие

$$y(0+0) = \varphi_0, \tag{0.17}$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ - некоторый вектор.

Рассматривается задача о приведении системы (0.15) с начальными условиями (0.16), (0.17) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t),\ \ 0 < t < T$, что

$$y(t) = 0,\ t \in [T - M\tau, T], \tag{0.18}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений мы будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{0.19}$$

с краевыми условиями (0.16) – (0.18).

В параграфе 3.2 установлена связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Было показано, что вариационная задача (0.16)–(0.19) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка:

$$-[A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + A_0^T(t)\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau)]' + \tag{0.20}$$

$$+\sum_{l=0}^{M} B_l^T(t + l\tau)A_0(t + l\tau)y'(t + l\tau) +$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau)=0,\ t\in(0,T-M\tau)$$

с краевыми условиями (0.16)–(0.18) при выполнении следующего условия:

$$A_0^T(t)A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M} A_0^T(t)B_m(t)y(t-m\tau)\in W_2^{1,n}(0,T-M\tau). \qquad (0.21)$$

Было сформулировано понятие обобщенного решения краевой задачи (0.20), (0.16)–(0.18) и доказана теорема о связи вариационной и краевой задач.

Определение 0.3. Вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(0,T)$ называется *обобщенным решением задачи* (0.20), (0.16)-(0.18), если выполняется условие (0.21), $y(t)$ почти всюду на $(0,T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (0.20), а также краевым условиям (0.16) - (0.18).

Теорема 0.6. *Пусть* $\varphi\in L_2^n(-M\tau,0)$. *Функция* $y\in W_2^{1,n}(0,T)$ *доставляет минимум функционалу* (0.19) *с краевыми условиями* (0.16) - (0.18) *тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (0.20), (0.16) - (0.18).

Параграф 3.3 посвящен доказательству теоремы об однозначной разрешимости краевой задачи (0.20), (0.16)–(0.18).

Теорема 0.7. *Пусть* $detA_0(t)\neq 0, t\in\mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi\in L_2^n(-M\tau,0)$ *и любого* $\varphi_0\in\mathbb{R}^n$ *существует единственное обобщенное решение краевой задачи* (0.20), (0.16)-(0.18) $y\in W_2^{1,n}(0,T)$, *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(0,T)}\le c(||\varphi||_{L_2^n(-M\tau,0)}+|\varphi_0|). \qquad (0.22)$$

где $c>0$ *– постоянная, не зависящая от* φ *и* φ_0.

В параграфе 3.4 была доказана гладкость обобщенных решений на всем интервале:

Теорема 0.8. *Пусть* $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$, *и пусть* $\varphi(0)=\varphi_0$. *Тогда обобщенное решение задачи* (0.20), (0.16)-(0.18) $y\in W_2^{2,n}(0,T-M\tau)$.

Глава 4 состоит из 3 параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа для различной размерности вектор-функций управления и состояния системы. Доказана теорема о разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Построено фридрихсово расширение.

Параграф 4.1 содержит постановку задачи. Рассматривается линейная система управления, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{0.23}$$

Здесь $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{pmatrix}$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ — вектор-функция управления, $A_m(t),\ B_m(t) = \{a_{ij}^k(t)\},\ \{b_{ij}^k(t)\},\ i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$ — матрицы порядка $n \times k$ с элементами $a_{ij}^m(t),\ b_{ij}^m(t)$ которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{0.24}$$

Здесь $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_k(t) \end{pmatrix}$ — некоторая вектор-функция.

Рассматривается задача о приведении системы (0.23) с начальным условием (0.24) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{0.25}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2 dt \to \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (0.23) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau) \right|^2 dt \to \min\,. \qquad (0.26)$$

В параграфе 4.2 исследуется связь между вариационной и краевой задачами.

Рассматривается случай $n > k$.

Было показано, что вариационная задача (0.26), (0.24), (0.25) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y'(t + (l - m)\tau) \right)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} \{ B_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y'(t + (l - m)\tau) - \\ - \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t + (l - m)\tau) \right)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t + (l - m)\tau) \} = 0, \ t \in (0, T - M\tau) \end{aligned} \qquad (0.27)$$

с краевыми условиями (0.24), (0.25) при выполнении следующего условия:

$$\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) A_k(t + l\tau) y'(t + (l - k)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \qquad (0.28)$$

Сформулировано понятие обобщенного решения краевой задачи (0.27), (0.24), (0.25).

Определение 0.4. Вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (0.27), (0.24), (0.25), если выполняется условие (0.28), $y(t)$ почти всюду на $(0, T - M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (0.27), а также краевым условиям (0.24), (0.25).

Доказана теорема о связи вариационной и краевой задач.

Теорема 0.9. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$. *Функционал* (0.26) *с краевыми условиями* (0.24), (0.25) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (0.27), (0.24), (0.25).

Параграф 4.3 посвящен доказательству однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 0.10. *Пусть существует минор k-ого порядка матрицы $A_0(t)$, который не равен* 0 *при* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in W_2^{1,k}(-M\tau, 0)$ *существует единственное обобщенное решение краевой задачи* (0.27), (0.24), (0.25) $y \in W_2^{1,k}(-M\tau, T)$, *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,k}(-M\tau,T)} \leq c||\varphi||_{W_2^{1,k}(-M\tau,0)}, \tag{0.29}$$

где $c > 0$ — *постоянная, не зависящая от* φ.

Идея доказательства теоремы 0.10 сводится по существу к сведению однородной системы дифференциально-разностных уравнений (0.27) с неоднородными краевыми условиями (0.24) и однородными условиями (0.25) к неоднородной системе дифференциально-разностных уравнений с однородными краевыми условиями. Таким образом, возникает вопрос о построении соответствующего неограниченного оператора, действующего в пространстве $\widetilde{L}$ и изучении его свойств.

Пусть $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ — неограниченный оператор, заданный по формуле:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_R y)(t) := -\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)' +\\
+\sum_{l,m=0}^{M}\{B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) -\\
-\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' +\\
+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\},\ t\in(0,T-M\tau),
\end{aligned}
\tag{0.30}
$$

при $y \in D(\mathcal{A}_R)$, где

$$
D(\mathcal{A}_R) = \Big\{y \in \widetilde{W} : \sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)\times
$$

$$
\times y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,k}(0,T-M\tau)\Big\}.
$$

Обозначим через A_R сужение оператора $\mathcal{A}_R$ на $\dot{C}^{\infty,k}(0,T-M\tau)$, т. е. $A_R : \widetilde{L} \supset D(A_R) \to \widetilde{L}$ есть неограниченный оператор, заданный следующим образом: $A_R y = \mathcal{A}_R y$ при $y \in D(A_R) := \dot{C}^{\infty,k}(0,T-M\tau)$.

Доказана теорема о самосопряженном фридрихсовом расширении:

Теорема 0.11. *Оператор $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ является самосопряженным фридрихсовым расширением оператора A_R с нижней гранью $c_{A_R} > 0$.*

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Апробация результатов

Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством Н. А. Раутиан; на семинаре факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством И. С. Ломова; на Коломенском научном семинаре под руководством В. П. Лексина; в Российском университете дружбы народов на семинаре под руководством А. Л. Скубачевского; на 19-ой Международной конференции Distributed Computer and Communicational Networks: Control, Computation, Communication (Москва, 2016); на 8-ой и 9-й Международных конференциях по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2017, 2022); на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019); на 30-й, 31-й и 32-й Крымских Осенних Математических Школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2019, 2020, 2021); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2019); на Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2020), на Международной конференции «Frontier in mathematics and computer science» (Ташкент, 2020); на Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, 2022, 2023); на Международной конференции «Nonlocal and Nonlinear Problems» (Москва, 2023) и на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2024).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1–7] из списка литературы, а также в следующих тезисах конференций.

1. Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л. О задаче об успокоении системы управления с последействием. Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016). Материалы Девятнадцатой международной научной конференции. (21–25 ноября 2016 года), Российский университет дружбы народов (РУДН) (Москва), стр. 41-44.

2. Adkhamova A.S. On some problem for control system with delays. Материалы восьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (17–20 августа 2017 го-

да), Российский университет дружбы народов (РУДН) (Москва), стр. 5.

3. Адхамова А.Ш. Исследование проблемы успокоения нестационарной системы управления с последействиями. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 г. — М.: РУДН, 2018, стр. 137.

4. Адхамова А.Ш. О системе управления с последействиями. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» [Электронный ресурс] Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. – М.: МАКС Пресс, 2019.

5. Адхамова А.Ш. Задача об успокоении нестационарной многомерной системы управления с последействиями. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 «XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», стр. 179-181.

6. Адхамова А.Ш. О задаче об успокоении нестационарной многомерной системы управления с последействими. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXI. Посвящается памяти Юлия Витальевича Покорного (80-летию со дня рождения) (3–9 мая 2020 года). Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020. стр. 29-30.

7. Адхамова А.Ш. Гладкость обобщенного решения краевой задачи системы управления с последействием. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», стр. 142-143.

8. Adkhamova A.Sh. Smoothness of generalized solution of boundary value problem for control system with delay. FRONTIER IN MATHEMATICS AND

COMPUTER SCIENCE Abstracts of the International Online Conference (October 12–15, 2020, Tashkent).

9. Адхамова А.Ш. О гладкости обобщенного решения задачи Красовского об успокоении системы управления с последействием. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021 «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография ООО «Полипринт», стр. 68-69.

10. Адхамова А.Ш. О задаче Красовского об успокоении нестационарной многомерной системы управления с последействием запаздывающего типа. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXXIII (3–9 мая 2022 г.). Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2022. стр. 36-38.

11. Adkhamova A.S. Krasovskii damping problem for a multidimensional control system of retarded type. Материалы девятой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (28 июня–5 июля 2022 года), Российский университет дружбы народов (РУДН) (Москва), стр. 5.

12. Адхамова А.Ш. Задача Красовского об успокоении многомерной нестационарной системы управления с последействием запаздывающего типа. Материалы международной научной конференции Уфимская осенняя математическая школа-2022. (28 сентября-1 октября 2022). Уфа, РИЦ БашГУ. 2022, стр. 112.

13. Adkhamova A.Sh. On the damping problem for a multidimensional control system of retarded type. International Conference «Nonlocal and Nonlinear Problems». Abstracts. Moscow, Russia, October 23–27, 2023. Moscow Peoples' Friendship University of Russia Named After Patrice Lumumba, 2023, стр. 5.

Глава 1. Система управления с последействием с постоянными матричными коэффициентами

Эта глава посвящена задаче об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с постоянными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Доказана однозначная разрешимость полученной краевой задачи. Основные результаты этой главы опубликованы в статье [1].

1.1 Постановка задачи и вспомогательные результаты

Мы рассматриваем линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t, \tag{1.1}$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ – неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция управления, A_m, B_m – матрицы порядка $n \times n$ с постоянными элементами, A_0 – невырожденная матрица, запаздывание $\tau > 0$ – константа и $u(t)$ – вектор-функция управления.

Предыстория системы описывается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \ t \in [-M\tau, 0], \tag{1.2}$$

где $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ - заданная вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1.1) с начальным условием (1.2) в положение равновесия. Для этого будем искать такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \; t \in [T - M\tau, T], \tag{1.3}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Вектор-функция $y(t)$, удовлетворяющая задаче (1.1) – (1.3), не единственна. Мы также предположим, что

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма. Получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) = \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{1.4}$$

с краевыми условиями (1.2) - (1.3).

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство вещественнозначных абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int\limits_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0, \ldots, k-1\}$.

Введем пространства вещественнозначных вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b),$$

$$W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b),$$

$$\mathring{W}_2^{k,n}(a,b)=\prod_{i=1}^{n}\mathring{W}_2^{k}(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)}=\sum_{i=1}^{n}(v_i,w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)}=\sum_{i=1}^{n}(v_i,w_i)_{W_2^{k}(a,b)},$$

где $v=(v_1,\ldots,v_n)^T,\ w=(w_1,\ldots,w_n)^T$.

Рассмотрим матричный оператор $R:L_2^n(\mathbb{R})\to L_2^n(\mathbb{R})$

$$R=\begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ R_{n1} & \cdots & R_{nn}\end{pmatrix}.$$

Разностные операторы $R_{ik}:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ заданы по формулам

$$R_{ik}y=\sum_{j=-N}^{N}b_{ik}^{j}y(t-j\tau), \tag{1.5}$$

где b_{ik}^j - вещественные числа $(i,k=1,...,n)$.

Пусть $d=(N+\theta)\tau \quad (0<\theta\le 1)$.

Введем операторы

$$I_Q:L_2(0,d)\to L_2(\mathbb{R}), P_Q:L_2(\mathbb{R})\to L_2(0,d), R_Q:L_2(0,d)\to L_2(0,d),$$

по формулам

$$\begin{gathered}(I_Qv)(t)=v(t)\ (t\in(0,d)), v(t)=0\ (t\in(-\infty,0)\cup(d,+\infty)),\\ (P_Qv)(t)=v(t)\ (t\in(0,d)),\\ R_{ikQ}=P_QR_{ik}I_Q:L_2(0,d)\to L_2(0,d).\end{gathered} \tag{1.6}$$

Определим матричный оператор $R_Q : L_2^n(0,d) \to L_2^n(0,d)$:

$$R_Q = \begin{pmatrix} R_{11Q} & \cdots & R_{1nQ} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1Q} & \cdots & R_{nnQ} \end{pmatrix}.$$

Ниже будут приведены некоторые свойства разностных операторов. Доказательства можно найти в параграфе 2 из [49].

