

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Фомин Игорь Владимирович

Методы построения и верификации моделей ранней Вселенной со скалярным полем

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, доцент
Гладышев Владимир Олегович

Москва — 2019

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Ускоренное расширение Вселенной и космологическая инфляция	19
1.1 Геометрия пространства-времени	19
1.2 Скалярное поле в космологии	21
1.3 Параметр состояния	26
1.4 Число e-фолдов	27
1.5 Параметры медленного скатывания	28
1.6 Наблюдательные данные	30
1.7 Анизотропия реликтового излучения	31
1.8 Модификации моделей космологической инфляции	34
Глава 2. Анализ динамики Вселенной Фридмана на основе гравитации Эйнштейна	39
2.1 Приближение медленного скатывания	39
2.2 Кинетическое приближение	42
2.3 Точные решения уравнений космологической динамики	46
2.4 Точные решения на основе выбора параметра Хаббла	47
2.4.1 Модели с постоянным потенциалом	48
2.4.2 Модели со степенным потенциалом	49
2.4.3 Модели с экспоненциальным потенциалом	51
2.5 Космологические решения в терминах конформного времени	51
2.5.1 Степенное расширение	53
2.5.2 Обобщенное экспоненциальное расширение	54
2.6 Метод генерирующих функций	54
2.6.1 Первый класс генерирующих функций	55
2.6.2 Второй класс генерирующих функций	56
2.6.3 Третий класс генерирующих функций	57
2.6.4 Четвертый класс генерирующих функций	59
2.6.5 Пятый класс генерирующих функций	61
2.6.6 Шестой класс генерирующих функций	62
2.6.7 Метод суперпотенциала	63

2.7	Уравнение Шрёдингера в космологии	64
2.7.1	Уравнение Шрёдингера в терминах скалярного поля	66
2.7.2	Дуальные космологические модели	68
2.7.3	Точные решения на основе степенной инфляции	68
2.7.4	Преобразования Дарбу	70
2.7.5	Приведение всех независимых уравнений космологической динамики к уравнению Шрёдингера	72
2.7.6	Первое утверждение о эквивалентности космологических решений	75
2.8	Генерирование новых точных решений из известных	76
2.8.1	Преобразование решений в методе Иванова-Салопека-Бонда	79
2.8.2	Преобразование решений в методе приведения к уравнению Шрёдингера	81
2.8.3	Преобразование решений в методе суперпотенциала	82
2.9	Связь точных и приближенных решений	85
2.9.1	Случай одинаковой динамики и различных потенциалов	86
2.9.2	Нахождение начального значения скалярного поля	87
2.9.3	Случай одинаковой истории потенциала и различной динамики	89
2.9.4	Генерирование точных решений из расхождения $\Delta_N^{(V)}$	90
Глава 3. Космологические возмущения		91
3.1	Возмущения поля и метрики	93
3.2	Квантование возмущений	95
3.3	Параметры космологических возмущений	98
3.4	Параметры космологических возмущений в терминах конформного времени	103
3.4.1	Степенное расширение	104
3.4.2	Обобщенное экспоненциальное расширение	104
3.5	Диаграмма тензорно-скалярное отношение – спектральный индекс скалярных возмущений	105
3.5.1	Верификация моделей со степенным потенциалом	107
3.5.2	Верификация моделей с экспоненциальным потенциалом	108
3.6	Влияние множителя $(1 - \epsilon)^{-1}$ на параметры космологических возмущений	110
3.7	Преобразование параметров космологических возмущений	112
3.8	Постинфляционная эволюция космологических возмущений	113
3.9	Реликтовые гравитационные волны	115

Глава 4. Методы обобщения космологических моделей со скалярным полем	119
4.1 Динамика Вселенной Фридмана со скалярным и дополнительным материальным полем	119
4.1.1 N-анализ уравнений динамики	121
4.1.2 Обобщение точных решений для моделей с $m = 2$	124
4.1.3 Решение уравнений динамики посредством задания масштабного фактора	125
4.2 Киральные космологические модели	127
4.2.1 Конформные преобразования метрики пространства полей	128
4.2.2 ККМ с полем k -эссенции и каноническим скалярным полем	130
4.2.3 Точные решения для ККМ с произвольными компонентами метрики пространства полей	134
4.2.4 Космологические возмущения в мультиполевых моделях	137
Глава 5. Космологические модели на основе скалярно-тензорной гравитации	140
5.1 Уравнения космологической динамики в моделях с СТГ	142
5.2 Неминимальная связь как источник отклонения от стадии де Ситтера	143
5.3 Режим медленного скатывания в моделях СТГ-инфляции	146
5.4 Космологические возмущения в СТГ-инфляции	146
5.5 Параметры космологических возмущений для моделей $H = \lambda\sqrt{F}$	147
5.6 Параметрическая связь СТГ и ОТО	150
5.7 Реконструкция теории гравитации по потенциалу скалярного поля	153
5.8 Второе утверждение о эквивалентности космологических решений	154
Глава 6. Космологические модели на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне и Хорндески	155
6.1 Уравнения динамики для ЭГБ-инфляции	156
6.2 Связь между ОТО и ЭГБ-гравитацией	157
6.2.1 Космологические модели с $H_E = H + \beta$	158
6.2.2 Космологические модели с $H_E = 0$	159
6.2.3 Космологические модели с $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$	161
6.3 Параметр расхождения между стандартной и ЭГБ-инфляцией	162
6.4 Влияние неминимальной связи на космологическую динамику	163

6.5	Влияние неминимальной связи на потенциал	163
6.6	Космологические возмущения в ЭГБ-инфляции	165
6.7	Соответствие космологических моделей на основе ОТО и ЭГБ-гравитации .	168
6.8	Третье утверждение о эквивалентности космологических решений	170
6.9	Условия интегрируемости уравнений динамики для ЭГБ-инфляции	172
6.10	Точные ОТО-подобные решения в ЭГБ-инфляции	173
6.11	Космологические модели на основе ЭГБ-гравитации во Вселенной Фридмана с ненулевой кривизной	174
6.12	Космологические модели на основе гравитации Хорндески	180
6.12.1	Утверждение о специальном классе космологических моделей	182
6.12.2	Точные ОТО-подобные решения для гравитации Хорндески	184
6.12.3	Космологические возмущения для ОТО-подобных моделей на основе гравитации Хорндески	185
6.13	Эволюция Вселенной для ОТО-подобных моделей	188
Заключение		189
Список сокращений и условных обозначений		194
Новые термины, использованные в исследовании		195
Список литературы		196
Список рисунков		219
Список таблиц		220
Приложение А. Публикации автора по теме диссертации		221

Введение

Актуальность темы. Несмотря на то, что стандартные инфляционные сценарии, основанные на теории гравитации Эйнштейна и постулировании существования некоторого канонического скалярного поля (инфлатона), являющегося источником ускоренного расширения Вселенной на ранней стадии ее эволюции, успешно объясняют происхождение крупномасштабной структуры, анизотропию реликтового излучения и механизмы образования элементарных частиц [1–4], то есть дают последовательный метод объяснения происхождения Вселенной и ее дальнейшей эволюции, существуют проблемы, выходящие за рамки такого подхода, например, природа темной энергии [5] на стадии повторного расширения Вселенной [6; 7] или построение теории квантовой гравитации. Для решения этих задач используются модификации стандартной инфляционной парадигмы.

Как правило, рассматривается два подхода к модификации стандартных космологических моделей: первый связан с введением новых типов скалярных полей (например, поля k -эссенции [8], фантомных [9; 10] или тахионных полей [11], скалярных полей с уравнением состояния газа Чаплыгина [12]) или увеличением числа скалярных полей различных типов и определения взаимодействия между ними в рамках ОТО [13]. Также рассматривается возможность объяснения ускоренного расширения Вселенной за счет спинорных полей [14] с изотропизацией Вселенной в современную эпоху. Второй подход основан на различных модификациях гравитации Эйнштейна [15; 16]. Предложенные подходы можно комбинировать для построения актуальных космологических моделей [17; 18].

В настоящее время, после обнаружения бозона Хиггса в экспериментах на Большом Адронном Коллайдере [19], получено дополнительное обоснование возможности использования скалярных полей для описания эволюции Вселенной. Скалярное поле с потенциалом Хиггса может рассматриваться в качестве инфлатона, приводящего к раннему ускорению в расширении Вселенной и последующему образованию элементарных частиц.

В контексте мультиполевого подхода, эффективным методом построения космологических моделей является использование нелинейных сигма-моделей или киральных космологических моделей, в которых взаимодействие между полями определяется метрикой внутреннего пространства полей [13].

Таким образом, при проведении анализа динамики ранней Вселенной актуальным представляется определение связи между уравнениями космологической динамики для однополевых моделей с различными типами скалярных полей и мультиполевыми киральными космологическими моделями. Также, приводя все независимые уравнения космо-

гической динамики к уравнению одного типа, можно анализировать различные модели на основе одних методов.

В настоящее время рассматривается большое число модификаций гравитации Эйнштейна [15;16], среди которых основное внимание будет уделено двум типам теорий с неминимальным взаимодействием скалярного поля и кривизны пространства-времени, именно скалярно-тензорной гравитации с неминимальным взаимодействием скалярного поля и скаляра Риччи и гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне (с неминимальным взаимодействием поля и скаляра Гаусса-Бонне).