Лемма 1.1. *$I_Q^* = P_Q, P_Q^* = I_Q$, т. е. для любых $u \in L_2(0,d)$, $v \in L_2(\mathbb{R})$ имеем*

$$(I_Q u, v)_{L_2(R)} = (u, P_Q v)_{L_2(0,d)}. \tag{1.7}$$

Лемма 1.2. *Операторы $R_{ik} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $R_{ikQ} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$ ограничены, и*

$$R_{ik}^* y(t) = \sum_{j=-N}^{N} b_{ik}^j y(t + j\tau);\ R_{ikQ}^* = P_Q R_{ik}^* I_Q. \tag{1.8}$$

Лемма 1.3. *Матричные операторы R, R_Q ограничены, и*

$$R^* = \begin{pmatrix} R_{11}^* & \cdots & R_{n1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1n}^* & \cdots & R_{nn}^* \end{pmatrix}^T,\ R_Q^* = \begin{pmatrix} R_{11Q}^* & \cdots & R_{n1Q}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1nQ}^* & \cdots & R_{nnQ}^* \end{pmatrix}^T.$$

Лемма 1.4. *Матричный оператор R (R_Q) самосопряженный тогда и только тогда, когда*

$$R_{ik} = R_{ki}^*\ (R_{ikQ} = R_{kiQ}^*).$$

Определение 1.1. Ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H называется положительным, если для любого ненулевого $y \in H$

$$(Ay, y)_H > 0.$$

Определение 1.2. Ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H называется положительно определенным, если существует константа $c > 0$ такая, что для всех $y \in H$

$$(Ay, y)_H \geq c(y, y)_H.$$

Лемма 1.5. *Пусть R - положительный оператор. Тогда R_Q тоже является положительным оператором.*

Для изучения свойств оператора R_Q введем некоторые дополнительные обозначения. Если $0 < \theta < 1$, мы обозначаем

$$Q_{1s} = ((s-1)\tau, (s-1+\theta)\tau), s = 1, ..., N+1$$

и

$$Q_{2s} = ((s-1+\theta)\tau, s\tau), s = 1, ..., N.$$

Если $\theta = 1$, обозначим

$$Q_{1s} = ((s-1)\tau, s\tau), s = 1, ..., N+1.$$

Таким образом, получаем два класса непересекающихся интервалов, если $0 < \theta < 1$, и только один класс подынтервалов, если $\theta = 1$. Каждые два интервала одного класса могут быть получены из другого с помощью сдвига на $j\tau$.

Пусть $P_\alpha : L_2^n(0,d) \to L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s})$ - оператор ортогональной проекции на $L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s})$, где

$$L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s}) = \{y \in L_2^n(0,d) : y(t) = 0, t \in (0,d) \setminus \bigcup_s Q_{\alpha s}\};$$

если $\theta < 1$, тогда $\alpha = 1, 2$; если $\theta = 1$, тогда $\alpha = 1$ и P_α - тождественный оператор.

Лемма 1.6. $L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s})$ *- инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем изоморфизм

$$U_\alpha : L_2(\bigcup_s Q_{\alpha s}) \to L_2^K(Q_{\alpha 1})$$

по формуле

$$(U_\alpha u)_k(t) = u(t + (k-1)\tau), \quad t \in Q_{\alpha 1},$$

$k = 1, ..., K; K = N+1$, если $\alpha = 1; K = N$, если $\alpha = 2$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств

$$\widetilde{U}_\alpha : L_2^n(\bigcup_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$$

по формуле

$$(\widetilde{U}_\alpha y)(t) = ((U_\alpha y_1)^T, ..., (U_\alpha y_n)^T)^T(t),$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in L_2^n(0,d), \quad (U_\alpha y_j)(t) = ((U_\alpha y_j)_1(t), ..., (U_\alpha y_j)_K(t))^T.$

Для каждой $\alpha = 1,2$ рассмотрим блочную матрицу $R_\alpha = \{R_{ik\alpha}\}_{i,k=1}^n$. R_{ik1} - матрица порядка $(N+1)\times(N+1)$ с элементами $r_{lp} = b_{ik}^{p-l}$, и R_{ik2} - матрица порядка $N \times N$, полученная из R_{ik1} вычеркиванием последнего столбца и последней строки.

Лемма 1.7. *Оператор*

$$R_{Q\alpha} = \widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} : L_2^{nK}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$$

является оператором умножения на матрицу R_α, *где* $K = N+1$, *если* $\alpha = 1,\ K = N$, *если* $\alpha = 2$.

Из леммы 1.7 получим следующее утверждение:

Лемма 1.8.

$$\sigma(R_Q) = \begin{cases} \sigma(R_1) \cup \sigma(R_2), & \textit{если } \theta < 1; \\ \sigma(R_1), & \textit{если } \theta = 1, \end{cases}$$

где $\sigma(\cdot)$ *- спектр оператора.*

Из леммы 1.8 выводим следующий результат:

Лемма 1.9. *Если оператор* R_Q *- положительный, то оператор* R_Q *положительно определенный.*

1.2 Связь между вариационной и краевой задачами

Покажем, что вариационная задача (1.4), (1.2), (1.3) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — решение вариационной задачи (1.2)–(1.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ - произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3) для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y+sv) = F(s)$. Поскольку $J(y+sv) \geq J(y)$ $(s \in \mathbb{R})$, мы имеем

$$\frac{dF}{ds}\Big|_{s=0} = 0. \tag{1.9}$$

Положим

$$B(y,v) := \int\limits_0^T \left(\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)\right)^T \times$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t)v'(t-l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t-l\tau)\right) d\tau. \tag{1.10}$$

Из (1.9) следует, что

$$B(y,v) = 0, v \in \widetilde{W}. \tag{1.11}$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок. Обозначим

$$B_{m,l}(y,v) = \int_0^T \left(A_m(t)y'(t-m\tau) + B_m(t)y(t-m\tau)\right)^T \times$$
$$\times \left(A_l(t)v'(t-l\tau) + B_l(t)v(t-l\tau)\right) d\tau.$$

В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{m,l}(y,v) = \int_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-m)\tau) + B_m(\xi+l\tau)\times$$
$$\times y(\xi+(l-m)\tau))^T (A_l(\xi+l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Вернемся к старой переменной t, полагая $t = \xi$. Учитывая, что $v(t) = 0$ при

$t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$, будем иметь

$$B_{m,l}(y, v) = \int_0^{T-M\tau} (A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) + B_m(t + l\tau)\times$$

$$\times y(t + (l - m)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t) + B_l(t + l\tau)v(t))dt. \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (1.10), получим:

$$B(y, v) = \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t))+$$

$$+[(A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau))^T B_l(t + l\tau)- \tag{1.13}$$

$$-((B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))^T A_l(t + l\tau))'+$$

$$+(B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))^T B_l(t + l\tau)]v(t)\}dt.$$

Из (1.13) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{1.14}$$

В силу (1.14), подставляя (1.13) в (1.11), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau))'+$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} \{B_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau)- \tag{1.15}$$

$$-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau))'+$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau)\} = 0 \ (t \in (0, T - M\tau).$$

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (1.15) почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$.

Определение 1.3. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.15), (1.2), (1.3), если выполняется условие (1.14) и вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет системе уравнений (1.15) а также краевым условиям (1.2), (1.3).

Очевидно, вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является обобщенным решением задачи (1.15), (1.2), (1.3) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному тождеству (1.13) для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и краевым условиям (1.2), (1.3).

Мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ доставляет минимум вариационной задаче (1.4) с краевыми условиями (1.2), (1.3), тогда y является обобщенным решением краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3).

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ - обобщенное решение краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y + v) = J(y) + J(v) + 2B(y, v),$$

где $J(v)$ - неотрицательный квадратичный функционал. Так как y - обобщенное решение задачи (1.15), (1.2), (1.3), тогда $B(y, v) = 0$. Следовательно,

$$J(y + v) \geq J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ доставляет минимум функционалу (1.4) с краевыми условиями (1.2), (1.3) тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3).*

1.3 Разрешимость краевой задачи

Для доказательства существования и единственности обобщенного решения краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3), получим некоторые вспомогательные результаты.

Обозначим

$$J_1(w) = \int_0^T \left| \sum_{l=0}^{M} A_l w'(t - l\tau) \right|^2 dt,$$

где $w \in \widetilde{W}$.

Лемма 1.10. Существует константа $c_1 > 0$ такая, что для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J_1(w) \geq c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}. \qquad (1.16)$$

Доказательство.

1. Сначала докажем, что для всех $0 \neq y \in L_2(\mathbb{R})$

$$J_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{M} A_m y(t - m\tau) \right|^2 dt > 0. \qquad (1.17)$$

Используя преобразование Фурье, из теоремы Планшереля получаем

$$J_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=0}^{M} (A_m e^{-im\xi}) \hat{y}(\xi) \right|^2 d\xi,$$

где

$$\hat{y}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi} y(t) dt$$

- преобразование Фурье функции $y(t)$. Так как

$$\Phi(\xi) := \det(\sum_{m=0}^{M} A_m e^{-im\xi})$$

является аналитической функцией и $\hat{y}(\xi) \neq 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$, тогда

$$J_0(y) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\det(\sum_{m=0}^{M} A_m e^{-im\xi}) = 0 \qquad (1.18)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}$.

С другой стороны, $\det A_0 \neq 0$. Поэтому многочлен $\det(\sum\limits_{m=0}^{M} A_m\lambda^m) = 0$ имеет не более nM корней $\lambda_1, ..., \lambda_{nM}$. Следовательно, уравнение (1.18) может иметь только счетное число действительных корней $\xi_1, \xi_2, ...$ Таким образом, $J_0(y) > 0$.

2. Теперь можем доказать неравенство (1.16).

Пусть $R_Q = P'_Q R I'_Q$, где $R : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R}), I'_Q : L_2^n(0, T - M\tau) \to L_2^n(\mathbb{R})$, $P'_Q : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(0, T - M\tau)$ - ограниченные операторы, заданные с помощью

$$Ry(t) = \sum_{l,m=0}^{M} A_m^T A_l y(t - (l - m)\tau),$$

I'_Q - оператор продолжения нулем за пределы $(0, T - M\tau)$, P'_Q - оператор сужения функций на $(0, T - M\tau)$. Тогда аналогично (1.10) из (1.17) получаем

$$J_1(w) = J_0(w') = (R_Q w', w')_{L_2^n(0,T-M\tau)} > 0. \tag{1.19}$$

для всех $0 \neq w \in \widetilde{W}$. Здесь мы предполагаем, что $w(t) = 0$ для $t \in \mathbb{R} \backslash (0, T - M\tau)$. В силу (1.19) самосопряженный оператор $R_Q : L_2^n(0, T - M\tau) \to L_2^n(0, T - M\tau)$ положителен. Из лемм 1.5 и 1.9 следует, что он положительно определен. Наконец, используя теорему об эквивалентных нормах, получаем

$$J_1(w) \geq c_0 ||w'||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \geq c_1 ||w||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)},$$

где $c_0, c_1 > 0$ не зависит от w. $\square$

Лемма 1.11. Существуют такие константы $c_2, c_3 > 0$, что для всех $w \in \widetilde{W}$

$$c_2 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq J(w) \leq c_3 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Сначала докажем левую часть (1.20).

Предположим противное - что неравенство (1.20) не выполняется ни для какого $c_2 > 0$. Тогда для любого $k = 1, 2, ...$ существует функция $w_k \in \widetilde{W}$ такая, что

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}.$$

Без потери общности предположим, что

$$||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1. \tag{1.21}$$

В противном случае рассмотрим $w_k/||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}$. Тогда

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k}. \tag{1.22}$$

С другой стороны, из неравенства $(\alpha+\beta)^2 \geq \alpha^2/2 - \beta^2 (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ и лемм 1.10 и 1.2 для каждого $v \in \widetilde{W}$ получаем

$$J(v) \geq k_1||v||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} - k_2||v||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)}, \tag{1.23}$$

где $k_1, k_2 > 0$ не зависят от v.

В силу компактности оператора вложения из $\widetilde{W}$ в $L_2^n(-M\tau, T)$, единичный шар в $\widetilde{W}$ является компактным в $L_2^n(-M\tau, T)$. Это означает, что существует подпоследовательность $w_{k_l} \in \widetilde{W}$, которая сходится к w_0 в пространстве $L_2^n(-\tau, T)$, т. е.

$$||w_{k_l} - w_{k_m}||_{L_2^n(0,T-M\tau)} \to 0,\ l, m \to \infty.$$

Таким образом, из (1.22), (1.23) следует, что

$$k_1||w_{k_l} - w_{k_m}||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq k_2||w_{k_l} - w_{k_m}||^2_{L_2(0,T-M\tau)}+$$

$$+J(w_{k_l} - w_{k_m}) \leq k_2||w_{k_l} - w_{k_m}||^2_{L_2(0,T-M\tau)}+$$

$$+2/k_l + 2/k_m \to 0, k, m \to \infty.$$

Следовательно, $w_{k_l} \to w_0$ в пространстве $\widetilde{W}$.

Переходя к пределу в (1.21), получаем

$$||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Сходимость к пределу в (1.22) дает

$$J(w_0) = \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m w_0'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m w_0(t-m\tau) \right|^2 dt = 0, \tag{1.24}$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{M} A_m w_0'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m w_0(t-m\tau) = 0 \tag{1.25}$$

для почти всех $t \in (0,T)$.

Так как $w_0 \in \widetilde{W}$, то функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0 \ (t \in [-M\tau, 0]). \tag{1.26}$$

Тогда, если $0 < t \leq \tau$, уравнение (1.25) принимает вид

$$A_0 w_0'(t) + B_0 w_0(t) = 0, \ (t \in (0,\tau)), \tag{1.27}$$

и $w_0(0) = 0$. Следовательно,

$$w_0(t) = 0 \ (t \in [0,\tau]). \tag{1.28}$$

Тогда уравнение (1.25) на интервале $t \in (\tau, 2\tau)$ примет вид (1.27) и $w_0(\tau) = 0$. Следовательно, $w_0(t) = 0$ $(t \in [\tau, 2\tau])$. Для конечного числа шагов имеем $w_0(t) = 0$ $(t \in [0, T - M\tau])$. Но это невозможно, так как

$$||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Осталось доказать правую часть (1.20).

Из неравенства Коши - Буняковского следует, что

$$|J(w)| = |B(w,w)| \leq k_3||w'||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} + k_4||w||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leq c_3||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)},$$

где $k_3, k_4 > 0$ не зависят от w.