Скалярно-тензорные теории гравитации, модифицирующие гравитацию Эйнштейна, позволяют объяснить обе стадии ускоренного расширения без привлечения темной энергии и, также, на ранней стадии эволюции Вселенной, соответствуют различным моделям эффективной теории квантовой гравитации, построенной на основе теории струн, суперструн или супергравитации, которые дают различные поправки к ОТО в низкоэнергетическом пределе [20].

Успешное детектирование гравитационных волн от слияния черных дыр и нейтронных звезд [21–23] определяет дополнительные ограничения на параметры модифицированных теорий гравитации. Данные по обнаружению гравитационных волн при слиянии черных дыр подтвердили, что наблюдаемые гравитационные волны согласуются с предсказанием Общей Теории Относительности для двойных систем [21–23]. Более того, почти одновременное обнаружение гравитационных волн от слияния нейтронных звезд [23] и сопутствующего короткого гамма-всплеска [24] внесло ограничение на отклонение их скорости распространения от скорости света в вакууме до порядка 10^{-15} [25], что должно учитываться при построении космологических моделей, основанных на модифицированных теориях гравитации.

Таким образом, актуальной задачей становится построение решений для моделей, основанных на модификациях теории гравитации Эйнштейна, совпадающих с решениями, полученными в рамках ОТО [26]. Отметим, что динамика космологических возмущений для моделей, основанных на различных теориях гравитации, различна, и их параметры рассматриваются отдельно для каждого случая модификаций гравитации Эйнштейна с учетом наблюдательных ограничений.

Обычным методом анализа космологических моделей с модифицированными теориями гравитации являются конформные преобразования метрики, которые приводят действие, определяющее модель с модифицированной гравитацией, к действию Эйнштейна-Гильберта с соответствующим преобразованием геометрических и материальных компонент в действии, что соответствует переходу от представления Йордана к представлению Эйнштейна для произвольного вида метрики пространства-времени [15; 16].

Согласно данным наблюдений спутника PLANCK [27] Вселенная с большой степенью точности является плоской, и геометрии Вселенной хорошо соответствует метрика плоского пространства Фридмана-Робертсона-Уокера. Таким образом, актуальным представляется подход, в котором определяются функциональные и параметрические связи между модифицированными теориями гравитации и ОТО на фоне пространства Фридмана-Робертсона-Уокера непосредственно из уравнений динамики, что позволяет производить оценку расхождений предсказаний этих теорий при построении актуальных космологических моделей.

При построении моделей ранней Вселенной важное значение имеет их верификация, то есть сопоставление предсказаний теории с имеющимися на данный момент наблюдениями, связанными с анизотропией реликтового излучения, барионными акустическими осцилляциями и оценкой значения параметра Хаббла на современной стадии повторного ускоренного расширения [27]. Отметим, что ключевое значение для верификации космологических моделей имеет детектирование реликтовых гравитационных волн, измерение характеристик которых позволит резко сократить большое число теоретических моделей, удовлетворяющих наблюдательным ограничениям в настоящий момент. Также регистрация реликтовых гравитационных волн усиливает позиции инфляционной парадигмы по сравнению с альтернативными сценариями, например, моделями «генезиса» и моделями с «отскоком» от сингулярности, в которых космологические гравитационные волны отсутствуют [28]. Тем не менее, на настоящий момент реликтовые гравитационные волны не зарегистрированы.

Для построения непротиворечивых моделей ранней Вселенной, кроме анализа стадии инфляции, также необходимо учитывать динамику на современной стадии эволюции в силу наблюдаемого повторного ускоренного расширения [6; 7]. Следовательно, при построении актуальных моделей ранней Вселенной, важной задачей является получение космологических решений, обобщенных на оба случая ускоренного расширения. Обобщенные таким образом точные космологические решения позволят рассматривать эволюцию Вселенной на двух стадиях ускоренного расширения посредством их редукции к частным случаям, что существенно упрощает анализ космологических моделей. Вторым направлением обобщения космологических решений является их генерирование для теории гравитации, содержащей ОТО и различные скалярно-тензорные теории как частные случаи. Модели такого типа можно построить на основе гравитации Хорндески [29].

Таким образом, развитие методов построения и верификации теоретических моделей ранней Вселенной, основанных на эволюции скалярного поля в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера, является актуальной задачей в контексте исследования физических свойств материи и пространства-времени.

Целью данного исследования является разработка новых методов точного и приближенного анализа космологических моделей как в случае теории гравитации Эйнштейна, так и для модифицированных теорий гравитации и оценка влияния модификаций ОТО на значения спектральных параметров космологических возмущений в контексте верификации моделей ранней Вселенной.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка новых методов приближенного и точного анализа космологических моделей на ранней (инфляционной) стадии эволюции Вселенной.
2. Оценка расхождения между точными и приближенными решениями на уровне космологической динамики и уточнение спектральных параметров космологических возмущений по сравнению с полученными из приближения медленного скатывания.
3. Поиск новых методов верификации космологических моделей на основе модификации их параметров в рамках ОТО и анализа влияния неминимального взаимодействия скалярного поля и кривизны для случая модифицированных теорий гравитации.
4. Поиск функциональных и параметрических связей между космологическими моделями, основанными на ОТО и модифицированных теориях гравитации в четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера.
5. Качественная и количественная оценка влияния модификаций гравитации Эйнштейна на параметры космологических моделей. Поиск моделей, построенных на основе модификаций ОТО с эквивалентными случаю гравитации Эйнштейна параметрами.
6. Развитие методов построения точных решений, обобщенных на случай различных теорий гравитации и двух стадий ускоренного расширения Вселенной с возможностью их редукции к частным случаям.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Обнаружено, что квазилинейная связь между кинетической энергией скалярного поля и параметром состояния в моделях космологической инфляции, основанных на гравитации Эйнштейна, приводит к квазиэкспоненциальной (квазидеситтеровской) динамике как и в случае приближения медленного скатывания, но с учетом кинетической энергии поля. Это положение является основой нового метода приближенного анализа динамики ранней Вселенной.

2. Установлено, что все независимые уравнения космологической динамики могут быть приведены к уравнению типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера с дополнительными соотношениями между параметрами космологических моделей, определенными как в терминах скалярного поля, так и посредством космического времени. Данный подход отличается от предыдущих методов анализа инфляционных моделей с помощью уравнения данного типа.
3. Для комплексного решения задачи верификации теоретических моделей ранней Вселенной по параметрам космологических возмущений и генерирования точных космологических решений предложен метод построения специального класса космологических моделей с обобщенным экспоненциально-степенным законом расширения, которые удовлетворяют наблюдательным ограничениям.
4. Обнаружен новый класс точных решений для двухкомпонентных киральных космологических моделей, которые соответствуют моделям с одним скалярным полем на стадии космологической инфляции. Также решения данного класса соответствуют моделям со скалярным полем и дополнительной материальной компонентой на стадии повторного ускоренного расширения Вселенной.
5. Предложен новый принцип построения космологических моделей на основе скалярно-тензорной гравитации, в которых неминимальное взаимодействие скалярного поля и кривизны является источником его эволюции, отклонения динамики от расширения де Ситтера и изменения формы потенциала. В результате проведенного анализа было обнаружено хорошее соответствие таких моделей наблюдательным данным.
6. Установлено наличие параметрических связей ОТО с теориями гравитации, включающими неминимальное взаимодействие скалярного поля со скаляром Риччи и скаляром Гаусса-Бонне в четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера. На основе данных связей разработан метод количественной и качественной оценки влияния неминимального взаимодействия скалярного поля и кривизны на космологическую динамику, потенциал и параметры космологических возмущений.
7. Обнаружен новый класс точных космологических решений для случая обобщенных скалярно-тензорных теорий гравитации и гравитации Хорндески, полностью совпадающих с решениями, полученными на основе гравитации Эйнштейна. Скорости распространения и спектральные параметры космологических возмущений для данного класса точных решений соответствуют случаю ОТО с высокой точностью.

Достоверность. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми, научные положения и выводы полностью обоснованы. Достоверность результатов обеспечивается корректностью построения математических моделей и вычислений, также согласием полученных результатов с известными ранее, процитированными в диссертации.

Научная и практическая ценность. Изложенные в диссертации методы могут быть использованы при построении актуальных космологических моделей и их проверке по наблюдательным данным, то есть направлены на применение в теоретической и наблюдательной космологии.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция «Гравитация, космология, астрофизика и нестационарная газодинамика», посвященная 90-летию Кирилла Петровича Станюковича, РУДН–МГТУ им. Н.Э. Баумана, (Москва, 2-3 марта, 2006 г.).
2. Российская школа-семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии GRACOS-2007», КГПУ, (Казань, 9-16 сентября, 2007 г.).
3. 13-я Российская гравитационная конференция «Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике», РУДН, (Москва, 23-28 июня, 2008 г.).
4. II Российская школа-семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии GRACOS-2009», ТГГПУ, (Казань, 27-29 августа, 2009 г.).
5. Международная научная конференция «Физические интерпретации теории относительности» – PIRT-2009, МГТУ им. Н.Э. Баумана, (Москва, 6-9 июля, 2009 г.).
6. XII Международная конференция «Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики», РУДН, (Москва, 28 июня - 5 июля, 2010 г.).
7. Международная научная конференция «Физические интерпретации теории относительности» – PIRT-2013, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 1-4 июля, 2013 г.).
8. XII Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике ICGAC-12, РУДН, (Москва, 28 июня - 5 июля 2015 г.).
9. Международная научная конференция «Физические интерпретации теории относительности» – PIRT-2015, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 29 июня - 2 июля, 2015 г.).
10. IX Всероссийская конференция «Необратимые процессы в природе и технике», МГТУ им. Н.Э. Баумана, (Москва, 25-27 января 2016 г.).
11. Международная конференция «Гравитация, космология и механика сплошных сред», посвященная 100-летию со дня рождения Кирилла Петровича Станюковича, МГТУ им. Баумана, (Москва, 3-4 марта, 2016 г.).

12. 5-я Международная школа-семинар по теоретической и наблюдательной космологии UISS - 2016, УлГПУ, (Ульяновск, 19-30 сентября, 2016 г.).
13. 2-я Международная конференция по физике частиц и астрофизике ICPPA - 2016, МИФИ, (Москва, 10-14 октября, 2016 г.).
14. LIII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники - 2017, РУДН, (Москва, 15-19 мая 2017 г.).
15. Международная сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий», посвященная 50-летию Баксанской нейтринной обсерватории, (Нальчик, 6-8 июня, 2017 г.).
16. 16-я Российская гравитационная конференция «Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике RUSGRAV-16», БФУ им. Иммануила Канта, (Калининград, 24-30 июня, 2017 г.).
17. Международная научная конференция «Физические интерпретации теории относительности» – PIRT-2017, МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, 3-6 июля, 2017 г.).
18. 3-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике «Петровские чтения», КФУ, (Казань, 27 ноября - 2 декабря, 2017 г.).
19. 2-nd international conference «Analysis and differential equations with applications to natural sciences – ADEANS II», KwaZulu-Natal University, Durban, University of Pretoria and the Centre of Excellence in Mathematical and Statistical Sciences (Salt Rock, Ballito, South Africa, 27 april - 1 may, 2018).
20. LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники - 2018, РУДН, (Москва, 14-18 мая 2018 г.).
21. 4-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике «Петровские чтения», КФУ, (Казань, 26 ноября - 1 декабря, 2018 г.).

Полученные результаты также докладывались и обсуждались на семинаре «Семинар по алгебре, геометрии, математической физике» кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» (МГТУ им. Баумана, Москва, Россия, 2018 г.); на семинарах научно-исследовательской лаборатории гравитации, космологии, астрофизики (УлГПУ, Ульяновск, Россия, 2017-2018 гг.); на семинарах научно-исследовательского отдела астрофизики и космологии (Университет КваЗулу-Натал, ЮАР, 2017-2018 гг.).

Личный вклад. Автору принадлежит постановка задачи, получение основных результатов и их интерпретация.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 30 печатных изданиях, включая 2 монографии. Из них 19 статей опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 публикаций в других изданиях и 3 статьи опубликованы в материалах конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 223 страницы, включая 6 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 325 наименований.

Основное содержание работы.

В **главе 1** изложены основные положения теории космологической инфляции, причины использования метрики пространства Фридмана-Робертсона-Уокера для описания геометрии однородной изотропной Вселенной при построении космологических моделей, согласующихся с современными наблюдательными данными. Обсуждаются два вида классификаций моделей космологической инфляции: по виду потенциала скалярного поля и по закону ускоренного расширения. Также рассматриваются основные параметры, которые используются для анализа моделей ранней Вселенной, и причины, приводящие к необходимости исследования модификаций гравитации Эйнштейна.

Использованы материалы, опубликованные в следующих работах автора исследования:

1. Червон С.В., Фомин И.В., Кубасов А.С. Скалярные и киральные поля в космологии. У.: ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2015. 215 с.
2. Fomin I.V. Velocity of Light in Anisotropic Spacetime // Russ. Phys. J. 2016. Vol. 59. P. 41-47.
3. Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н. Гравитационные волны ранней Вселенной. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 156 с.

Глава 2 посвящена изложению приближенных и точных методов анализа космологической динамики и соотношений между ними, что позволяет проводить точный анализ космологических моделей на основе одного (наиболее удобного для исследователя) метода. Также проведена классификация существующих методов генерирования точных решений уравнений космологической динамики.

В контексте обобщения методов точных решений все независимые уравнения динамики приводились к уравнению типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера с дополнительными соотношениями между параметрами космологических моделей, на основе чего было сформулировано «первое утверждение о эквивалентности космологических решений» и предложено новое условие интегрируемости уравнений космологической динамики.

Далее рассматривался метод генерирования новых точных решений из известных на основе преобразований параметров космологических моделей. Результатом данных преобразований является класс моделей, обобщающих инфляцию с экспоненциально-степенной динамикой, которая предполагает как выход из стадии ускоренного расширения, так и наличие повторного экспоненциального расширения на больших временах. Предложенные

преобразования также подразумевают взаимосвязь между космологическими моделями с каноническим и фантомным скалярными полями.

Приведенный метод сопоставления точных и приближенных решений позволяет оценить актуальность приближения медленного скатывания, которое часто применяется при проведении анализа космологических моделей. Рассматриваются методы расчета расхождения между точными и приближенными решениями, по которому, кроме оценки этого различия, определяется значение скалярного поля в начале стадии инфляции, также такое расхождение рассматривается в виде генерирующей функции для поиска точных решений уравнений космологической динамики.

Использованы материалы, опубликованные в следующих работах автора исследования:

1. Червон С.В., Фомин И.В., Кубасов А.С. Скалярные и киральные поля в космологии. У.: ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2015. 215 с.
2. Fomin I.V. High-frequency gravitational waves in exact inflationary models // Proceedings of 12th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology (ICGAC-12). Moscow. 2015. P. 255-256.
3. Fomin I.V. The models of cosmological inflation in the context of kinetic approximation // J. Phys. Conf. Ser. 2017. Vol. 731. P. 012004.
4. Fomin I.V. Cosmological inflation models in the kinetic approximation // Theor. Math. Phys. 2017. Vol. 191. P. 781-791.
5. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact and Approximate Solutions in the Friedmann Cosmology // Russ. Phys. J. 2017. Vol. 60. P. 427-440.
6. Chervon S.V., Fomin I.V., Beesham A. The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology // Eur. Phys. J. C. 2018. Vol. 78. P. 301.
7. Фомин И.В. Точные решения в космологии Фридмана со скалярными полями // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 1. С. 36-45.
8. Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н. Гравитационные волны ранней Вселенной. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 156 с.
9. Fomin I.V., Chervon S.V., Maharaj S.D. A new look at the Schrodinger equation in exact scalar field cosmology // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2019. Vol. 16. P. 1950022.

В **главе 3** рассматривается теория космологических возмущений в моделях ранней Вселенной, на основе которой получены формулы расчета основных параметров космологических возмущений, необходимых для верификации теоретических моделей ранней Вселенной по наблюдательным данным.

Исходя из предложенных ранее преобразований моделей с произвольной динамикой к обобщенной экспоненциально-степенной инфляции, показано, что данные преобразования приводят к соответствию построенных моделей наблюдательным данным по параметрам космологических возмущений.

В завершении главы рассматривается значение косвенного и прямого методов детектирования реликтовых гравитационных волн для анализа моделей ранней Вселенной, приводится краткий обзор существующих и перспективных методов их прямого наблюдения. Также обсуждаются методы регистрации высокочастотных гравитационных волн в интерферометрах Фабри-Перро с использованием эффекта низкочастотного оптического резонанса. Теоретическая оценка чувствительности таких детекторов соответствует принципиальной возможности прямых наблюдений реликтовых гравитационных волн.

Использованы материалы, опубликованные в следующих работах автора исследования:

1. Фомин И.В. Погрешность приближения медленного скатывания на инфляционной стадии эволюции Вселенной // Сборник Российской летней школы-семинара «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» (GRACOS-2007). Казань. 2007. С. 166-167.
2. Фомин И.В., Червон С.В. Соотношения тензорной и скалярной мод возмущений в точных моделях космологической инфляции // Сборник Российской летней школы-семинара «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» (GRACOS-2007). Казань. 2007. С. 168-169.
3. Червон С.В., Фомин И.В. Квантовое рождение начальных космологических возмущений // Известия Вузов. Поволжский регион. Сер. Физико-математические науки. 2008. № 4. С. 97-107.
4. Chervon S.V., Fomin I.V. On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation // Gravitation and Cosmology. 2008. Vol. 14. P. 163-167.
5. Fomin I.V. High-frequency gravitational waves in exact inflationary models // Proceedings of 12th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology (ICGAC-12). Moscow. 2015. P. 255-256.
6. Фомин И.В. Гравитационные волны в конформно-плоских пространствах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4(67). С. 65-78.
7. Фомин И.В. Применение низкочастотного оптического резонанса для регистрации высокочастотных гравитационных волн / Фомин И.В. [и др.] // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1(58). С. 26-35.
8. Fomin I.V., Morozov A.N. The high-frequency gravitational waves in exact inflationary models with Gauss-Bonnet term. // J. Phys. Conf. Ser. 2017. Vol. 798. P. 012088.

9. Fomin I.V. Generation and detection of high frequency gravitational waves at intensive electromagnetic excitation / Fomin I.V. et al. // Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1051. P. 012001.
10. Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н. Гравитационные волны ранней Вселенной. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 156 с.

В **главе 4** рассматривается обобщение предложенных ранее методов точного анализа космологических моделей на случай дополнительного материального поля в плоской Вселенной Фридмана и ненулевой кривизны пространства. Показана возможность использования данных методов при построении точных решений для двухполевых киральных космологических моделей и моделей с полем k -эссенции.