$\square$

Теорема 1.2. *Для каждого $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ существует единственное обобщенное решение $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3), и*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leq c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{1.29}$$

где $c > 0$ не зависит φ.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad -M\tau \le t \le 0; \\ 0, & \text{если} \quad T - M\tau \le t \le T; \\ \varphi(0) - \varphi(0)t/(T - M\tau), & \text{если} \quad 0 < t < T - M\tau. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ и

$$||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \le k_1 ||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{1.30}$$

где $k_1 > 0$ не зависит φ.

Пусть $x = y - \Phi$, тогда $x \in \widetilde{W}$. Интегральное тождество (1.14) принимает вид

$$B(\Phi, v) + B(x, v) = 0, \; v \in \widetilde{W}. \tag{1.31}$$

По лемме 1.11 в пространстве $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = B(x, v). \tag{1.32}$$

Поэтому уравнение (1.31) можно переписать в виде

$$B(\Phi, v) + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0. \tag{1.33}$$

При фиксированном $\Phi \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ функционал $B(\Phi, v)$ линеен по $v \in \widetilde{W}$. Из неравенства Коши-Буняковского и неравенства (1.30), а также формулы (1.32) получаем

$$\begin{aligned} |B(\Phi, v)| \le k_2 ||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} ||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \le \\ \le k_3 ||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)} ||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \le \\ \le k_4 ||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)} ||v||'_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Таким образом, функционал $B(\Phi, v)$ ограничен на $\widetilde{W}$. В силу (1.34) норма функционала $B(\Phi, v)$ в $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ не превосходит $k_4 ||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}$. Согласно теореме Рисса, существует функция $F \in \widetilde{W}$ такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}$$

и

$$||F||'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}. \tag{1.35}$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (1.33) можно переписать как

$$(x,v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} + (F,v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (1.15), (1.2), (1.3) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi - F$, при этом в силу (1.30), (1.35) выполняется неравенство (1.29) выполняется. Это доказывает теорему. □

Глава 2. Система управления с последействием нейтрального типа с переменными коэффициентами

Эта глава посвящена задаче об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, которая имеет единственное обобщенное решение. Доказано, что гладкость этого решения может нарушаться на рассматриваемом интервале и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Получены достаточные условия на начальную функцию, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале. Основные результаты этой главы опубликованы в статьях [2, 3, 5, 6].

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.1}$$

Здесь $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$,

$\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{2.3}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min. \tag{2.4}$$

2.2 Связь между вариационной и краевой задачами

Для того, чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N},$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\le i\le k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2^n(0, T - M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \ge J(y),\ s \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0, \tag{2.5}$$

$$B(y, v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau) \right)^T \times \\ \times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t) v'(t - l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t) v(t - l\tau) \right) dt. \tag{2.6}$$

Из равенства (2.5) следует, что

$$B(y, v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{2.7}$$

Обозначим

$$B_{m,l}(y,v) := \int\limits_0^T (A_m(t)y'(t-m\tau) + B_m(t)y(t-m\tau))^T \times$$
$$\times (A_l(t)v'(t-l\tau) + B_l(t)v(t-l\tau))\, dt. \quad (2.8)$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок под интегралом в равенстве (2.8).

В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{m,l}(y,v) = \int_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi + l\tau)y'(\xi + (l-m)\tau) + B_m(\xi + l\tau)\times$$
$$\times y(\xi + (l-m)\tau))^T (A_l(\xi + l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi + l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Возвращаясь к старой переменной t, полагая $t = \xi$, и учитывая, что $v(t) = 0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$, имеем

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} (A_m(t + l\tau)y'(t + (l-m)\tau) + B_m(t + l\tau) \times$$
$$\times\, y(t + (l-m)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t) + B_l(t + l\tau)v(t))dt. \quad (2.9)$$

Из (2.6), (2.8) и (2.9) следует, что

$$B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(A_m(t + l\tau)y'(t + (l-m)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t)) +$$
$$+[(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau) - ((B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T A_l(t+l\tau))' +$$
$$+\, (B_m(t + l\tau)y(t + (l-m)\tau))^T B_l(t + l\tau)]v(t)\}dt. \quad (2.10)$$

Из (2.10) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.7), в силу (2.11) мы можем произвести интегрирование по частям. Поскольку $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ — произвольная функция, мы получим

$$- \Big(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau)\Big)' +$$
$$+ \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau)A_m(t + l\tau)y'(t + (l - m)\tau) -$$
$$- \Big(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau)\Big)' +$$
$$+ \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau) = 0,\ t \in (0, T - M\tau). \quad (2.12)$$

Таким образом, вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (2.12) почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$.

Определение 2.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.12), (2.2), (2.3), если выполняется условие (2.11), $y(t)$ почти всюду на $(0, T - M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (2.12), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 2.1.

Определение 2.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.12), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T v'(t)dt +$$
$$+ \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T -$$
$$-((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T +$$
$$+(B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T\}v(t)dt = 0 \quad (2.13)$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)$ и краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Функционал (2.4) с краевыми условиями (2.2), (2.3) достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3).*

Имеет место следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $det A_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$*

$$J_0(w) \geq c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \quad (2.14)$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от w,

$$J_0(v) := \int\limits_0^T (\sum_{k=0}^{M} A_k(t)v'(t-k\tau))'dt. \quad (2.15)$$

Доказательство. 1. Предположим противное: для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J_0(w_k) \leq \frac{1}{k}||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}. \tag{2.16}$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Тогда в силу компактности вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0,T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\} \subset \widetilde{W}$, сходящаяся в $L_2^n(0,T-M\tau)$ при $m \to \infty$ к некоторой вектор-функции $w_0 \in L_2^n(0,T-M\tau)$.

2. Пусть $0 < t < \tau$. Тогда выражение $(R_0 w'_{k_m})(t)$ имеет вид

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t).$$

Следовательно, в силу невырожденности матрицы $A_0(t)$ и неравенства (2.16) имеем $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(0,\tau)$ при $m \to \infty$.

3. Пусть теперь $\tau < t < 2\tau$. Тогда

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t) + A_1(t) w'_{k_m}(t-\tau).$$

Отсюда в силу неравенства (2.16) и п.2 доказательства имеем

$$(R_0 w'_{k_m})(t) \to 0 \text{ и } A_1(t) w'_{k_m}(t-\tau) \to 0 \text{ в } L_2^n(\tau, 2\tau) \text{ при } m \to \infty.$$

Следовательно, поскольку матрица $A_0(t)$ - невырождена, то $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(\tau,2\tau)$ при $m \to 0$.

4. Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(l\tau, L)$ для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что $2\tau \leq l\tau < L$, где $L = min\{(l+1)\tau, T-M\tau\}$. Таким образом, $w_0 \in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$ и $w_0 = const \neq 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает лемму 2.1. □

Используя лемму 2.1, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $detA_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ *существует единственное обобщенное решение* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *краевой задачи* (2.12), (2.2), (2.3), *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leq c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.17}$$

где $c > 0$ *— постоянная, не зависящая от* φ.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{если} \quad -M\tau\le t\le 0;\\ 0, & \text{если} \quad T-M\tau\le t\le T;\\ \varphi(0)-\varphi(0)t/(T-M\tau), & \text{если} \quad 0<t<T-M\tau.\end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$. Кроме того, в силу непрерывности оператора вложения $W_2^1(-M\tau,T)$ в $C[-M\tau,0]$ имеем

$$||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}\le k_1||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.18}$$

где $k_1>0$ – постоянная, не зависящая от φ.

Пусть $x=y-\Phi$, тогда $x\in\widetilde{W}$. Интегральное тождество (1.11) примет вид

$$B(\Phi,v)+B(x,v)=0,\ \ v\in\widetilde{W}. \tag{2.19}$$

Поскольку $B(v,v)=J(v), v\in\widetilde{W}$ по лемме 3.2 в пространстве $\mathring{W}_2^1(0,T-M\tau)$ мы можем ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x,v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=B(x,v). \tag{2.20}$$

Следовательно, тождество (2.19) может быть записано в виде

$$B(\Phi,v)+(x,v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=0. \tag{2.21}$$

Для фиксированного $\Phi\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ функционал $B(\Phi,v)$ линеен по $v\in\widetilde{W}$. Используя неравенство Коши-Буняковского и неравенства (2.18), (**??**) мы получаем

$$\begin{aligned}|B(\Phi,v)|\le k_2||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\le\\ \le k_3||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\le\\ \le k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}||v||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)},\end{aligned} \tag{2.22}$$

где $k_2,k_3,k_4>0$ – постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированном Φ функционал $B(\Phi,v)$ ограничен по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенства (2.22) норма функционала $B(\Phi,v)$ на $\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$ не превышает $k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}$. Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует функция $F\in$

$\widetilde{W}$такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}$$

и

$$||F||'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq k_4 ||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}. \tag{2.23}$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (2.21) можно записать в виде

$$(x, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} + (F, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (2.12), (2.2), (2.3) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi - F$, при этом в силу (2.18) и (2.23) выполняется неравенство (2.17). Это доказывает теорему. □

2.3 Свойства разностных операторов

Положим $d := T - M\tau$. Пусть $d = (N + \theta)\tau$, где $N \in \mathbb{N},\ 0 < \theta \leq 1$.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Если $0 < \theta < 1$, обозначим

$$Q_{1s} = ((s-1)\tau, (s-1+\theta)\tau),\ s = 1, \ldots, N+1$$

и

$$Q_{2s} = ((s-1+\theta)\tau, s\tau),\ s = 1, \ldots, N.$$

Если $\theta = 1$, обозначим

$$Q_{1s} = ((s-1)\tau, s\tau),\ s = 1, \ldots, N+1.$$

Таким образом, мы имеем два семейства непересекающихся интервалов, если $0 < \theta < 1$, и одно семейство, если $\theta = 1$; причем каждые два интервала одного семейства получаются друг из друга сдвигом на некоторое число.

Не ограничивая общности, будем предполагать $M = N$.

Введем оператор $R : L_2^n(0, d) \to L_2^n(0, d)$ по формуле

$$(Rx)(t) = \sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) x(t + (l-m)\tau). \tag{2.24}$$

Лемма 2.2. *Оператор* $R : L_2^n(0,d) \to L_2^n(0,d)$ *самосопряженный, т. е. для любых* $x, y \in L_2^n(\mathbb{R})$ *выполняется равенство*

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Действительно, при любых $x, y \in L_2^n(\mathbb{R})$, делая замену $t' = t + (l-m)\tau$, получим

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau))y(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t')(\sum_{l,m=0}^{M} A_m^T(t'+m\tau)A_l(t'+m\tau)y(t'+(m-l)\tau))dt'.$$

Обозначая t' через t и меняя местами индексы l, m, имеем

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))dt = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

$\square$

Запишем оператор R в виде

$$(Ry)(t) := \sum_{s=-M}^{M} C_s(t)y(t+s\tau), \tag{2.25}$$

где

$$C_s(t) := \sum_{l,m:l-m=s} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau) \tag{2.26}$$

— матрица порядка $n \times n$ с элементами $c_s^{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. По построению $c_s^{ij}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$.

Обозначим $Q := (0, d)$. Введем ограниченные операторы $\hat{I}_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(\mathbb{R})$ и $\hat{P}_Q : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(Q)$ следующим образом: $(\hat{I}_Q x)(t) = x(t)$, $(t \in (0,d))$, $(\hat{I}_Q x)(t) = 0$ $(t \notin (0,d))$ и $(\hat{P}_Q y)(t) = y(t), (t \in (0,d))$. Обозначим $R_Q = \hat{P}_Q R \hat{I}_Q$. Из леммы 2.2 вытекает следующий результат.

Лемма 2.3. *Оператор $R_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ ограниченный и самосопряженный.*

Пусть $P_\alpha : L_2^n(Q) \to L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — оператор ортогонального проектирования $L_2^n(Q)$ на $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$, где $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) = \{y \in L_2^n(Q) : y(t) = 0, t \in (0,d)\setminus \bigcup\limits_s Q_{\alpha s}\}$, $\alpha = 1, 2$, если $\theta < 1$; $\alpha = 1$ и P_α — единичный оператор, если $\theta = 1$.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 2.4. $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — *инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем оператор $U_\alpha : L_2(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^K(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(U_\alpha y)_k(t) = y(t + (k-1)\tau), t \in Q_{\alpha 1}, \tag{2.27}$$

где $k = 1, \dots, K; K = N + 1$, если $\alpha = 1; K = N$, если $\alpha = 2$.

Введем теперь изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $\widetilde{U}_\alpha : L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(\widetilde{U}_\alpha y)(t) = ((U_\alpha y_1)^T, \dots, (U_\alpha y_n)^T)^T(t), \tag{2.28}$$

где

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T \in L_2^n(0,d), \quad (U_\alpha y_j)(t) = ((U_\alpha y_j)_1(t), \dots, (U_\alpha y_j)_K(t))^T.$$

Для каждого $\alpha = 1, 2$ рассмотрим блочную матрицу

$$R_\alpha(t) = \{R_{\alpha kl}(t)\}_{l,k=1}^n. \tag{2.29}$$

Здесь R_{1kl} — квадратные матрицы порядка $(N+1)\times(N+1)$ с элементами

$$r_{ij}^{1kl} = c_{j-i}^{kl}(t + (i-1)\tau), \ i, j = 1, \dots, N+1, \tag{2.30}$$

R_{2kl} — квадратные матрицы порядка $N \times N$ с элементами

$$r_{ij}^{2kl} = c_{j-i}^{kl}(t + (i-1)\tau), \ i, j = 1, \dots, N. \tag{2.31}$$

Лемма 2.5. *Оператор* $R_{Q\alpha} = \widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} : L_2^{nK}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$ *является оператором умножения на симметричную матрицу* $R_\alpha(t)$.