Использованы материалы, опубликованные в следующих работах автора исследования:

1. Фомин И.В. Модели с нетривиальной кинетической частью в контексте точных решений уравнений динамики скалярного поля // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №4(61). С. 37-44.
2. Fomin I.V. Generalized exact solutions in the Friedmann cosmology // Russ. Phys. J. 2018. Vol. 61. P. 843-851.
3. Fomin I.V. The chiral cosmological models with two components // J. Phys. Conf. Ser. 2017. Vol. 918. - P. 012009.
4. Фомин И.В., Червон С.В., Крюков С.В. Динамика киральных космологических полей в фантомно-канонической модели // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физико-математические и технические науки. 2018. № 1. С. 74-80.
5. Fomin I.V. Two-Field Cosmological Models with a Second Accelerated Expansion of the Universe // Moscow University Physics Bulletin. 2018. Vol. 73. P. 696-701.
6. Фомин И.В. Точные решения в космологии на основе нелинейных сигма-моделей // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 2. С. 49-58.

В **главе 5** рассматриваются модели ранней Вселенной, основанные на скалярно-тензорной гравитации, в контексте неминимального взаимодействия скалярного поля со скаляром Риччи. Обсуждается влияние такого типа взаимодействия на динамику инфляционного расширения, эволюцию скалярного поля и потенциал.

Предложен класс моделей, в которых неминимальное взаимодействие постоянного в случае гравитации Эйнштейна скалярного поля и кривизны является источником его эволюции, отклонения динамики Вселенной от экспоненциального расширения и потенциала скалярного поля от плоского. Показано, что такие модели находятся в хорошем соответствии с наблюдательными данными.

Обнаруженная параметрическая связь между ОТО и скалярно-тензорными теориями гравитации в четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера позволяет рассматривать скалярно-тензорную гравитацию как некоторое параметрически зависимое расширение теории гравитации Эйнштейна. На основе полученных результатов сформулировано «второе утверждение о эквивалентности космологических решений».

Использованы материалы, опубликованные в следующих работах автора исследования:

1. Fomin I.V., Chervon S.V. Non-minimal coupling influence on the deviation from de Sitter cosmological expansion // *Eur. Phys. J. C.* 2018. Vol. 78. P. 918.
2. Fomin I.V., Chervon S.V. Inflation with explicit parametric connection between GR and scalar-tensor gravity // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33. P. 1850161.
3. Фомин И.В. Точные решения в космологии Фридмана со скалярными полями // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2018. № 1. С. 36-45.

В **главе 6** рассматривались модели ранней Вселенной с неминимальным взаимодействием скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне или модели на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне (ЭГБ). Была произведена оценка влияния такого взаимодействия на динамику расширения Вселенной и потенциал скалярного поля. Основой проведенного анализа являлась обнаруженная связь между параметрами Хаббла в случае ОТО и ЭГБ-гравитации, которая позволяет сопоставить эти модели без использования конформных преобразований метрики, не представленных в литературе на данный момент.

Обнаруженная связь с гравитацией Эйнштейна также использовалась для построения точных решений в случае моделей ЭГБ-инфляции с модификацией потенциала скалярного поля относительно базовой модели на основе ОТО и полностью соответствующих случаю теории гравитации Эйнштейна. На основе полученных результатов сформулировано «третье утверждение о эквивалентности космологических решений».

Далее, в контексте развития ранее предложенных методов, рассматривается построение точных космологических решений в моделях, основанных на обобщенной скалярно-тензорной гравитации, включающих неминимальное взаимодействие поля со скаляром Риччи и Гаусса-Бонне, также приводится связь таких моделей с гравитацией Хорндески.

На основе второго и третьего утверждений о эквивалентности космологических решений формулируется «утверждение о специальном классе обобщенных космологических решений», в котором отмечено, что на основе точных космологических решений в случае гравитации Эйнштейна можно построить аналогичные решения для обобщенной скалярно-тензорной гравитации или гравитации Хорндески и вычислить соответствующие параметры этих теорий гравитации. Параметры космологических возмущений в таких моделях будут соответствовать случаю ОТО с высокой точностью.

Использованы материалы, опубликованные в следующих работах автора исследования:

1. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact inflation in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // Gravitation and Cosmology 2017. Vol. 23. P. 367-374.
2. Fomin I.V., Chervon S.V. A new approach to exact solutions construction in scalar cosmology with a Gauss-Bonnet term // Mod. Phys. Lett. A. 2017. Vol. 32. P. 1750129.
3. Fomin I.V. Cosmological Inflation with Einstein-Gauss-Bonnet Gravity // Physics of Particles and Nuclei. 2018. Vol. 49. P. 525-529.
4. Фомин И.В. Точные решения в космологии Фридмана со скалярными полями // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 1. С. 36-45.
5. Фомин И.В. Конструирование точных решений в космологии, основанной на гравитации Хорндески // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 2. С. 59-67.

В **Заключении** сформулированы основные результаты исследования, обсуждаются перспективы их применения и дальнейшего развития.

Полный список публикаций автора по теме исследования представлен в **Приложении А**.

Глава 1. Ускоренное расширение Вселенной и космологическая инфляция

Модели инфляционного (ускоренного) расширения Вселенной на раннем этапе ее эволюции, то есть на временах близких ко времени Планка, были предложены в конце 1970-х и, главным образом, в начале 1980-х годов [1–4], и, в настоящее время, становятся все более убедительными как необходимый этап, модифицирующий стандартную теорию Большого Взрыва, которая основана на решениях уравнений Эйнштейна для Вселенной, заполненной обычным барионным веществом с положительной плотностью энергии $\rho_m > 0$ и давлением $p_m > 0$, $\rho_m + p_m > 0$, полученных Фридманом [30–32]. Однако, экстраполяция фридмановских решений на ранние времена приводит ко многим неразрешимым проблемам при построении на их основе сценариев эволюции Вселенной [33].

Экспоненциальное (де Ситтеровское) расширение, предполагающее $p = -\rho$, или близкое к нему расширение ранней Вселенной на основе эволюции некоторого вещества с уравнением состояния $p \simeq -\rho$, то есть с отрицательным давлением, является особенностью инфляционных моделей, которые позволяют решить проблемы стандартной модели теории Большого Взрыва, именно, проблемы горизонта, плоскостности, однородности, изотропности, малой концентрации экзотических состояний материи (доменных стенок, релитовых монополей и др.), анизотропии реликтового излучения, начальной сингулярности и некоторые другие проблемы [33;34].

Таким образом, космологические модели, содержащие комбинацию фридмановских решений и решений (квази) де Ситтера, представляют собой основу актуального описания эволюции Вселенной. В контексте инфляционной парадигмы ранняя Вселенная в течение некоторого времени расширяется ускоренно и, далее, переходит в режим степенного расширения без ускорения, соответствующего решениям Фридмана.

1.1 Геометрия пространства-времени

В большинстве космологических моделей геометрическое описание Вселенной основано на модели однородного изотропного пространства (пространства-времени) Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ), что связано с высокой степенью изотропности пространства, измеренной на основе исследований реликтового излучения [27;35]. Также эта идентифика-

ция опирается на формальный результат, известный как теорема Элерса-Герена-Сакса [36], что относится ко Вселенной, заполненной любой идеальной баротропной жидкостью [37].

Метрика пространства Фрийдмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) записывается следующим образом

$$(ds^2)_{FRW} = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (1.1)$$

где значения $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$ соответствуют пространственно плоской, замкнутой и открытой моделям Вселенной.

Также отметим два важных частных случая пространства ФРУ:

1. Случай $k = 0$ и $a(t) = \exp(\lambda t)$, где λ – некоторая постоянная, то есть экспоненциальное расширение пространства соответствует метрике де Ситтера

$$(ds^2)_{dS} = -dt^2 + \exp(2\lambda t) (dx^2 + dy^2 + dz^2); \quad (1.2)$$

2. Случай $k = 0$ и $a(t) = \text{const}$, то есть некоторая локальная малая окрестность пространства ФРУ соответствует пространству Минковского

$$(ds^2)_{Mink} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.3)$$

Геометрические свойства пространств Фрийдмана-Робертсона-Уокера, де Ситтера и Минковского подробно рассматривались в большом числе работ (см., например, в книге [38]). В контексте построения и анализа моделей ранней Вселенной большое значение имеют динамические свойства пространства де Ситтера как частного случая пространства ФРУ при условии экспоненциального ускоренного расширения.

Локальную анизотропию пространства ФРУ можно оценить, исходя из метрики Минковского, дополненной малыми возмущениями [39]

$$(ds^2)_{Pert} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \quad h_{\mu\nu} \ll 1. \quad (1.4)$$

Верхняя граница локальной анизотропии пространства-времени по зависимости скорости света от направления наблюдения, за вычетом дипольной анизотропии, связанной с движением приемника, согласно современным экспериментам, составляет $\delta c(\theta)/c < 10^{-10} - 10^{-14}$ [39–42]. В качестве источника наблюдаемой квадрупольной анизотропии реликтового излучения порядка 10^{-5} [27;35] можно рассматривать процессы, происходившие в ранней Вселенной, которые в контексте инфляционной парадигмы связаны с квантовыми флуктуациями скалярного поля [33].

Таким образом, в качестве модели пространства-времени рассматривается однородное изотропное четырехмерное пространство Фрийдмана-Робертсона-Уокера, что соответствует наиболее распространенному подходу к описанию геометрии Вселенной.