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$. Обозначим $v = \widetilde{U}_\alpha^{-1} V \in L_2^n(\bigcup\limits_l Q_{sl})$. В силу формулы (2.27) и определения оператора R_Q мы имеем

$$(R_{Q\alpha}V)_{(k-1)K+i}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} V)_{(k-1)K+i}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q v)_{(k-1)K+i}(t) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{s} C_s^{kl}(t+(i-1)\tau) v_l(t+(i-1+s)\tau) \quad (t \in Q_{\alpha 1}). \qquad (2.32)$$

Здесь мы суммируем по s таким, что $1 \le i+s \le K$.

Пусть $l := i+s$. Тогда из (2.32) и (2.31) следует, что

$$(R_{Q\alpha}V)_{(k-1)K+i}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{K} C_{j-i}^{kl}(t+(i-1)\tau) v_l(t+(j-1)\tau) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{K} r_{ij}^{\alpha kl}(t) V_{(l-1)K+j}(t).$$

Таким образом, мы доказали, что оператор $R_{Q\alpha}$ является умножением на матрицу R_α в пространстве $L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$. Отсюда и из леммы 2.3 следует симметричность матрицы R_α. $\square$

Также отметим следующее равенство:

$$\widetilde{U}_\alpha R_Q y = R_\alpha \widetilde{U}_\alpha y, \quad y \in L_2(Q) \qquad (2.33)$$

Введем $B_{mp}(t)$ как алгебраическое дополнение элемента r_{mp} матрицы $R_1, m, p = 1, ..., n \times (N+1)$. Будем записывать индексы следующим образом: $B_{j+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(t)$, где $i, j = 1, ..., N+1, k, l = 1, ..., n$. Таким образом, $B_{j+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(t)$ соответствует элементу матрицы R_{1kl}, находящемуся в $i-$ой строке и $j-$ом столбце. Аналогичным образом обозначим через $r_{j+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)} = r_{ij}^{kl}$ элемент матрицы R_1, находящийся в $i-$ой строке и $j-$ом столбце матрицы R_{1kl}.

Обозначим через $\mathcal{B}_1$ матрицу, полученную вычеркиванием первой строки и первого столбца из каждой матрицы $R_{1kl}, k, l = 1, ..., n$. Важно, что матрица $\mathcal{B}_1$

совпадает с матрицей, полученной вычеркиванием последней строки и последнего столбца в каждой матрице $R_{1kl}, k, l = 1, ..., n$, если коэффициенты $a_{ij}^m(t)$ - $\tau-$периодические.

Лемма 2.6. *Оператор* $R_Q : \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau) \to W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ *непрерывный и*

$$(R_Q\overline{y})' = R_Q\overline{y}' + R_Q'\overline{y}$$

для любых $\overline{y} \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, *где*

$$R_Q' = \hat{P}_Q R' \hat{I}_Q,\ (R'y)(t) := \sum_{s=-N}^{N} C_s'(t) y(t + s\tau).$$

Доказательство очевидно.

Обозначим через $W_{2,\Gamma}^{1,n}$ подпространство функций $w \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) w_k((i-1)\tau) = 0, \tag{2.34}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N+1} B_{N+1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta) w_k((\theta + i - 1)\tau) = 0, \tag{2.35}$$

где $l = 1, ..., n$.

Лемма 2.7. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$ *и пусть коэффициенты* $a_{ij}^m(t)$ - $\tau-$*периодические. Тогда оператор* R_Q *отображает* $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ *на пространство* $W_{2,\Gamma}^{1,n}(0, T - M\tau)$ *непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. Докажем, что $R_Q(\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)) \subset W_{2,\Gamma}^{1,n}(0, T - M\tau)$. Пусть $y \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$. Докажем, что $R_Q y \in W_{2,\Gamma}^{1,\Gamma}(0, T - M\tau)$. Поскольку $y(0) = 0$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0)\ (R_Q y)_k((i-1)\tau)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0)\ (\sum_{m=1}^{n} R_{kmQ} y_m)((i-1)\tau)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n} (\widetilde{U}_1 R_{1kmQ} y_m)_i(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \ \sum_{m=1}^{n}(R_{1km}\widetilde{U}_1 y_m)_i(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \ \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=2}^{N+1} r_{ij}^{1km} y_m((j-1)\tau)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=2}^{N+1} y_m((j-1)\tau) \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \ r_{j+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) = 0.$$

Получаем, что если $y \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, равенство (2.34) выполняется. Следовательно, $R_Q y \subset W_{2,\Gamma}^{1,n}(0, T - M\tau)$. Равенство (2.35) рассматривается аналогично.

Теперь докажем обратное вложение: $W_{2,\Gamma}^{1,n}(0, T - M\tau) \subset R_Q(\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau))$. Пусть $w \in W_{2,\Gamma}^{1,n}(0, T - M\tau)$. Согласно лемме 2.3 оператор $R_{Q\alpha} : L_2^{nK}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$ имеет ограниченный обратный оператор $R_{Q\alpha}^{-1} : L_2^{nK}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nK}(Q_{\alpha 1})$. Покажем, что $y = R_{Q\alpha}^{-1} w \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$. Без потери общности предположим, что $\theta = 1$. Очевидно, что $y \in W_2^{1,n}((s-1)\tau, s\tau)$. Таким образом, достаточно показать, что $y_m(l\tau + 0) = y_m(l\tau - 0)$ и $y_m(0) = y_m(d) = 0,\ l = 1, ..., N; m = 1, ..., n$. Используя (2.34), получим

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \ (R_Q y)_k((i-1)\tau)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \ (\sum_{m=1}^{n} R_{kmQ} y_m)((i-1)\tau)$$

$$= \sum_{m,k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) r_{j+(m-1)(N+1)}^{i+(l-1)(N+1)} y_m((j-1)\tau)$$

$$= det\ R_1(0) \times y_m(0) = 0,$$

$m = 1, ..., n$. Т.к. $detR_1(t) \neq 0$, получаем, что $y_m(0) = 0, m = 1, ..., n$. Используя (2.35) получим $y_k(T - M\tau) = 0, k = 1, ..., n$. Теперь покажем, что $y \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, т.е. $y(l\tau + 0) = y(l\tau - 0), l = 1, ..., N$. Пусть $\phi_{l+(k-1)(N+1)} = y_k(l\tau + 0), l = 0, ..., N; \psi_{l+(k-1)(M+1)} = y_k(l\tau - 0), l = 1, ..., N + 1$. Тогда, т.к.

$y \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, мы получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N+1} r_{i+1,l}^{p,k}\phi_{l-1+(k-1)(N+1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N+1} r_{i,l}^{p,k}\psi_{l+(k-1)(N+1)},$$

$i = 1, ..., N; p = 1, ..., n$. Согласно краевым условиям

$$\phi_{0+(k-1)(N+1)} = \psi_{N+1+(k-1)(N+1)} = 0.$$

Отсюда и из последнего равенства получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N} r_{i+1,l+1}^{p,k}\phi_{l+(k-1)(N+1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N} r_{i,l}^{p,k}\psi_{l+(k-1)(N+1)}.$$

Из равенства (2.31) и $\tau-$периодичности коэффициентов $a_{ij}^{m}(t)$ выводим равенство

$$r_{i,l}^{p,k}(t) = r_{i+1,l+1}^{p,k}(t).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1} r_{i,l}^{p,k}(t)(\phi_{l+(k-1)(N+1)} - \psi_{l+(k-1)(N+1)}) = 0,$$

$i = 1, ..., N; p = 1, ..., n$. Из доказательства теоремы 2.3 (см. ниже) следует, что $det\mathcal{B}_1(0) \neq 0$. Это означает, что

$$\phi_{l+(k-1)(N+1)} = \psi_{l+(k-1)(N+1)}, l = 1, ..., N; k = 1, ..., n.$$

Таким образом, $y \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$. $\square$

2.4 Гладкость обобщенных решений на подынтервалах

Гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение. С другой стороны, гладкость обобщенных решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Приведем теорему о гладкости обобщенного решения на подынтервалах.

Теорема 2.3. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда обобщенное решение задачи* (2.12), (2.2), (2.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала* $(0, d)$:

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau),\ j = 1, \ldots, N+1$, *если* $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau),\ j = 1, \ldots, N+1$; *и* $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau),\ j = 1, \ldots, N$, *если* $\theta < 1$.

Доказательство.

1. По теореме о продолжении функций в пространстве Соболева для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ существует $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ такая, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-M\tau, 0]$, $\Phi(t) = 0$ при $t \in [T - M\tau, T]$ и

$$||\Phi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,T)} \leq k_1 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.36}$$

где константа $k_1 > 0$ не зависит от φ.

Введем вектор-функцию $x(t) = y(t) - \Phi(t) \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Поскольку $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$, в силу (2.11) $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) x'(t + (l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{2.37}$$

Таким образом, вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$ системе дифференциально-разностных уравнений

$$\mathcal{A}_R^0 x := -(R_Q x')'(t) = F(t), \quad t \in (0, T - M\tau) \tag{2.38}$$

и краевым условиям

$$x(0) = x(T - M\tau) = 0. \tag{2.39}$$

Здесь

$$F(t) := -\mathcal{A}_R^0\Phi - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) +$$
$$+ (\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))' -$$
$$- \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) \in L_2^n(0, T-M\tau).$$

2. Повторяя в обратном порядке выкладки раздела 2, сделанные при выводе системы дифференциально-разностных уравнений (2.12) из интегрального тождества (2.7), в силу леммы 2.1 мы получим неравенство

$$(\mathcal{A}_R^0 w, w)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = J_0(w) \geq c_1||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \tag{2.40}$$

для любых $w \in C_0^{\infty,n}(0, T-M\tau) := \prod\limits_{j=1}^{n} C_0^{\infty}(0, T-M\tau)$.

Будем предполагать, что $supp\ w \subset \bigcup\limits_s Q_{\alpha s}$. Обозначим $W_\alpha = \widetilde{U}_\alpha w$. Тогда из равенства (2.28) и лемм 2.3, 2.5 следует, что

$$-((R_\alpha W_\alpha')', W_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})} \geq c_1||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}. \tag{2.41}$$

Из (2.38) и формулы Лейбница следует, что вектор-функция $W_\alpha \in W_2^{1,nK}(Q_{\alpha 1})$ удовлетворяет почти всюду в $Q_{\alpha 1}$ системе дифференциальных уравнений

$$-R_\alpha(t)(\widetilde{U}_\alpha x)''(t) = F_0(t) \quad (t \in Q_{\alpha 1}), \tag{2.42}$$

где $F_0(t) = \widetilde{U}_\alpha F(t) - R_\alpha'(t)(\widetilde{U}_\alpha x)'(t) \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$.

Таким образом, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно убедиться, что $det R_\alpha(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, поскольку тогда из последней системы дифференциальных уравнений мы получим $W_\alpha \in W_2^{2,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$, т. е. $y = x + \Phi \in W_2^{2,n}(Q_{\alpha 1}),\ s = 1, \dots, N(\alpha)$.

Для доказательства того, что $det R_1(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, мы используем неравенство (2.40).

3. Пусть $t^0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$ — произвольная точка. Выберем t^1 и r так, что $[t^1 - r, t^1 +$

$r] \subset \overline{Q_{\alpha 1}} \cap (t^0-\delta, t^0+\delta)$, где $\delta > 0$ будет определено ниже. Предположим, что $W_\alpha \in C_0^{\infty, nN(\alpha)}(t^1-r, t^1+r)$. Из (2.41) следует, что

$$b_1 + b_2 \geq k_2 ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}, \qquad (2.43)$$

где

$$b_1 = (R_\alpha(t^0)W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)},$$

$$b_2 = ((R_\alpha(t) - R_\alpha(t^0))W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)}.$$

Поскольку коэффициенты матрицы $R_\alpha(t)$ равномерно непрерывны на $[0, T - M\tau]$, мы имеем

$$|b_2| \leq \epsilon(\delta) ||W_\alpha||_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)},$$

где $\epsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\epsilon(\delta) < k_2/2$. Тогда из (2.43) мы получим

$$(R_\alpha(t^0)W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} \geq \frac{k_2}{2} ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)}.$$

Получим теперь соответствующую оценку для функции $V_\alpha \in C_0^{\infty, nN(\alpha)}(-R, R)$, где $\varkappa = R/r > 1$. Сделаем замену переменной $\eta = \varkappa(t - t^1)$. Обозначим $V_\alpha(\eta) = W_\alpha(t(\eta))$. Тогда из последнего неравенства мы получим

$$(R_\alpha(t^0)V'_\alpha(\eta), V'_\alpha(\eta))_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)} = \varkappa^{-1}(R_\alpha(t^0)W'_\alpha(t), W'_\alpha(t))_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} \geq$$
$$\geq \frac{k_2}{2}\varkappa^{-1}||W'_\alpha(t)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} = \frac{k_2}{2}||V'_\alpha(\eta)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)}. \qquad (2.44)$$

Предположим, что $V_\alpha = v_\alpha Y$, где $v_\alpha \in C_0^\infty(-R, R)$, $Y \in \mathbb{C}^{nN(\alpha)}$. Пусть функция v_α продолжена нулем в $\mathbb{R} \backslash (-R, R)$. Тогда, используя преобразование Фурье, из (2.44) в силу теоремы Планшереля мы получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (R_\alpha(t^0)\xi^2 Y, Y)|\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{k_2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 |Y|^2 |\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi. \qquad (2.45)$$

Здесь

$$\hat{v}_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} v_\alpha(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

— преобразование Фурье функции $v_\alpha(\eta)$.

Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, из (2.45) следует, что

$$(R_\alpha(t^0)Y, Y) \geq \frac{k_2}{2}|Y|^2.$$

Таким образом, симметрическая матрица $R_\alpha(t^0)$ положительно определена для любого $t_0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. Следовательно, $det R_\alpha(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$.

Поэтому из (2.41) следует, что $\widetilde{U}_\alpha x \in W_2^{2,nN(\alpha)}(\overline{Q_{\alpha 1}})$, т.е. заключение теоремы 2.3 справедливо. $\square$

Рассмотрим следующую модельную задачу

$$-(R_Q x)''(t) = F(t), \;\; F \in L_2^n(0, T - M\tau), \tag{2.46}$$

$$x(0) = x(T - M\tau) = 0. \tag{2.47}$$

Ее обобщенное решение определяется аналогично решению задачи (2.12), (2.2), (2.3).

Задача (2.46), (2.47) также обладает гладкостью на подынтервалах, поэтому определены значения $x'(0+0)$ и $x'(d-0)$.

Лемма 2.8. *Предположим, что* $det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$, *коэффициенты* $a_{ij}^m(t)$ *-* $\tau-$*периодические, и* x *- обобщенное решение задачи* (2.46), (2.47)*. Тогда если*

$$x'(0+0) = x'(d-0) = 0,$$

то $x \in \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство. Для простоты предположим, что $\theta = 1$. Случай $\theta \in (0,1)$ рассматривается аналогично. Докажем, что $D(\mathfrak{L}) \subset \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$. Пусть $y \subset D(\mathfrak{L})$.

По теореме 2.3 $y_k \in W_2^2((l-1)\tau, \tau), \; l = 1, ..., N+1; \; k = 1, ..., n$. Отсюда и из вложения $W_2^2((l-1)\tau, \tau) \subset C^1[(l-1)\tau, l\tau]$, следует, что определены односторонние производные $y_k'(l\tau - 0)$ и $y_k'(l\tau + 0)$. Таким образом, в силу условия (2.47) для доказательства теоремы достаточно показать, что $y_k'(l\tau - 0) = y_k'(l\tau + 0), \; l = 1, ..., N; k = 1, ..., n$.

Из $(R_Q y)_l \in W_2^2(0,d)$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(R_{lkQ}y_k)'(m\tau-0)=\sum_{k=1}^{n}(R_{lkQ}y_k)'(m\tau+0),$$

$m=1,...,N, l=1,...,n$. Применим U_1 к обеим сторонам последнего равенства. Используя (2.33), получим

$$\sum_{k=1}^{n}(R_{1lk}U_1y_k')_m(\tau-0)=\sum_{k=1}^{n}(R_{1lk}U_1y_k')_{m+1}(0+0),$$

$m=1,...,N, l=1,...,n$. Пусть $\varphi_j^k=(U_1y_k')_m(\tau-0),\ k=1,...,n;\ j=1,...,N+1;\ \psi_l^k=(U_1y_k')_{l+1}(0+0),\ k=1,...,n;\ l=0,...,N.$. Так как $y_k'(0+0)=(U_1y_k')_1(0+0)\psi_0^k=0$ и $y_k'(d-0)=(U_1y_k')_{N+1}(\tau-0)\varphi_{N+1}^k=0$, получим следующие равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}r_{m,j}^{l,k}\varphi_j^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{N+1}r_{m+1,i}^{l,k}\psi_{i-1}^k,$$

$m=1,...,N; l=1,...,n.$

Так как в силу τ-периодичности коэффициентов $a_{ij}^m(t)$ $r_{m,j}^{l,k}(t)=r_{m+1,j+1}^{l,k}(t)$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}r_{m+1,j+1}^{l,k}(0)(\varphi_j^k-\psi_j^k)=0, \tag{2.48}$$

$m=1,...,N; l=1,...,n.$

Система (2.48) является линейной однородной системой алгебраических уравнений с матрицей $\mathcal{B}_1(0)$ относительно неизвестных $\varphi_j^k-\psi_j^k$. Поскольку по условию $det\mathcal{B}_1(0)\neq 0$, мы получим $\varphi_j^k-\psi_j^k=0,\ k=1,...,n; j=1,...,N$. Следовательно, $y_k'(j\tau-0)=y_k'(j\tau+0),\ k=1,...,n;\ j=1,...,N$. Таким образом, $y\in \mathring{W}_2^{2,n}(0,T-M\tau)$.

$\square$

Введем блочную матрицу $\mathfrak{R}$ порядка $2n\times 2n$ по формуле

$$\mathfrak{R}=\left\|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{G} & \mathrm{D}\end{array}\right\| \tag{2.49}$$

где
$$A = \left\| \sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \right\|_{k,l=1}^{n},$$
$$B = \left\| \sum_{i=1}^{N+1} (i-\tau) B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) \right\|_{k,l=1}^{n},$$
$$G = \left\| \sum_{i=1}^{N+1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta) \right\|_{k,l=1}^{n},$$
$$D = \left\| \sum_{i=1}^{N+1} (i-1+\theta)\tau B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta) \right\|_{k,l=1}^{n}.$$

Теорема 2.4. *Пусть* $detA_0(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R},\ det\mathfrak{R} \neq 0$, *а коэффициенты* $a_{ij}^m(t)$ *—* τ*-периодические, и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда существуют линейно независимые функции* $\psi_1, ..., \psi_p \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0),\ p \leq 2n$, *такие, что при выполнении условий*
$$(\varphi, \psi_j)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)} = 0,\ j = 1, ..., p, \tag{2.50}$$
обобщенное решение задачи (2.12), (2.2), (2.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *принадлежит пространству* $W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство. 1. Вначале аналогично доказательству теоремы 2.3 сведем задачу (2.12), (2.2), (2.3) к системе неоднородных линейных дифференциально-разностных уравнений с однородными краевыми условиями. По теореме о продолжении функций Соболева для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ существует $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ такая, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-M\tau, 0],\ \Phi(t) = 0$ при $t \in [T - M\tau, T]$ и
$$||\Phi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,T)} \leq k_1 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.51}$$
где $k_1 > 0$ - постоянная, не зависящаяя от φ.

Введем вектор-функцию $x(t) = y(t) - \Phi(t) \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$. Эта вектор-функция удовлетворяет уравнению (2.38) и краевым условиям (2.39). Из равенства (2.40), ограниченности оператора $\mathcal{A}_R^0 : W_2^{2,n}(-M\tau, T) \to L_2^n(0, T - M\tau)$, оценки (2.17) и неравенства (2.51) получим
$$||F||_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leq k_2 ||\Phi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,T)} \leq k_1 k_2 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.52}$$
где $k_2 > 0$ - постоянная, не зависящая от Φ.

2. Рассмотрим вектор-функцию $w = R_Q x$, где x - решение краевой задачи (2.38), (2.39).

Перепишем уравнение (2.38) в виде

$$-w''(t) = F_1(t),\ t \in (0, T - M\tau), \tag{2.53}$$

где

$$F_1(t) = F(t) - R''_Q x(t) - R'_Q x'(t) \in L_2(0, T - M\tau), \tag{2.54}$$

$$R^{(i)}_Q v(t) = \hat{P}_Q R^{(i)} \hat{I}_Q,$$

$$R^{(i)} v(t) = \sum_{l,m} (A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau))^{(i)} v(t + (l - m)\tau).$$

Аналогично доказательству теоремы 2.2 для решения задачи (2.38), (2.39) $x \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ можно установить следующую оценку:

$$||x||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq k_3 ||F||_{L_2^n(0,T-M\tau)}. \tag{2.55}$$

Отсюда и из (2.52) получим

$$||F_1||_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leq k_4 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.56}$$

где $k_3, k_4 > 0$ - константы, не зависящаие от F и φ соответственно.

Общее решение системы n линейных неоднородных дифференциальных уравнений (2.53) имеет вид

$$w(t) = C_1 + C_2 t + \int_0^t (t - s) F_1(s) ds, \tag{2.57}$$

где $C_j = (C_j^1, ..., C_j^n)^T,\ j = 1, 2.$

В силу леммы 2.7 и соотношений $w = R_Q x,\ x \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ вектор-функция $w(t)$ удовлетворяет условиям (2.34), (2.35). Подставляя (2.57) в (2.34), (2.35), получим

$$\sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{N+1} B^{i+(k-1)(N+1)}_{1+(l-1)(N+1)}(0)) C_1^k + \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{N+1} B^{i+(k-1)(N+1)}_{1+(l-1)(N+1)}(0)(i-1)\tau) C_2^k = \tag{2.58}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N+1} B^{i+(k-1)(N+1)}_{1+(l-1)(N+1)}(0) \int_0^{(i-1)\tau} ((i-1)\tau - s) F_1^k(s) ds,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N+1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta))C_1^k + \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N+1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta)(i-1+\theta)\tau))C_2^k = \quad (2.59)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta)\int_0^{(i-1+\theta)\tau} ((i-1+\theta)\tau - s)F_1^k(s)ds,$$

где $F_1(s) = (F_1^1(s), ..., F_1^n(s))^T$.

Матрица системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (2.34), (2.35) совпадает с матрицей $\mathfrak{R}$. Поскольку $det\mathfrak{R} \neq 0$, система (2.34), (2.35) имеет единственное решение $(C_1^T, C_2^T)^T$. Координаты этого решения C_j^k равны линейным комбинациям интегралов вида $\int_0^{(i-1)\tau} ((i-1)\tau - s)F_1^k(s)ds$ и $\int_0^{(i-1+\theta)\tau} ((i-1+\theta)\tau - s)F_1^k(s)ds$, $k = 1, ..., n;\ j = 1, 2$. Отсюда, а также из неравенства Коши-Буняковского и неравенства (2.56) следует, что координаты C_j^k, $k = 1, ..., n;\ j = 1, 2$, являются линейными непрерывными функционалами, зависящими от $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. Следовательно, по теоереме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существуют вектор-функции $\xi_j^l \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$, $l = 1, ..., n; j = 1, 2$, такие, что для любых $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N+1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0))C_1^k = (\varphi, \xi_1^l)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \quad (2.60)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N+1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta))C_1^k = (\varphi, \xi_2^l)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}. \quad (2.61)$$

Напомним, что $x(t)$ является решением уравнения

$$-(R_Q x(t))'' = F_1(t),\ t \in (0, T - M\tau), \quad (2.62)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x(T - M\tau) = 0, \quad (2.63)$$

ср. (2.46), (2.47).

В силу леммы 2.8, если $x(t)$ удовлетворяет также условиям (2.48), то $x \in \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$. Следовательно, $y \in W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$. Остается доказать, что условия (2.48) можно записать в виде (2.50).

В доказательстве теоремы 2.3 установлено, что $detR_1 \neq 0$ для $t \in \overline{Q_{11}}$. Тогда из условия (2.48) и формул (2.27), (2.28) получим

$$x_l'(0+0) = (\widetilde{U}_1 x')_{1+(l-1)(N+1)}(0+0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} (detR_1(0))^{-1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0)(\widetilde{U}w')_{i+(k-1)(N+1)}(0+0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} (detR_1(0))^{-1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0) w_k'((i-1)\tau+0) = \tag{2.64}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} (detR_1(0))^{-1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(0)\times$$

$$\times(C_2^k + \int_0^{(i-1)\tau} F_1^k(s)ds) = 0,\ l = 1,...,n.$$

Аналогично,

$$x_l'(d-0) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} (detR_1(\theta))^{-1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta)\times \tag{2.65}$$

$$\times(C_2^k + \int_0^{(i-1+\theta)\tau} F_1^k(s)ds) = 0,\ l = 1,...,n.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского, неравенства (2.56) и теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существуют вектор-функции $\eta_j^l \in W_2^{2,n}(-M\tau,0),\ j=1,2;\ l=1,...,n$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} (detR_1(0))^{-1} B_{1+(l-1)(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta) \int_0^{(i-1+\theta)\tau} F_1^k(s)ds) = (\varphi, \eta_1^l)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)} \tag{2.66}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N+1} (detR_1(0))^{-1} B_{l(N+1)}^{i+(k-1)(N+1)}(\theta) \int_0^{(i-1+\theta)\tau} F_1^k(s)ds) = \tag{2.67}$$

$$= (\varphi, \eta_2^l)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)},\ l = 1,...,n.$$

Из вектор-функций $\xi_j^l + \eta_j^l \in W_2^{2,n}(-M\tau,0),\ l=1,...,n; j=1,2$, выберем $p \le 2n$ линейно независимых вектор-функций и обозначим их через $\psi_i,\ i=1,...,p$. Таким образом, мы доказали, что при выполнении условий (2.50) обобщенное решение задачи (2.12), (2.2), (2.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ принадлежит пространству

$W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

$\square$

Глава 3. Система управления с последействием, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

Рассматривается система управления, описываемая системой дифференциальных уравнений запаздывающего типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Показана связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование, единственность и гладкость обобщенного решения краевой задачи на всем интервале. Основные результаты этой главы опубликованы в статье [4].

3.1 Постановка задачи

В данной работе мы рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T, \tag{3.1}$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-функция управления, $A_0(t)$ - невырожденная матрица порядка $n \times n$, $B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\ldots n}$ — матрица порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^0(t)$, $b_{ij}^m(t)$, соответственно, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t) = \varphi(t) \text{ для почти всех } t \in [-M\tau, 0], \tag{3.2}$$

где $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ – заданная вектор-функция, $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$, $L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b)$ - пространство вектор-функций со скалярным произведением

$$(v, w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i, w_i)_{L_2(a,b)},$$

где $v = (v_1, ..., v_n)^T,\ w = (w_1, ..., w_n)^T$.

Поскольку функция $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ определена п.в. на отрезке $[-M\tau, 0]$, мы зададим дополнительно начальное условие

$$y(0+0) = \varphi_0, \tag{3.3}$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ - некоторый вектор.

Рассмотрим задачу о приведении системы (3.1), (3.2) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t),\ \ 0 < t < T$, что

$$y(t) = 0,\ t \in [T - M\tau, T], \tag{3.4}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений мы будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| A_0(t) y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{3.5}$$

с краевыми условиями (3.2) – (3.4).

3.2 Связь между вариационной и краевой задачами

Будем использовать вещественные функциональные пространства, введенные в предыдущей главе.