1.2 Скалярное поле в космологии

Источником ускоренного расширения ранней Вселенной с уравнением состояния $p = -\rho$ является вакуум, уравнению состояния $p \simeq -\rho$ соответствует некоторое скалярное (бозонное) поле. Статистика Бозе-Эйнштейна для ансамбля бозонов, в отличие от ансамбля фермионов, подчиняющихся принципу запрета Паули, подразумевает, что в одном квантовом состоянии могут находиться несколько частиц, что приводит к образованию бозонного конденсата, в котором увеличение концентрации безмассовых бозонов связано с уменьшением эффективного давления до соответствующего уравнению состояния вида $p \simeq -\rho$. Изначальное (квази) экспоненциальное расширение, связанное с отрицательным давлением, в силу экзотического уравнения состояния, является неустойчивым, что приводит к фазовому переходу, прекращению ускоренного расширения и распаду первоначального объема на множество областей, в которых дальнейшая эволюция соответствует решениям Фридмана. Также наличие скалярного поля нарушает симметрию системы, что приводит к появлению массы у изначально безмассовых частиц, например, в поле Хиггса [33]. Таким образом, введение в космологические модели скалярного поля делает возможным переход от решений (квази) де Ситтера к решениям Фридмана.

Чтобы предотвратить быстрый распад состояния $p \simeq -\rho$, необходимо допустить существование некоторого потенциального барьера $V(\phi)$, то есть минимума потенциальной энергии скалярного поля. Следовательно, в реалистичных моделях инфляции скалярное поле эволюционирует из состояния «фальшивого вакуума» с ненулевой потенциальной энергией в состояние «истинного вакуума», соответствующее минимуму потенциала $V_{min}(\phi) = 0$. Иначе говоря, скалярное поле скатывается (или туннелирует) из некоторого начального состояния к минимуму $V(\phi)$, и характер этого процесса определяется формой потенциала.

В работе Старобинского (1978) [1] была предложена несингулярная изотропная космологическая модель с массивным скалярным полем. Далее, в работах Старобинского (1980) [2], Гуса (1981) [3], Линде (1982) [4], Альбрехта и Штайнхардта (1982) [43] учитываются физические механизмы, основанные на квантовых флуктуациях скалярного поля и высокотемпературных фазовых переходах на ранней стадии Вселенной.

В работе Сато (1981) [44] модель фазового перехода первого рода в ранней Вселенной приводит к экспоненциальному расширению, которое растягивает домены в масштабах намного превышающих горизонт событий. Кроме того, также в работе Сато (1981) [45] было показано, что флуктуации, связанные с фазовым переходом, экспоненциально растягиваются и затем могут играть роль затравочных флуктуаций для образования крупномас-

штабной структуры Вселенной. Также, в работе Эйнхорна и Сато (1981) [46] анализировалось решение проблемы реликтовых монополей за счет экспоненциального расширения ранней Вселенной. Сценарий хаотической инфляции, предложенный Линде (1983) [47], отличается от предыдущих тем, что не основан на высокотемпературном фазовом переходе, а содержит однородное скалярное поле, которое медленно скатывается к минимуму потенциала из любого возможного начального состояния. В работах Березина и др. [48–52] рассматривалось метастабильное вакуумное состояние как источник ускоренного расширения ранней Вселенной, фазовые переходы в ранней Вселенной и исследовалась структура пространства-времени в контексте хаотической инфляции.

Однородные изотропные космологические модели с массивным скалярным полем изучались в работах [53;54], в которых было показано, что инфляционные стадии являются общим свойством большинства решений в рассматриваемых моделях. Общие условия для инфляции были исследованы в работе [55], также рассматривалась инфляционная стадия и естественный выход из нее для некоторых потенциалов скалярного поля, именно: полиномиальных, логарифмических и экспоненциальных. Связь между потенциалами скалярных полей в физике элементарных частиц и космологии рассматривалась в работе [56], в которой также было показано, что экспоненциальный потенциал приводит к решению со степенной инфляцией. Подробные исследования степенной инфляции были проведены в работе [57]. Авторы нашли ограничения на рассматриваемые модели, происходящие из требования решения проблем горизонта, плоскостности, повторного нагревания скалярного поля и др. Также, точное степенное инфляционное решение с экспоненциальным потенциалом было рассмотрено в работе [58].

На данный момент существует множество моделей космологической инфляции с различными потенциалами скалярного поля и различной спецификой его эволюции. Большое число актуальных моделей ранней Вселенной на основе инфляционной парадигмы рассмотрено в обзорах [59;60].

К настоящему времени появилось вполне разумное с физической точки зрения обоснование включения скалярных полей в космологические модели, основанное на экспериментальном обнаружении бозона Хиггса в эксперименте на Большом Адронном Коллайдере [61]. Таким образом, скалярное поле, соответствующее бозонам Хиггса, может рассматриваться как источник гравитационного поля ранней Вселенной. Более того, хиггсовское поле может рассматриваться как инфлатон, приводящий к раннему ускоренному расширению Вселенной. Также рассматриваются и другие типы полей, на основе уравнений динамики которых строятся различные инфляционные сценарии и анализируются физические предпосылки и механизмы, способствующие возникновению чрезвычайно быстрого расширения (раздувания) Вселенной [59;60].

Теперь, в системе единиц $8\pi G = c = 1$, запишем действие, определяющее динамику скалярного поля ϕ (инфлатона) на основе теории гравитации Эйнштейна

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.5)$$

Скалярное поле ϕ будем рассматривать как некоторую идеальную жидкость с баротропным уравнением состояния ($p = w\rho$).

Из вариации действия (1.5) по метрике и полю, для случая пространственно плоской Вселенной Фридмана

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.6)$$

получим уравнения, определяющие динамику инфлатона [33]

$$3H^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (1.7)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (1.8)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi = 0, \quad (1.9)$$

где $V'_\phi = dV/d\phi$.

Из трех уравнений (1.7)–(1.9) только два являются независимыми.

Докажем это утверждение следующим образом: вначале, из уравнений (1.7)–(1.8), получим

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (1.10)$$

Далее, используя $V'_\phi = \dot{V}/\dot{\phi}$, запишем уравнение (1.9) в следующем виде

$$\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 + \dot{V} = \frac{d}{dt} \left(V + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) + 3H\dot{\phi}^2 = 0. \quad (1.11)$$

Продифференцировав уравнение (1.7) по времени и используя (1.10), получим уравнение (1.11).

Таким образом, описание динамики Вселенной Фридмана будем рассматривать на основе первых двух уравнений, которые запишем в следующей форме

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (1.12)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (1.13)$$

Другую форму записи получим, продифференцировав уравнение (1.7) по полю и приравняв к (1.9), с учетом соотношения $\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) = \ddot{\phi}$,

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'_\phi{}^2, \quad (1.14)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_\phi. \quad (1.15)$$

Такая форма записи уравнений космологической динамики впервые рассматривалась в работах Иванова [62; 63], впоследствии, в статье Салопека и Бонда [64], в которой они получили названия уравнений типа Гамильтона-Якоби. В дальнейшем, уравнения (1.14)–(1.15) будем называть также уравнениями Иванова-Салопека-Бонда.

Для построения непротиворечивой модели космологической инфляции необходимо выполнение следующих условий:

1. Наличие стадии ускоренного расширения, которая подразумевает $-1 < w < -1/3$.
2. Завершение стадии ускоренного расширения повторным разогревом скалярного поля с последующим образованием фотонов, то есть переходом на стадию преобладания излучения, которой соответствует $w = 1/3$.
3. Соответствие полученных параметров космологических возмущений современным наблюдениям.

В настоящее время, наряду с другими моделями, рассматриваются несколько типов моделей космологической инфляции, которые различаются как видом потенциала, так и начальными условиями, при которых возникает инфляционная стадия – скалярное поле может находиться в одном из минимумов своего потенциала или ускоренное расширение происходит при любых условиях, допускающих возникновение инфляции для значений плотности энергии скалярного поля сравнимых с планковскими [59].

Возможны различные режимы развития стадии ускоренного расширения, также модели различаются условием окончания стадии инфляции, например, медленное скатывание скалярного поля к минимуму потенциала с последующими осцилляциями около минимума или фазовый переход (в моделях, содержащих более одного поля) на другую стадию эволюции, вызванный медленным скатыванием одного из полей к минимуму потенциала с образованием пузырей новой фазы [33; 34]. Например, в моделях хаотической инфляции, завершение стадии ускоренного расширения происходит, когда плотность энергии скалярного поля уменьшается достаточно для того чтобы «трение» $3H\dot{\phi}$ также уменьшалось и скалярное поле начинало осциллировать около минимума потенциала и, в дальнейшем, происходила потеря энергии за счет рождения элементарных частиц с повторным (постинфляционным) нагреванием скалярного поля и последующим установлением термодинамического равновесия. Отметим, что в большинстве инфляционных моделей повторное нагревание происходит из-за осцилляций инфлатона, которые приводят к большому количеству коротких периодов образования элементарных частиц [33; 59].