Покажем, что вариационная задача (3.2) – (3.5) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ - решение вариационной задачи (3.2)–(3.5)), где $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Часто мы будем отожествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2(0, T - M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ - произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(0, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (3.2) – (3.4) для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \geq J(y)$ $(s \in \mathbb{R})$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0. \tag{3.6}$$

Положим

$$B(y, v) := \int_0^T \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau) \right)^T \times$$

$$\times \left(A_0(t)v'(t) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t - l\tau) \right) d\tau. \tag{3.7}$$

Из (3.6) следует, что

$$B(y, v) = 0, \ v \in \widetilde{W}. \tag{3.8}$$

В слагаемых, содержащих $v(t - l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B(y,v)=\int_0^T(A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M}B_m(t)y(t-m\tau))^TA_0(t)v'(t)dt+$$

$$+\sum_{l=0}^{M}\{\int_{-l\tau}^{T-l\tau}[A_0(\xi+l\tau)y'(\xi+l\tau)+$$

$$+\sum_{m=0}^{M}B_m(\xi+l\tau)y(\xi+(l-m)\tau)]^TB_l(\xi+l\tau)\}v(\xi)d\xi.$$

Вернемся к старой переменной t, полагая $t=\xi$. Учитывая, что $v(t)=0$ при $t\in(-M\tau,0)\cup(T-M\tau,T)$, будем иметь

$$B(y,v)=\int_0^{T-M\tau}(A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M}B_m(t)y(t-m\tau))^TA_0(t)v'(t)dt+$$

$$+\int_0^{T-M\tau}\sum_{l=0}^{M}\{[A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau)+ \tag{3.9}$$

$$+\sum_{m=0}^{M}B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)]^TB_l(t+l\tau))\}v(t)dt.$$

Из (3.8), (3.9) и определения производной в смысле теории обобщенных функций следует, что

$$[A_0^T(t)A_0(t)y'(t)+A_0^T(t)\sum_{m=0}^{M}B_m(t)y(t-m\tau)]'\in L_2^n(0,T-M\tau), \tag{3.10}$$

т.е.

$$A_0^T(t)A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M}A_0^T(t)B_m(t)y(t-m\tau)\in W_2^{1,n}(0,T-M\tau). \tag{3.11}$$

Поскольку мы предполагаем, что $\varphi\in L_2^n(-M\tau,0)$, производная каждого из слагаемых в (3.10), стоящих в квадратных скобках, вообще говоря, может быть сингулярной обобщенной функцией и в этом случае не будет принадлежать $L_2^n(-M\tau,0)$.

В силу (3.11), подставляя (3.9) в (3.8), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$-[A_0^T(t)A_0(t)y'(t) + A_0^T(t)\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)]'+ \tag{3.12}$$

$$+\sum_{l=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau)+$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau) = 0 \ (t \in (0, T-M\tau).$$

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (3.12) почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$.

Определение 3.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ называется *обобщенным решением задачи* (3.12), (3.2) - (3.4), если выполняется условие (3.11), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (3.12), а также краевым условиям (3.2) - (3.4).

Очевидно, следующее определение обобщённого решения эквивалентно определению 2.1.

Определение 3.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ называется *обобщенным решением задачи* (3.12), (3.2) - (3.4), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y,v) = \int_0^{T-M\tau} \{(A_0^T(t)A_0(t)y'(t))^T +$$

$$+(A_0^T(t)\sum_{m=0}^{M} B_m^T(t+m\tau)y(t-m\tau))^T\}v'(t)+$$

$$+\{(\sum_{l=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau))^T+ \tag{3.13}$$

$$+(\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau))^T\}v(t)dt = 0$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)$ и краевым условиям (3.2) - (3.4).

Таким образом, мы доказали, что, если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ является решением вариационной задачи (3.2) - (3.5), то она будет обобщенным решением краевой задачи (3.12), (3.2) - (3.4).

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ - обобщенное решение краевой задачи (3.12), (3.2) - (3.4). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y+v) = J(y) + J(v) + 2B(y,v),$$

где $J(v)$ - неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y - обобщенное решение задачи (3.12), (3.2) - (3.4), то $B(y,v) = 0$. Следовательно,

$$J(y+v) \geq J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. *Функция* $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ *доставляет минимум функционалу* (3.5) *с краевыми условиями* (3.2) - (3.4) *тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (3.12), (3.2) - (3.4).

3.3 Разрешимость краевой задачи

В этом разделе мы докажем однозначную разрешимость краевой задачи (3.12), (3.2) - (3.4).

Введем оператор $R_0 : \widetilde{L} \to L_2^n(0,T)$ по формуле:

$$(R_0 v)(t) = A_0(t) v(t). \tag{3.14}$$

Рассмотрим функционал:

$$J_0(v) = \int_0^T |(R_0 v')(t)|^2 dt, \ v \in \widetilde{W}. \tag{3.15}$$

Лемма 3.1. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \widetilde{W}$

$$J_0(w) \geq c_0 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.16}$$

где $c_0 > 0$ *- постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство следует из невырожденности матрицы $A_0(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geq c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.17}$$

где $c_1 > 0$ *- постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. 1. Предположим противное: неравенство (3.17) не выполняется. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Тогда мы имеем

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k}. \tag{3.18}$$

Введём оператор $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$ по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k(t) v(t - k\tau). \tag{3.19}$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leq 2(\alpha + \beta)^2 + 2\beta^2 \ \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 3.1 и ограниченности оператора $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$, для любого $v \in \widetilde{W}$ мы получим

$$c_0 ||v||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq J_0(v) \leq 2J(v) + \tag{3.20}$$

$$+2 \int_0^{T-M\tau} ((R_1 v)(t))^2 dt \leq 2J(v) + k_1 ||v||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)},$$

где $c_0, k_1 > 0$ - постоянные, не зависящие от v.

В силу компактности оператора вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0, T - M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0, T - M\tau)$. Таким образом, из (3.18), (3.20) следует, что

$$c_0 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leq 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) +$$

$$+k_1||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leq$$

$$\leq \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \to 0 \text{ при } l, m \to \infty.$$

Следовательно, $w_{k_m} \to w_0$ в $\widetilde{W}$ и $||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Поэтому в силу (3.18) мы имеем

$$J(w_0) = \int_0^{T-M\tau} |A_0(t)w_0'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)w_0(t - m\tau)|^2 dt = 0,$$

т.е.

$$A_0(t)w_0'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)w_0(t - m\tau) = 0, \; t \in (0, T - M\tau). \tag{3.21}$$

Поскольку $w_0 \in \widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \; t \in [-M\tau, 0]. \tag{3.22}$$

Тогда, если $0 < t \leq \tau$, система уравнений (3.21) примет вид

$$A_0(t)w_0'(t) + B_0(t)w_0(t) = 0, \tag{3.23}$$

при этом в силу (3.22)

$$w_0(0) = 0.$$

Следовательно,

$$w_0(t) = 0, \; t \in [0, \tau]. \tag{3.24}$$

В силу (3.22), (3.24) для $\tau < t \leq 2\tau$ система уравнений (3.21) примет вид (3.23), при этом в силу (3.24) $w_0(\tau) = 0$. Решая полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.23) на полуинтервале $(\tau, 2\tau]$, имеем $w_0(t) = 0, \; t \in (\tau, 2\tau]$, и т.д.

Таким образом, $w_0(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T - M\tau]$. Это противоречит равенству $||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$.

□

Теорема 3.2. *Пусть* $det A_0(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ *и любого* $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует единственное обобщенное решение* *краевой задачи* (3.12), (3.2)-(3.4) $y \in W_2^{1,n}(0,T)$, *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(0,T)} \leq c(||\varphi||_{L_2^n(-M\tau,0)} + |\varphi_0|). \tag{3.25}$$

где $c > 0$ *– постоянная, не зависящая от* φ *и* φ_0.

Доказательство. Введем вектор-функции $\Phi_0 \in L_2^n(-M\tau,T) \cap W_2^{1,n}(0,T)$ и $\Phi_1, \Phi_2 \in L_2^n(0,T)$ по формулам

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -M\tau < t < 0; \\ \varphi_0 - \varphi_0 t/(T - M\tau), & \text{если} \quad 0 < t < T - M\tau; \\ 0, & \text{если} \quad T - M\tau < t < T; \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} A_0^T(t) \sum_{m=k}^{M} B_m^T(t)\varphi(t - m\tau), & \text{если} \quad (k-1)\tau < t < k\tau, \\ & k = 1, ..., M; \\ 0, & \text{если} \quad M\tau < t < T; \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} \sum_{l,m} B_l^T(t + l\tau)B_m(t + l\tau)\varphi(t - (m-l)\tau), & \text{суммирование} \\ & \text{производится по} \\ & \text{l,m таким,} \\ & \text{что} \quad k \leq m - l \leq M, \\ & \text{если}(k-1)\tau < t < \\ & < k\tau, k = 1, ..., M; \\ 0, & \text{если} \quad M\tau < t < T. \end{cases} \tag{3.28}$$

Доказательство теоремы 3.2 основано на технике билинейных форм применительно к интегральному тождеству (3.13). Однако $B(y,v)$ не является билинейной формой, поскольку функция y удовлетворяет неоднородным краевым условиям (3.2), (3.3). Поэтому мы введем вспомогательные билинейные формы $B_0(\varphi_0, v)$ $(\varphi_0 \in \mathbb{R}^n, v \in \widetilde{W}), B_1(\varphi, v), B_2(\varphi, v)$ $(\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0), v \in \widetilde{W})$ по формулам

$$B_0(\varphi_0, v) = B(\Phi_0, v),$$

$$B_1(\varphi, v) = \int_0^{T-M\tau} \Phi_1(t)v'(t)dt,$$

$$B_2(\varphi, v) = \int_0^{T-M\tau} \Phi_2(t)v(t)dt.$$

Здесь функции Φ_0, Φ_1, Φ_2 задаются формулами (3.26), (3.27), (3.28), соответственно.

Положим

$$x(t) = \begin{cases} y(t) - \Phi_0(t),\ t \in (0, T); \\ 0,\ t \in (-M\tau; 0). \end{cases}$$

По построению $x \in \widetilde{W}$. Тогда интегральное тождество (3.13) примет вид

$$B_0(\varphi_0, v) + B_1(\varphi, v) + B_2(\varphi, v) + B(x, v) = 0. \tag{3.29}$$

Поскольку $B(v, v) = J(v), v \in \widetilde{W}$, по лемме 2.2 мы можем ввести в пространстве $\mathring{W}_2^1(0, T - M\tau)$ эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = B(x, v). \tag{3.30}$$

Следовательно, тождество (3.29) может быть записано в виде

$$B_0(\varphi_0, v) + B_1(\varphi, v) + B_2(\varphi, v) + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0. \tag{3.31}$$

Из неравенства Коши-Буняковского, равенства (3.26) и леммы 3.2 получим

$$\begin{gathered} |B_0(\varphi_0, v)| \le k_1|\varphi_0| \cdot ||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \le \\ \le k_2|\varphi_0| \cdot ||v||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \end{gathered} \tag{3.32}$$

где $k_1, k_2 > 0$ – постоянные, не зависящие от φ_0 и v.

Вновь используя неравенства Коши-Буняковского, а также равенства (3.27), (3.28) и лемму 3.2, мы имеем

$$\begin{gathered} |B_i(\varphi, v)| \le k_3||\varphi||_{L_2(-M\tau,0)} \cdot ||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \le \\ \le k_4||\varphi||_{L_2(-M\tau,0)} \cdot ||v||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)},\ i = 1, 2, \end{gathered} \tag{3.33}$$

где $k_3, k_4 > 0$ – постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированных φ_0 и φ функционалы $B_0(\varphi_0, v)$ и $B(\varphi, v)$ линейные и ограниченные по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенств (3.32) и (3.33) нормы функционалов $B_0(\varphi_0, .)$ и $B_i(\varphi, .)$ на $\widetilde{W}$ не превышают $k_2|\varphi_0|$ и $k_4||\varphi||_{L_2(-M\tau,0)}$ соответственно. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве, существуют вектор-функции $F_i \in \widetilde{W}$ $(i = 0, 1, 2)$ такие, что

$$B_0(\varphi_0, v) = (F_0, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.34}$$

$$B_i(\varphi_0, v) = (F_i, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.35}$$

при этом

$$||F_0||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \le k_2|\varphi_0|, \tag{3.36}$$

$$||F_i||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \le k_4||\varphi||_{L_2^n(-M\tau,0)}. \tag{3.37}$$

Функции F_i $(i = 0, 1, 2)$ определяются единственным образом. Таким образом, тождество (3.31) можно записать в виде

$$\sum_{i=0,1,2} (F_i, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0 \ (v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)). \tag{3.38}$$

Интегральное тождество (3.38) имеет единственное решение $x = -\sum_{i=0,1,2} F_i$. Следовательно, задача (3.12), (3.2)-(3.4) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi_0 - \sum_{i=0,1,2} F_i \in W_2^{1,n}(0, T)$. Кроме того, в силу (3.26), (3.36), (3.37) выполняется оценка (3.25). □

3.4 Гладкость обобщенных решений на всем интервале

Рассматриваемая нами система дифференциально-разностных уравнений имеет запаздывающий тип. Поэтому в случае достаточно гладкой начальной функции ($\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$) гладкость обобщённых решений сохраняется на всем интервале.

В отличие от дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа, гладкость обобщённых решений уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах [6,7,12-15].

Теорема 3.3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$, *и пусть* $\varphi(0) = \varphi_0$. *Тогда обобщенное решение задачи* (3.12), (3.2)-(3.4) $y \in W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = -(A_0^T(t) \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau))' -$$

$$- \sum_{l=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) A_0(t + l\tau) y'(t + l\tau) -$$

$$- \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t - (m - l)\tau) \quad t \in (0, T - M\tau).$$

Из условий теоремы следует, что $F \in L_2^n(0, T - M\tau)$. Очевидно, систему уравнений (3.12) можно переписать в виде

$$-(A_0^T(t) A_0(t) y'(t))' = F(t) \quad (t \in (0, T - M\tau)). \tag{3.39}$$

Отсюда получим

$$-A_0^T(t) A_0(t) y''(t) = \Phi(t) \quad (t \in (0, T - M\tau)), \tag{3.40}$$

где $\Phi(t) = F(t) - (A_0^T(t) A_0(t))' y'(t)$.

Поскольку элементы матрицы $A_0(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции и $det\ A_0(t) \neq 0$, мы имеем

$$y''(t) = -(A_0^T(t) A_0(t))^{-1} \Phi(t) \in L_2^n(0, T - M\tau),$$

т.е. $y(t) \in W_2^{2,n}(0, T - m\tau)$. $\square$

Глава 4. Система управления с последействием с различным числом входов и выходов

Данная глава посвящена задаче об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами с различным числом входов и выходов и несколькими запаздываниями. Установлена связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Получены априорные оценки решений. Доказана теорема о разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Построено фридрихсово расширение. Основные результаты этой главы опубликованы в статье [7].

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{k=0}^{M} A_k(t)y'(t-k\tau) + \sum_{k=0}^{M} B_k(t)y(t-k\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{4.1}$$

Здесь $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ — вектор-функция управления, $A_k(t),\ B_k(t) = \{a_{ij}^k(t)\},\ \{b_{ij}^k(t)\},\ i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$ — матрицы порядка $n \times m$ с элементами $a_{ij}^k(t),\ b_{ij}^k(t)$ которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = const > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{4.2}$$

Здесь $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \end{pmatrix}$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (4.1) с начальным условием (4.2) в положение равновесия при $t \geq T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{4.3}$$

где $T > (M+1)\tau,\ T - M\tau = \tau N$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2 dt \to \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (4.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| \sum_{k=0}^M A_k(t) y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^M B_k(t) y(t - k\tau) \right|^2 dt \to \min. \tag{4.4}$$

4.2 Вариационная и краевая задачи

Для того, чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (4.4), (4.2), (4.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

В данной главе рассмотрим случай $n > m$.

Будем использовать вещественные функциональные пространства, введенные в первой главе.

Обозначим через $\dot{C}^{\infty,m}(a,b)$ пространство финитных, бесконечно дифференцируемых вектор-функций на (a,b).

Покажем, что вариационная задача (4.2)–(4.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ — решение вариационной задачи (4.2)–(4.4), где

$\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^m(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,m}(-M\tau, T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2^m(0, T - M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,m}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (4.2), (4.3) для всех $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \geq J(y),\ s \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0, \tag{4.5}$$

Положим

$$B(y, v) := \int\limits_0^T \left(\sum_{k=0}^{M} A_k(t) y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^{M} B_k(t) y(t - k\tau) \right)^T \times$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t) v'(t - l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t) v(t - l\tau) \right) d\tau. \tag{4.6}$$

Из равенства (4.5) следует, что

$$B(y, v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{4.7}$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок. Обозначим

$$B_{k,l}(y, v) = \int\limits_0^T \left(A_k(t) y'(t - k\tau) + B_k(t) y(t - k\tau)\right)^T \times$$

$$\times \left(A_l(t) v'(t - l\tau) + B_l(t) v(t - l\tau)\right) d\tau.$$

В слагаемых, содержащих $v(t - l\tau)$ или $v'(t - l\tau)$, сделаем замену переменной

$\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{k,l}(y,v) = \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_k(\xi + l\tau)y'(\xi + (l-k)\tau) + B_k(\xi + l\tau) \times$$
$$\times\, y(\xi + (l-k)\tau))^T (A_l(\xi + l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi + l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Вернемся к старой переменной t, полагая $t = \xi$. Учитывая, что $v(t) = 0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$, будем иметь

$$B_{k,l}(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} (A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau) + B_k(t + l\tau) \times$$
$$\times\, y(t + (l-k)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t) + B_l(t + l\tau)v(t))dt. \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.6) и интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^{M} \{&(A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t)) + \\ &+ [(A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau))^T B_l(t + l\tau) - \\ &- ((B_k(t + l\tau)y(t + (l-k)\tau))^T A_l(t + l\tau))' + \\ &+ (B_k(t + l\tau)y(t + (l-k)\tau))^T B_l(t + l\tau)]v(t)\}dt. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Из (4.9) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t + l\tau)A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{4.10}$$

В силу (4.10), подставляя (4.8) в (4.7), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$
\begin{gathered}
-\left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau)\right)' +\\
+\sum_{l,k=0}^{M}\{B_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) -\\
-\left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\right)' +\\
+\sum_{l,k=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\} = 0 \ (t\in(0,T-M\tau).
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

Таким образом, вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (4.11) почти всюду на интервале $(0,T-M\tau)$.

Определение 4.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ называется *обобщенным решением* задачи (4.11), (4.2), (4.3), если выполняется условие (4.10), $y(t)$ почти всюду на $(0,T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (4.11), а также краевым условиям (4.2), (4.3).

Следующее определение обобщенного решения эквивалентно
определению 4.1.

Определение 4.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau,T)$ называется *обобщенным решением* задачи (4.11), (4.2), (4.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$
\begin{gathered}
B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau}\sum_{l,k=0}^{M}(A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T v'(t)dt +\\
+\int\limits_0^{T-M\tau}\sum_{l,k=0}^{M}\{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T -\\
-((A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))')^T +\\
+(B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))^T\}v(t)dt = 0,
\end{gathered} \tag{4.12}
$$

и краевым условиям (4.2), (4.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ является решением вариационной задачи (4.2)–(4.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (4.11), (4.2), (4.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ является обобщенным решением краевой задачи (4.11), (4.2), (4.3), то она будет решением вариационной задачи (4.2)–(4.4).

Докажем это.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — обобщенное решение краевой задачи (4.11), (4.2), (4.3). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y+v) = J(y) + J(v) + 2B(y,v),$$

где $J(v)$ — неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y — обобщенное решение задачи (4.11), (4.2), (4.3), то $B(y,v) = 0$. Следовательно,

$$J(y+v) \geq J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$. *Функционал* (4.4) *с краевыми условиями* (4.2), (4.3) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (4.11), (4.2), (4.3).

4.3 Априорные оценки. Разрешимость краевой задачи. Фридрихсово расширение

Введем оператор $R_0 : \widetilde{L} \to L_2^m(0, T - M\tau)$ по формуле

$$R_0 u(t) = \sum_{k=0}^{M} A_k(t) u(t - k\tau).$$

Лемма 4.1. *Пусть существует минор m-ого порядка матрицы $A_0(t)$, кото-*

рый не равен 0 *при* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \widetilde{W}$

$$J_0(w) \geq c_0 ||w||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}, \tag{4.13}$$

где $c_0 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* w,

$$J_0(v) := \int\limits_0^T (\sum_{k=0}^M A_k(t) v'(t-k\tau))^T (\sum_{k=0}^M A_k(t) v'(t-k\tau)) dt. \tag{4.14}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что первые m строк матрицы $A_0(t)$ образуют минор m-ого порядка, не равный 0 при $t \in \mathbb{R}$.

Введем матрицу $\widetilde{A}_0(t)$ — матрицу, полученную из $A_0(t)$ вычеркиванием $(n-m)$ последних строк.

1. Предположим противное: для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J_0(w_k) \leq \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}. \tag{4.15}$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $||w_k||_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} = 1$. Тогда в силу компактности вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^m(0, T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_p}\} \subset \widetilde{W}$, сходящаяся в $L_2^m(0, T-M\tau)$ при $k \to \infty$ к некоторой вектор-функции $w_0 \in L_2^m(0, T-M\tau)$.

2. Пусть $0 < t < \tau$. Тогда выражение $(R_0 w'_{k_m})(t)$ имеет вид $(R_0 w'_{k_p})(t) = A_0(t) w'_{k_p}(t)$. Следовательно, в силу невырожденности матрицы $\widetilde{A}_0(t)$ и неравенства (4.15) имеем $w'_{k_s} \to 0$ в $L_2^p(0,\tau)$ при $p \to \infty$.

3. Пусть теперь $\tau < t < 2\tau$. Тогда $(R_0 w'_{k_p})(t) = A_0(t) w'_{k_p}(t) + A_1(t) w'_{k_p}(t-\tau)$. Отсюда в силу неравенства (4.15) и п. 2 доказательства имеем

$$(R_0 w'_{k_p})(t) \to 0 \quad \text{и} \quad A_1(t) w'_{k_p}(t-\tau) \to 0 \quad \text{в } L_2^m(\tau, 2\tau) \text{ при } \ m \to \infty.$$

Следовательно, поскольку матрица $\widetilde{A}_0(t)$ невырождена, мы имеем $w'_{k_p} \to 0$ в $L_2^p(\tau, 2\tau)$ при $p \to 0$.

4. Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что $w'_{k_s} \to 0$ в $L_2^m(l\tau, L)$ для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что $2\tau \leq l\tau < L$, где $L = \min\{(l+1)\tau, T - M\tau\}$. Таким образом, $w_0 \in \mathring{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)$ и $w_0 = const \neq 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает лемму 4.1. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие леммы 4.1. Тогда для всех* $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geq c_1 ||w||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}. \tag{4.16}$$

где $c_1 > 0$ *— постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\det \widetilde{A}_0(t) \neq 0$.

1. Предположим противное: неравенство (4.16) не выполняется. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что $||w_k||_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} = 1$. Тогда мы имеем

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k} \tag{4.17}$$

Введём оператор $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^m(0, T - M\tau)$ по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k(t) v(t - k\tau). \tag{4.18}$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leq 2(\alpha + \beta)^2 + 2\beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 4.1 и ограниченности оператора $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^m(0, T - M\tau)$, для любого $v \in \widetilde{W}$ мы получим

$$c_0 ||v||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \leq J_0(v) \leq \tag{4.19}$$

$$\leq 2J(v) + 2 \int\limits_0^{T-M\tau} |(R_1 v)(t)|^2 dt \leq 2J(v) + k_1 ||v||^2_{L_2^m(0,T-M\tau)},$$

где $c_0, k_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от v.

В силу компактности оператора вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^m(0, T - M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0, T - M\tau)$. Таким образом, из (4.17), (4.19) следует, что

$$c_0 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \leq 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) + k_1 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leq$$

$$\leq \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^m(0,T-M\tau)} \to 0 \text{ } \textit{при } l, m \to \infty.$$

Следовательно, $w_{k_m} \to w_0$ в $\widetilde{W}$ и $||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Поэтому в силу (4.17) мы имеем

$$J(w_0) = \int\limits_0^{T-M\tau} \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t) w_0'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) w_0(t - m\tau) \right|^2 dt = 0,$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t) w_0'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) w_0(t - m\tau) = 0, \; t \in (0, T - M\tau). \tag{4.20}$$

Поскольку $w_0 \in \widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \; t \in [-M\tau, 0]. \tag{4.21}$$

Тогда, если $0 < t \leq \tau$, система уравнений (4.20) примет вид

$$\widetilde{A}_0(t) w_0'(t) + \widetilde{B}_0(t) w_0(t) = 0, \tag{4.22}$$

при этом в силу (4.21)

$$w_0(0) = 0,$$

где $\widetilde{B}_0(t)$ — матрица порядка $m \times m$, полученная из матрицы $B_0(t)$ вычеркиванием последних $(n - m)$ строк.

Поскольку по условию $\det \widetilde{A}_0(t) \neq 0$, мы имеем

$$w_0(t) = 0, \; t \in [0, \tau]. \tag{4.23}$$

В силу (4.21), (4.23) для $\tau < t \leq 2\tau$ система уравнений (4.20) примет вид (4.22), при этом в силу (4.23) $w_0(\tau) = 0$. Решая полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуинтервале $(\tau, 2\tau]$, имеем $w_0(t) = 0, \; t \in (\tau, 2\tau]$, и т. д.

Таким образом, $w_0(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T - M\tau]$. Это противоречит равенству $||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть существует минор m-ого порядка матрицы $A_0(t)$, который не равен 0 при $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$ существует единственное обобщенное решение краевой задачи (4.11), (4.2), (4.3) $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$, при этом*

$$||y||_{W_2^{1,m}(-M\tau,T)} \leq c||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}, \tag{4.24}$$

где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad -M\tau \leq t \leq 0; \\ 0, & \text{если} \quad T - M\tau \leq t \leq T; \\ \varphi(0) - \dfrac{\varphi(0)t}{T - M\tau}, & \text{если} \quad 0 < t < T - M\tau. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$. Кроме того, в силу непрерывности оператора вложения $W_2^1(-M\tau, T)$ в $C[-M\tau, 0]$ имеем

$$||\Phi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,T)} \leq k_1||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}, \tag{4.25}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Пусть $x = y - \Phi$, тогда $x \in \widetilde{W}$. Интегральное тождество (4.7) примет вид

$$B(\Phi, v) + B(x, v) = 0, \ v \in \widetilde{W}. \tag{4.26}$$

Поскольку $B(v, v) = J(v)$, $v \in \widetilde{W}$, по лемме 4.2 в пространстве $\mathring{W}_2^1(0, T - M\tau)$ мы можем ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} = B(x, v). \tag{4.27}$$

Следовательно, тождество (4.26) может быть записано в виде

$$B(\Phi, v) + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} = 0. \tag{4.28}$$

Для фиксированного $\Phi \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ функционал $B(\Phi, v)$ линеен по $v \in \widetilde{W}$. Используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (4.25), (4.16) мы получаем

$$
\begin{gathered}
|B(\Phi,v)| \le k_2||\Phi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,T)}||v||_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \le \\
\le k_3||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}||v||_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \le k_4||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}||v||'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)},
\end{gathered}
\tag{4.29}
$$

где $k_2, k_3, k_4 > 0$ — постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированном Φ функционал $B(\Phi, v)$ ограничен по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенства (4.29) норма функционала $B(\Phi, v)$ на $\mathring{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)$ не превышает $k_4||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}$. Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует функция $F \in \widetilde{W}$ такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)}$$

и

$$||F||'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} \le k_4||\varphi||_{W_2^{1,m}(-M\tau,0)}. \tag{4.30}$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (4.28) можно записать в виде

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} + (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,m}(0,T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (4.11), (4.2), (4.3) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi - F$, при этом в силу (4.25) и (4.30) выполняется неравенство (4.24). Это доказывает теорему. $\square$

Идея доказательства теоремы 4.1 сводится по существу к сведению однородной системы дифференциально-разностных уравнений (4.11) с неоднородными краевыми условиями (4.2) и однородными условиями (4.3) к неоднородной системе дифференциально-разностных уравнений с однородными краевыми условиями. Таким образом, возникает вопрос о построении соответствующего неограниченного оператора, действующего в пространстве $\widetilde{L}$ и изучении его свойств.