Рассмотрим основные классы инфляционных потенциалов, которые представлены на Рис. 1.1

Первый класс потенциалов соответствует экспоненциальным или полиномиальным потенциалам, которые, как правило, рассматриваются в контексте хаотической инфля-

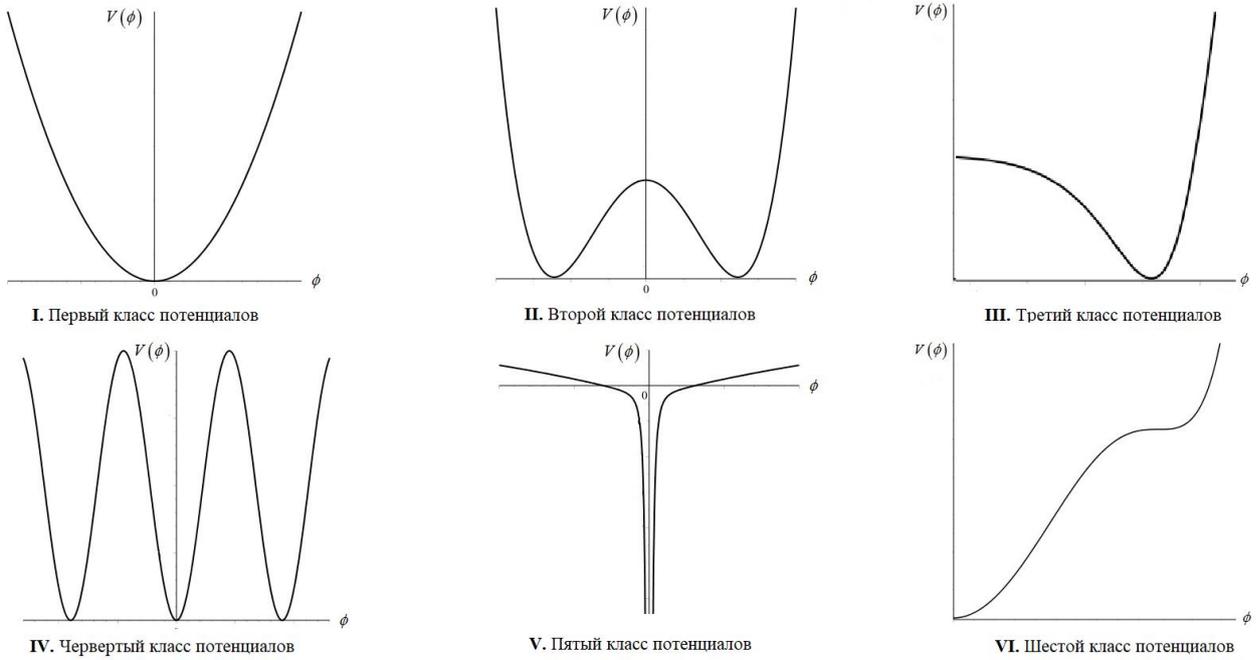


Рисунок 1.1 — Основные классы потенциалов скалярного поля в моделях космологической инфляции.

ции [33]; второй класс потенциалов также соответствует полиномиальным потенциалам, но приводит к спонтанному нарушению симметрии, например, посредством механизма Хиггса, где хиггсовский бозон является инфлатоном [33]; третий класс потенциалов также соответствует стадии инфляции, наиболее известный потенциал третьего класса рассматривался в работах Коулмана и Вайнберга, в которых учитывались радиационные поправки [65]; четвертый класс потенциалов определяется гармоническими функциями и, как правило, связан с осциллирующей динамикой, при которой стадии ускоренного расширения (инфляции) сменяются стадиями быстрого сжатия (дефляции) [66]; пятый класс соответствует обратной зависимости потенциала от поля и рассматривается в контексте так называемой «промежуточной инфляции» [67]; шестой класс потенциалов с определенным состоянием фальшивого вакуума, в некоторых случаях, возникает в низкоэнергетическом пределе теории суперструн и супергравитации [68; 69].

Вид потенциала скалярного поля определяется из физики элементарных частиц, теорий объединения фундаментальных взаимодействий, таких как суперсимметричные теории и теории струн в контексте инфляционной парадигмы. Физические механизмы, соответствующие большому числу инфляционных потенциалов, рассматривались в обзорах [59; 60].

Ввиду того, что потенциал скалярного поля имеет ключевое значение для определения физических процессов на стадии космологической инфляции, для построения моделей ранней Вселенной задается именно потенциал $V(\phi)$. Определим такой подход как *анализ*

инфляции на основе потенциала. В рамках такого подхода, классификация моделей космологической инфляции основана на различии в потенциалах скалярного поля [59]. Также, рассматривается разделение моделей на инфляцию с «большим» и «малым» полем [70], которые связаны с формой потенциала, поэтому такой способ классификации может быть включен в данный подход.

Тем не менее, нахождение точных решений системы уравнений (1.7)–(1.9) по заданному потенциалу в большинстве случаев невозможно в силу их нелинейности. По этой причине, удобным инструментом анализа инфляционных моделей, на основе заданного потенциала скалярного поля является *приближение медленного скатывания* [33; 59; 71], упрощающее исходные уравнения, формализм которого мы рассмотрим в дальнейшем.

Динамика расширения Вселенной, определяемая масштабным фактором $a(t)$, имеет не меньшее значение при анализе космологических моделей. Задавая закон расширения $a = a(t)$ часто удается найти точные решения системы уравнений (1.7)–(1.9), то есть восстановить эволюцию скалярного поля $\phi = \phi(t)$ и его потенциал $V(\phi)$. Такой подход определим как *анализ инфляции на основе динамики*. Таким образом, альтернативной классификацией моделей космологической инфляции является их различие по закону расширения, то есть по динамике.

Полученные из точных решений потенциалы часто содержат дополнительные постоянные слагаемые, которые можно трактовать как неустранимую космологическую постоянную, также точные решения для некоторых физических потенциалов не удастся найти этим способом. Тем не менее, потенциалы, полученные на основе заданной динамики расширения Вселенной, могут иметь корректное физическое истолкование.

В настоящем исследовании основное внимание будет точным решениям уравнений космологической динамики, то есть второму подходу к анализу и классификации моделей инфляции.

Теперь рассмотрим основные величины, которые характеризуют инфляционные модели ранней Вселенной, основанные на эволюции скалярного поля, вне зависимости от выбранного метода анализа.

1.3 Параметр состояния

Однородное изотропное каноническое скалярное поле можно описывать моделью идеальной жидкости с тензором энергии-импульса вида

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p, \quad (1.16)$$

компоненты которого в пространстве ФРУ в сопутствующей системе координат $u^\mu = 0$ определяются следующим образом

$$T_0^0 = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (1.17)$$

$$T_i^i = p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (1.18)$$

где ρ_ϕ – плотность полной энергии скалярного поля, p_ϕ – давление.

Таким образом, запишем уравнение состояния в следующем виде

$$p_\phi = w\rho_\phi, \quad (1.19)$$

где параметр состояния w определяется как

$$w = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (1.20)$$

Условием ускоренного расширения является следующее ограничение на значение параметра $w < -1/3$.

1.4 Число e -фолдов

Число e -фолдов или число возрастаний масштабного фактора в e -раз обычно записывается как натуральный логарифм отношения масштабного фактора в конце инфляции к масштабному фактору в начале [33]

$$N = \ln \frac{a(t_e)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_e} H dt, \quad (1.21)$$

где t_i и t_e – время начала и завершения стадии инфляции.

Также, на основе приближения медленного скатывания, число e -фолдов записывается следующим образом [72]

$$N \simeq - \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V}{V'_\phi} d\phi. \quad (1.22)$$

Важной характеристикой при описании динамики ранней Вселенной является пересечение радиуса Хаббла $k = aH$, где k – сопутствующее волновое число. Сопутствующий масштаб k изначально меньше хаббловского радиуса $k < aH$, но, в течение инфляции, во время $t_H < t_e$ будет его пересекать.

Отметим, что данный масштаб имеет важное значение как для анализа фоновой динамики, так и при вычислении спектральных параметров космологических возмущений.

Для сопутствующего масштаба $\lambda = a/k$ определим зависимость квадрата параметра Хаббла H_k^2 от волнового числа k следующим образом [72]

$$\frac{d \ln H_k^2}{d \ln k} = \left(\frac{d \ln H_k^2}{dt} \right) \left(\frac{dt}{d \ln a} \right) \left(\frac{d \ln a}{d \ln k} \right). \quad (1.23)$$

Также, запишем следующее соотношение

$$\lambda \left(\frac{a_e}{a} \right) e^{-\Delta N_\lambda} = \lambda \left(\frac{T}{T_e} \right) e^{-\Delta N_\lambda}, \quad (1.24)$$

где a_e и T_e – масштабный фактор и температура в конце инфляции.

На основе данных соотношений запишем значение числа e -фолдов, соответствующее завершению инфляционной стадии эволюции Вселенной [72]

$$\Delta N_\lambda \simeq 65 + \ln \left(\frac{\lambda}{3000 \text{Мпк}} \right) + 2 \ln \left(\frac{V^{1/4}}{10^{14} \text{ГэВ}} \right) - \ln \left(\frac{T_e}{10^{10} \text{ГэВ}} \right). \quad (1.25)$$

Согласно данным наблюдений анизотропии реликтового излучения число e -фолдов на завершении стадии космологической инфляции оценивается как $\Delta N \sim 60$ [27].

1.5 Параметры медленного скатывания

При анализе инфляционной динамики и расчете параметров космологических возмущений важное значение имеют параметры медленного скатывания, которые мы определим из уравнений (1.14)–(1.15).

Вначале рассмотрим уравнение

$$V = 3H^2 - 2H_\phi'^2. \quad (1.26)$$

Первый параметр ϵ получаем, разделив уравнение (1.26) на H^2 , в результате

$$\frac{V}{H^2} = 3 - 2 \frac{H_\phi'^2}{H^2} = 3 - \epsilon, \quad \epsilon \equiv 2 \frac{H_\phi'^2}{H^2}, \quad (1.27)$$

$$V = H^2(3 - \epsilon). \quad (1.28)$$

Дифференцируем уравнение (1.26) по ϕ

$$V_\phi' = 6H_\phi' H - 4H_\phi' H_\phi'', \quad (1.29)$$

и разделив на H^2 , получим

$$\frac{V_\phi'}{H^2} = 6 \frac{H_\phi'}{H} - 4 \frac{H_\phi'}{H} \frac{H_\phi''}{H}. \quad (1.30)$$

Далее, выражаем, где это возможно, члены в этом уравнении через ϵ

$$\frac{V'_\phi}{H^2} = 6\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} - 4\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left(\frac{H''_\phi}{H} \right). \quad (1.31)$$

Посредством последнего множителя определяем второй параметр медленного скатывания δ

$$\frac{V'_\phi}{H^2} = 6\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} - 2\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\delta, \quad \delta \equiv 2\frac{H''_\phi}{H}. \quad (1.32)$$

Подставляя, $\epsilon = 2\frac{H'^2_\phi}{H^2}$ в уравнение (1.32), получаем

$$V'_\phi = 2H'_\phi H(3 - \delta). \quad (1.33)$$

Связь между параметрами ϵ и δ получим, продифференцировав уравнение (1.28) и приравняв к (1.33), в результате

$$\delta = \epsilon + \left(\sqrt{2\epsilon} \right)'_\phi. \quad (1.34)$$

Третий параметр получим аналогично, продифференцировав (1.29) по ϕ и разделив на H^2 и выразив, где это возможно, члены в этом уравнении через ϵ и δ

$$\frac{V''_\phi}{H^2} = -4\frac{H'''_\phi H'_\phi}{H^2} + 6\frac{H'^2_\phi}{H^2} + 6\frac{H''_\phi}{H} - 4\frac{H''^2_\phi}{H^2} = -4\frac{H'''_\phi H'_\phi}{H^2} + 3(\epsilon + \delta) - \delta^2. \quad (1.35)$$

Первое слагаемое обозначим как третий параметр медленного скатывания ξ

$$\frac{V''_\phi}{H^2} = -\xi + 3(\epsilon + \delta) - \delta^2, \quad \xi \equiv 4\frac{H'''_\phi H'_\phi}{H^2}. \quad (1.36)$$

Далее, на основе предыдущих результатов, запишем следующее соотношение

$$V''_\phi = H^2[-\xi + 3(\epsilon + \delta) - \delta^2]. \quad (1.37)$$

Связь между параметрами ϵ , δ и ξ получим, продифференцировав уравнение (1.33) и приравняв к (1.37), в результате

$$\xi = \delta'_\phi \sqrt{2\epsilon} + \epsilon\delta. \quad (1.38)$$

Также, можно определить ξ только через ϵ , подставив (1.34) в (1.38).

Эту процедуру можно повторять до любого порядка, причем, общая формула для параметров медленного скатывания выглядит следующим образом

$$\epsilon_n = 2^n \frac{(H')^{n-1} d^{(n+1)}H}{H^n d\phi^{(n+1)}}, \quad n \geq 1. \quad (1.39)$$

Запишем первые три параметра медленного скатывания

$$\epsilon \equiv 2 \left(\frac{H'_\phi}{H} \right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (1.40)$$

$$\delta \equiv 2\frac{H''_\phi}{H} = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}, \quad (1.41)$$

$$\xi \equiv 4\frac{H'_\phi H'''_\phi}{H^2} = \frac{1}{H} (\dot{\epsilon} - \dot{\delta}) = \frac{1}{2H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{H}}{\dot{H}} \right). \quad (1.42)$$

Исходя из соотношений (1.40)–(1.42), можно рассматривать параметры медленного скатывания как функции времени или поля. В течение стадии инфляции $\epsilon < 1$ и ее завершение определяется условием $\epsilon = 1$.

Для анализа космологических моделей, вместо параметров медленного скатывания, часто используются «параметры потока», которые определяются в терминах параметра Хаббла как функции числа e -фолдов [73–75]

$$\epsilon_0 = \frac{H(N_0)}{H(N)}, \quad \epsilon_{n+1} = \frac{d \ln |\epsilon_n|}{dN}, \quad n \geq 0. \quad (1.43)$$

где $H(N_0)$ – параметр Хаббла в начале инфляции,

Первые три параметра потока определяются через параметры медленного скатывания следующим образом

$$\epsilon = \epsilon_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon, \quad (1.44)$$

$$\delta = \epsilon_1 - \frac{1}{2}\epsilon_2, \quad \epsilon_2 = 2(\epsilon - \delta), \quad (1.45)$$

$$\xi = \frac{1}{2}\epsilon_2\epsilon_3, \quad \epsilon_3 = \frac{\xi}{\epsilon - \delta}, \quad \epsilon_2\epsilon_3 = 2\xi. \quad (1.46)$$

Таким образом, любую модель космологической инфляции можно рассматривать на основе набора базисных функций $\{\epsilon, \delta, \xi\}$ (или $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$), связь между которыми (уравнения траектории в пространствах этих параметров) определяется с помощью известного параметра Хаббла $H = H(t)$, что соответствует выбору конкретной модели ранней Вселенной. Соотношения (1.44)–(1.46) определяют прямые и обратные преобразования между базисами $\{\epsilon, \delta, \xi\}$ и $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$.

Поскольку параметры медленного скатывания и параметры потока связаны как с динамикой Вселенной, так и со спектральными параметрами космологических возмущений, анализ космологических моделей на их основе является достаточно удобным. В настоящем исследовании анализ моделей ранней Вселенной будет проводиться на основе параметров медленного скатывания.

1.6 Наблюдательные данные

При исследовании ранней Вселенной достижением инфляционной космологии является возможность сопоставления наблюдательных данных с предсказаниями теории. Также, в рамках теории космологических возмущений, появляется возможность рассчитать спектры начальных возмущений плотности вещества и реликтовых гравитационных волн в зависимости от значений параметров теоретических моделей [72; 76; 77].

В нулевом порядке теории космологических возмущений Вселенная описывается единственной функцией времени – масштабным фактором $a(t)$. В первом (линейном) порядке возмущения метрики являются суммой трех независимых мод – скалярной, векторной и тензорной (реликтовые гравитационные волны), каждая из которых характеризуется спектральной функцией волнового числа k [78].

Данные о влиянии скалярных и тензорных мод можно получить из наблюдений анизотропии и поляризации реликтового излучения, которые возникли в результате совместного воздействия на распределение фотонов всех трех мод возмущений. Сопоставление предсказаний теории с наблюдениями производится по некоторым спектральным характеристикам космологических возмущений, которые определяются по измерениям анизотропии реликтового излучения спутника PLANCK [27], также в ряде других экспериментов.

Совместный анализ данных о распределении галактик [6;7] и анизотропии реликтового излучения [27;35] позволяет рассматривать начальные условия и эволюцию отдельно. Таким образом, предсказания актуальной теории ранней Вселенной должны удовлетворять данным этих наблюдений.

1.7 Анизотропия реликтового излучения

В контексте инфляционной парадигмы, на завершении стадии инфляции происходит образование элементарных частиц, связанное с быстрыми осцилляциями инфлатона в окрестности минимума потенциала. Также постинфляционная стадия подразумевает повторное нагревание инфляционного бозонного конденсата [33;79].

При расширении Вселенной происходит ее остывание. Темп расширения значительно медленнее характерного времени установления равновесия в горячей плазме, поэтому можно считать, что частицы, в том числе и фотоны реликтового излучения находятся в термодинамическом равновесии.

В горячей плотной плазме, из-за рассеяния на электронах, фотоны распространяются гораздо медленнее скорости света. Когда Вселенная расширяется настолько, что плазма остывает до температуры рекомбинации, электроны начинают соединяться с протонами, образуя нейтральный водород, а фотоны начинают распространяться свободно. Точки, из которых фотоны доходят до наблюдателя, образуют «поверхность последнего рассеяния», температура которой на момент рекомбинации примерно равна 3000 К и быстро уменьшается с расширением Вселенной [80]. Измерение характеристик реликтового излучения является основой экспериментальной проверки теоретических моделей ранней Вселенной.

Температура реликтового излучения изотропна с точностью 10^{-5} , малая анизотропия обусловлена разницей температуры в различных направлениях и ее величина равна примерно 3 мК [27].

Кинетическая составляющая анизотропии реликтового излучения обусловлена движением наблюдателя относительно реликтового излучения, ей соответствует дипольная гармоника.

Кроме кинетической составляющей в анизотропии реликтового излучения есть потенциальные члены, связанные с эффектами в гравитационных полях очень больших масштабов, которые сравнимы с расстоянием до поверхности последнего рассеяния, низшая мультипольная гармоника для которых – квадрупольная, именно [81]:

1. эффект Сакса-Вольфа, который соответствует изменению энергии фотонов в переменном гравитационном поле Вселенной;
2. эффект Силка, обусловленный адиабатическим поджатием излучения и барионными акустическими осцилляциями до эпохи рекомбинации в зонах повышенной и пониженной плотности.

Поскольку поверхность последнего рассеяния есть сфера, то проще анализировать наблюдательные данные, разложив их в ряд по сферическим функциям, которые являются полным и ортогональным набором функций на сфере

$$\frac{\delta T(\vec{e})}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\vec{e}), \quad (1.47)$$

где a_{lm} – мультипольные коэффициенты, Y_{lm} – сферические гармоники и \vec{e} – единичный вектор в направлении наблюдения.