Пусть $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ — неограниченный оператор, заданный по формуле:

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{A}_R y)(t) = -\left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau)\right)' + \\
+\sum_{l,k=0}^{M}\{B_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau) - \\
-\left(\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\right)' + \\
+\sum_{l,k=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau)\} \ (t\in(0,T-M\tau))
\end{gathered} \tag{4.31}
$$

при $y \in D(\mathcal{A}_R)$, где

$$
\begin{gathered}
D(\mathcal{A}_R) = \Big\{y \in \widetilde{W} : \sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)\times \\
\times y'(t+(l-k)\tau) \in W_2^{1,m}(0,T-M\tau)\Big\},
\end{gathered}
$$

см. условие (4.10).

Обозначим через A_R сужение оператора $\mathcal{A}_R$ на $\dot{C}^{\infty,m}(0,T-M\tau)$, т. е. $A_R : \widetilde{L} \supset D(A_R) \to \widetilde{L}$ есть неограниченный оператор, заданный следующим образом: $A_R y = \mathcal{A}_R y$ при $y \in D(A_R) := \dot{C}^{\infty,m}(0,T-M\tau)$.

Теорема 4.3. *Оператор* $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \to \widetilde{L}$ *является самосопряженным фридрихсовым расширением оператора* A_R *с нижней гранью* $c_{A_R} \geq c_1 > 0$, *где* c_1 *— постоянная из неравенства* (4.16).

Доказательство.

1. Докажем, что оператор A_R симметрический, т. е. $(A_R v, w)_{\widetilde{L}} = (v, A_R w)_{\widetilde{L}}$ для любых $v, w \in D(A_R)$.

Действительно, интегрируя по частям выражение:

$$
-\int_0^{T-M\tau}\left\{\sum_{l,k=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)v'(t+(l-k)\tau))'\right\}^T w(t)dt,
$$

получим

$$(A_R v, w)_{\widetilde{L}} = B(v,w) = \sum_{l,k=0}^{M} B_{k,l}(v,w), \tag{4.32}$$

где

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v,w) = \int\limits_0^{T-M\tau} &\{-[A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)v'(t+(l-k)\tau)]^T \times \\ &\times w'(t) + [B_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)v'(t+(l-k)\tau)]^T w(t) - \\ &- [A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)v(t+(l-k)\tau))']^T w(t) + \\ &+ [B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)v(t+(l-k)\tau)]^T w(t)\}dt, \end{aligned} \tag{4.33}$$

см. (4.8).

Сделаем в выражении для $B_{k,l}(v,w)$ замену переменной $\xi = t+(l-k)\tau$. Тогда из (4.33) следует, что

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v,w) = \int\limits_0^{T-M\tau} &\{(v'(\xi))^T(A_k^T(\xi+k\tau)A_l(\xi+k\tau)w'(\xi+(k-l)\tau)) + \\ &+ (v'(\xi))^T(A_k^T(\xi+k\tau)B_l(\xi+k\tau)w(\xi+(k-l)\tau)) - \\ &- (v(\xi))^T(B_k^T(\xi+k\tau)A_l(\xi+k\tau)w'(\xi+(k-l)\tau)) + \\ &+ (v(\xi))^T(B_k^T(\xi+k\tau)B_l(\xi+k\tau)w(\xi+(k-l)\tau))dt. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной t, полагая $t=\xi$, и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v,w) = \int\limits_0^{T-M\tau} &(v(t))^T\{-[A_k^T(t+k\tau)A_l(t+k\tau)w'(t+(k-l)\tau)]' - \\ &- (A_k^T(t+k\tau)B_l(t+k\tau)w(t+(k-l)\tau)]' + \\ &+ [B_k^T(t+k\tau)A_l(t+k\tau)w'(t+(k-l)\tau)] + \\ &+ [B_k^T(t+k\tau)B_l(t+k\tau)w(t+(k-l)\tau)\}dt. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Суммируя левые и правые части (4.34) по k,l и меняя k,l местами, получим равенство $(A_R v, w)_{\widetilde{L}} = (v, A_R w)_{\widetilde{L}}$ для любых $v,w \in D(A_R)$.

2. Рассмотрим теперь квадратичную форму $(A_R v, v)_{\widetilde{L}},\ v \in D(A_R)$.

В силу (4.32)

$$(A_R v, v)_{\widetilde{L}} = B(v,v) = J(v), \; v \in D(A_R).$$

Из леммы 4.2 следует, что

$$(A_R v, v)_{\widetilde{L}} \geq c_1 ||v||^2_{W_2^{1,m}(0,T-M\tau)}, \; v \in D(A_R). \tag{4.35}$$

3. Из теоремы 2 в [17, гл. 12, п. 5] и следствия 3, в [17, гл. 12, п. 5], а также симметричности оператора A_R и неравенства (4.35) вытекает справедливость теоремы 4.3. $\square$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

- Исследованы краевые задачи, описываемые системой дифференциально-разностных уравнений с неоднороными краевыми условиями, рассматриваемые на заданном интервале.

- Исследованы свойства вспомогательных разностных операторов.

- Показана связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последействием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

- Изучена разрешимость и гладкость обобщенных решений таких задач на подынтервалах и целом интервале.

- Для оператора, описывающего вырождающийся тип, было построено фридрихсово расширение.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Скубачевскому А. Л. за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Литература

[1] Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L. Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays, *Distributed Computer and Communication Networks, Switzerland*, 2016. — № 678. — P. 612–623.

[2] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2019. — *65*, № 4. — С. 547—556.

[3] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа, *Доклады академии наук*, 2020. — *490*, № 1. — С. 81–84.

[4] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа, *Дифференциальные уравнения*, 2022. — *58*, № 6. — С. 747–755.

[5] Адхамова А. Ш. Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2022. — *68*, № 1. — С. 14–24. (Перевод на английский: Adkhamova A. Sh. Smoothness of Solutions to the Damping Problem for Nonstationary Control System with Delay, *Journal of Mathematical Sciences*, 2024. — *278*. — P. 570–579.)

[6] Адхамова А. Ш. Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием нейтрального типа на всем интервале, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2023. — *69*, № 1. — С. 14–27. (Перевод на английский: Adkhamova A. Sh. Smoothness of Solutions to the Damping Problem for Nonstationary Control System with Delay of Neutral Type on the Whole Interval, *Journal of Mathematical Sciences*, 2024. — *283*. — P. 167–182.)

[7] Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Задача об успокоении системы управления с последействием с различным числом входов и выходов, *Современ-*

менная математика. Фундаментальные направления, 2024. — *70*, № 2. — С. 189—200.

[8] Антоневич А. Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе, *Дифференциальные уравнения*, 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.

[9] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

[10] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, *Доклады АН СССР*, 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

[11] Бутерин С. А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последействием на дереве, *Матем. заметки*, 2024. — *115*, № 6. — С. 825–848.

[12] Варфоломеев Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007. — *21*. — С. 5–36.

[13] Вентцель А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1959. — *4*, № 2. — С. 172–185.

[14] Власов В. В. О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, 1995. — *186*, № 8. — С.67–92.

[15] Власов В. В., Раутиан Н. А. *Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений*, МАКС Пресс, М., 2016.

[16] Власов В. В., Раутиан Н. А. Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами, *Доклады РАН*, 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.

[17] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, Т.2, *Спектральная теория* М.: Мир, 1966.

[18] Иванова Е. П. О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2016. — *62*.— С. 85–99.

[19] Иванова Е. П. О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов *Математические заметки*, 2019. — *105*, № 1.— С. 145–148.

[20] Каменский Г. А., Хвилон Е. А., Необходимое условие оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, *Автоматика и телемеханика*, 1969.— № 3.— С. 20–32.

[21] Banks H. T., Kent G. A. Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space, *SIAM J. Control*, 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.

[22] Kent G. A. A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems, *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.

[23] Красовский Н. Н. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, *Доклады АН СССР*, 1957.— *114*. № 2. — С. 252–255.

[24] Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

[25] Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С. О позиционном моделировании в динамических системах, *Прикл. мат. мех*, 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.

[26] Леонов Д. Д. К задаче об успокоении системы управления с последействием, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2010. — *37*. — С. 28–37.

[27] Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2019. — *65*, № 4. — С. 635–654.

[28] Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре, *Математические заметки*, 2020. — *107*, № 5. — С. 693–716.

[29] Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2014. — *52*.— С. 3–141.

[30] Муравник А. Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики, *Математические заметки*, 2019. — *105*, № 5.— С. 747–762.

[31] Муравник А. Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве, *Математические заметки*, 2020.— *108*, № 5.— С. 764–770.

[32] Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *УМН*, 1949.— *4*, № 5 (33).— С. 99–141.

[33] Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* Гостехиздат, М.–Л., 1951.

[34] Неверова Д. А. Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2020.— *66*, № 2.— С. 272–291.

[35] Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела, *Прикл. мех.*, 1979.— *15*, № 5.— С. 39–47.

[36] Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием, *Дифференциальные уравнения*, 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.

[37] Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л. О полноте и базисности системы корневых функций сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов, *УМН*, 1996. — *51*, № 6.— С. 219–220.

[38] Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л. Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов, *Дифференциальные уравнения*, 1999. — *35*, № 6.— С. 793–800.

[39] Попов В. А., Скубачевский А. Л. Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2010.— *36*.— С. 125–142.

[40] Попов В. А., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2011.— *39*.— С. 130–140.

[41] Рабинович В. С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве, *Доклады АН СССР*, 1978.— *243*, № 5.— С. 1134–1137.

[42] Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1993.— *33*, № 1.— С. 69–80.

[43] Россовский Л. Е. Задача об успокоении системы с запаздыванием, линейно зависящим от времени, *Проблемы современной математики и приложения к задачам физики и механики. — М.: Изд-во МФТИ*, 1995.— С. 172–182.

[44] Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2014.— *54*.— С. 3–138.

[45] Россовский Л. Е., Тасевич А. Л. Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах, *Дифференциальные уравнения*, 2017.— *53*, № 12.— С. 1679–1692.

[46] Селицкий А. М., Скубачевский А. Л. Вторая краевая задача для параболи-

ческого дифференциально-разностного уравнения, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2007. — *26.* — С. 324–347.

[47] Селицкий А. М. Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007. — *21.* — С. 114–132.

[48] Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием, *Доклады РАН.*, 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.

[49] Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

[50] Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач, *Матем. сб.*, 1982.— *117*, № 4.— С. 548–558.

[51] Скубачевский А. Л. О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах, *Дифференциальные уравнения*, 1982.— *18*, № 9.— С. 1590–1599.

[52] Скубачевский А. Л. Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением, *Дифференциальные уравнения*, 1983.— *19*, № 1.— С. 457–470.

[53] Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Матемические заметки*, 1983.— *34*, № 1.— С. 105-112.

[54] Скубачевский А. Л. Нелокальные краевые задачи со сдвигом, *Матемические заметки*, 1985.— *38*, № 4.— С. 587-598.

[55] Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов, *Доклады АН СССР*, 1989. —*307*, № 2. — С. 287–292.

[56] Скубачевский А. Л. О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 1997. — *31*, № 4. — С. 60–65.

[57] Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Труды Санкт-Петербургского мат. общества*, 1998.— *5.* — С. 223–288.

[58] Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения, *УМН*, 2016. ”—*71:5*, № 431. — С. 3–112.

[59] Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Вторая краевая задача для дифферен циально-разностных уравнений, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2021. ”—*500*. — С. 74–77.

[60] Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Обобщенные решения первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде на интервале конечной длины, *Дифференц. уравнения*, 2023. ”—*59*, № 7. — С. 881–892.

[61] Солонуха О. В. Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2017. — *57*, № 3. — С. 417–428.

[62] Солонуха О. В. Об одном эллиптическом дифференциально-разностном уравнении с несимметричным оператором сдвигов, *Матемические заметки*, 2018. — *104*, № 4. — С. 604–620.

[63] Солонуха О. В. Обобщенные решения квазилинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2020. — *60*, № 12. — С. 2085–2097.

[64] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[65] Цветков Е. Л. Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциальноразностного уравнения, *Матемические заметки*, 1992.— *51*, № 1.— С. 107–114.

[66] Цветков Е. Л. О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, *Укр. мат. ж.*, 1993.— *45*, № 8.— С. 1140–1150.

[67] Эльсгольц Л. Э., Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, 1954.— *9*, № 4 (62).—С. 95–112.

[68] Browder F. Non-local elliptic boundary value problems, *Amer. J. Math.*, 1964.— *86.*— P. 735–750.

[69] Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zurich*, 1932.— *1.*— P. 132–151.

[70] Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *Ann. of Math.*, 1952.— *55*, № 3.—P. 468–519.

[71] Kamenskii G. *Extrema of Nonlocal Functionals and Boundary Value Problems for Functional Differential Equations*, Nova Science Publishers, New York, 2007.

[72] Hartman F., Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential-functional equations, *Acta Math.*, 1966.— *115.*— P. 271–310.

[73] Onanov G. G., Tsvetkov E. L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory, *Russian J. Math. Phys.*, 1995.— *3*, № 4.— P. 491–500.

[74] Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017.— *12.*— P. 192–207.

[75] Rossovskii L. E. Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017.— *12*, № 6.— P. 1–14.

[76] Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A, Elliptic functional differential equation with affine transformations, *J. Math. Anal. and Applications*, 2019.— *480*, № 2.— P. 1–9.

[77] Sato K., Ueno T. Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1964/1965.— *4.* — P. 529–605.

[78] Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations, *J. Differential Equations*, 1986.— *63*, № 3.— P. 332–361.

[79] Skubachevskii A. L. *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

[80] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics, *Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications*, 1998.— *32*, № 2.— P. 261–278.

[81] Taira K. On the existence of Feller semigroups with boundary conditions, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1992. — *99*.— P. 1–65.

[82] Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L. Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation, *Chaos, Solitons, and Fractals*, 1994.— *4*.— P. 1701–1716.