Также, обычно выделяют следующую вращательно-инвариантную величину

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{l=-m}^{l=m} |a_{lm}|^2, \quad (1.48)$$

и спектр строят для величины $l(l+1)C_l/2\pi$. В таком виде представляется большинство экспериментальных данных по мультипольным спектрам космологических возмущений.

Гравитационные волны, как и скалярные возмущения, являются источником крупномасштабной анизотропии реликтового излучения. Качественные отличия в характеристиках анизотропии, генерируемой скалярными возмущениями и гравитационными волнами можно понять, анализируя особенности их эволюции.

Прежде всего важнейшим отличием гравитационных волн от скалярных возмущений метрики, в силу тензорного характера первых, является независимость от распределения материи, то есть, гравитационные волны малой амплитуды не вызывают перераспределения плотности и скорости материи и эволюционируют независимо.

В простейших моделях инфляции, предсказывающих масштабнo-инвариантный спектр возмущений метрики $\mathcal{P}_a(k) \propto k^{-3}$, спектр гравитационных волн также является масштабнo-инвариантным $\mathcal{P}_T(k) \propto k^{-3}$ [81]. Это означает, что для угловых масштабов $\theta \gg \theta_{rec}$, где θ_{rec} – угловая мера горизонта рекомбинации, мультипольная структура C_l^T будет близка к структуре C_l^S для скалярных мод.

Соотношение между вкладом гравитационных волн и скалярных возмущений в анизотропию реликтового излучения характеризуют в терминах тензорно-скалярного отношения [81]

$$r = \frac{C_l^T}{C_l^S} = k_l |n_T|, \quad (1.49)$$

где $k_l = 6.2$ для $l \gg 1$ и $|n_T| \ll 1$.

Оценки значения тензорно-скалярного отношения различаются в зависимости от рассматриваемых моделей инфляции и является критерием соответствия теоретических моделей ранней Вселенной наблюдательным данным.

Реликтовые гравитационные волны не наблюдались непосредственно, что приводит к большому числу теоретических моделей космологической инфляции, которые дают объяснение происхождению и эволюции крупномасштабной структуры Вселенной и соответствуют имеющимся в настоящий момент наблюдательным данным.

Схему построения моделей ранней Вселенной, основанных на эволюции скалярного поля в контексте инфляционной парадигмы, можно представить следующим образом:

1. Решение уравнений фоновой динамики (без учета квантовых флуктуаций скалярного поля) для заданного потенциала, закона ускоренного расширения ранней Вселенной или эволюции скалярного поля.
2. Анализ квантовых флуктуаций скалярного поля и соответствующих возмущений метрики на основе теории космологических возмущений для полученных ранее параметров модели инфляции. Результатом данного анализа являются спектральные параметры космологических возмущений.
3. Сопоставление полученных параметров космологических возмущений с соответствующими наблюдательными данными, то есть верификация рассматриваемой модели.

В контексте верификации моделей космологической инфляции обратим внимание на тенденцию к уменьшению верхнего предела на значение тензорно-скалярного отношения при уточнении данных наблюдений. На основе сравнительно недавних экспериментальных данных [82], верхний предел на значение тензорно-скалярного отношения оценивался как $r < 0.2$, в настоящий момент $r < 0.065$ (Planck 2018/BICEP2/Keck-Array) [83], что является достаточно сильным ограничением при построении моделей ранней Вселенной.

1.8 Модификации моделей космологической инфляции

Ускоренное расширение Вселенной, обнаруженное в 1998 году, двумя независимыми коллаборациями [6; 7] существенно изменило исходную парадигму построения космологических моделей. Для объяснения инфляционного и повторного ускоренного расширения используются различные типы скалярных полей и взаимодействий между ними (в мультиполевых моделях) или модификации гравитации Эйнштейна, проявляющихся на космологических масштабах.

Согласно современным наблюдениям, динамика Вселенной находится в хорошем соответствии с Λ CDM-моделью, которая включает космологическую постоянную, связанную с энергией вакуума [84–90] и моделирующую темную энергию, которая является источником наблюдаемого ускоренного расширения, холодную темную материю (CDM) и барионную компоненту [27]. Также отметим, что предлагаются и другие способы описания темной материи, отличные от CDM [91;92]. Альтернативное описание темной энергии основано на легких полях квинтэссенции и k -эссенции, которые используются вместо космологической постоянной (см., например, в работах [8;93–99]). Различие между моделями квинтэссенции и k -эссенции заключается в том, что последний класс моделей содержит неканонические кинетические члены в лагранжиане. В этом смысле модели квинтэссенции можно рассматривать как частный случай k -эссенции. Также обсуждаются модели k -эссенции, в которой лагранжиан содержит только кинетическую часть, то есть функцию производных скалярного поля, и не зависит явно от самого поля [100]. Такая модификация модели скалярного поля приводит к дополнительным космологическим эффектам и существенно расширяет возможности теоретического описания эволюции ранней Вселенной [8; 97; 98]. В работах Сушкова и др. [101–105] был проведен анализ общих динамических свойств полей такого типа и на их основе были построены актуальные космологические модели.

В качестве другого источника ускоренного расширения Вселенной, в работах Червона и др. [13; 106–108] рассматривались нелинейные сигма-модели с потенциалом взаимодействия или киральные космологические модели с мультиплетом скалярных полей, специфика которых заключается в описании взаимодействия между полями посредством внутреннего пространства целей (полей). В случае описания повторного ускоренного расширения во Вселенной с холодной темной материей такие модели получили название σ CDM-моделей [106; 107].

При исследовании космологических моделей на основе модифицированных теорий гравитации (МТГ) возникает вопрос о необходимости использования скалярных полей для объяснения ускоренного расширения Вселенной. Примером теории гравитации, успешно

объясняющей обе стадии ускоренного расширения и приводящей к геометрической трактовке космологической постоянной [109] является $f(R)$ -гравитация [2;15;16;110;111], в которой динамические эффекты от скалярных полей (без включения самих скалярных полей) получаются за счет добавления в действие членов высших порядков по кривизне. Также существуют гравитационные механизмы образования элементарных частиц [112–118], отличные от процессов, связанных с быстрыми осцилляциями скалярного поля в окрестности минимума потенциала.

Тем не менее, уравнения космологической динамики в $f(R)$ -гравитации можно рассматривать в рамках конформной связи со стандартными моделями инфляции на основе ОТО, содержащими скалярное поле [119; 120]. Так, записывая действие, определяющее космологические модели в $f(R)$ -гравитации

$$S_F = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F(R), \quad (1.50)$$

в виде

$$S_\chi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [F'(\chi)(R - \chi) + F(\chi)], \quad (1.51)$$

где χ – некоторое скалярное поле, и определяя следующие соотношения

$$V = \frac{\chi F'(\chi) - F(\chi)}{2F'(\chi)^2}, \quad (1.52)$$

$$\frac{dV}{d\chi} = \frac{F''(\chi) [2F(\chi) - \chi F'(\chi)]}{2(F'(\chi))^3}, \quad (1.53)$$

$$F'(\chi) = \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\phi\right), \quad \phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln F'(\chi), \quad (1.54)$$

получим действие, соответствующее моделям со скалярным полем ϕ и гравитацией Эйнштейна (то есть модель на основе действия (1.50) в представлении Эйнштейна)

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left[\frac{1}{2} R_E - \frac{1}{2} g_E^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.55)$$

Соотношения между типом $f(R)$ -гравитации и потенциалом скалярного поля $V(\phi)$, в таком случае, определяются следующим образом [120]

$$R = \left[\sqrt{6} \frac{dV}{d\phi} + 4V \right] \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\phi\right), \quad (1.56)$$

$$f = \left[\sqrt{6} \frac{dV}{d\phi} + 2V \right] \exp\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi\right). \quad (1.57)$$

На основании соотношений (1.56)–(1.57) по виду $f(R)$ -гравитации восстанавливается потенциал скалярного поля $V(\phi)$ с последующим анализом полученной в представлении Эйнштейна космологической модели на основе уравнений (1.7)–(1.9).

Например, для модели гравитации Старобинского [1;2], содержащей в действии квадратичную добавку по кривизне

$$F(R) = R + \frac{1}{6m^2}R^2, \quad (1.58)$$

из уравнений (1.56)–(1.57) получим потенциал

$$V(\phi) = \frac{3}{4}m^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)^2, \quad (1.59)$$

где m – масса скалярного поля ϕ или «скалярона» в терминологии работы [2]. Исследование данной модели инфляции проводилось во многих работах (см, например, [2;121–124]).

С другой стороны, можно решать обратную задачу восстановления зависимости $f = f(R)$ по известному потенциалу скалярного поля $V(\phi)$, то есть получить вид $f(R)$ -гравитации, соответствующий рассмотренным в представлении Эйнштейна моделям космологической инфляции.

Таким образом, скалярные поля появляются как следствие альтернативного описания стадии космологической инфляции в контексте $f(R)$ -гравитации, и модели ранней Вселенной на основе их эволюции могут быть интерпретированы в рамках модификаций гравитации Эйнштейна.

Другим примером моделей ранней Вселенной, основанных на модификациях гравитации Эйнштейна является космологическая инфляция на основе скалярно-тензорных теорий гравитации. Анализу данных моделей в настоящем исследовании, уделяется основное внимание. В работах Одинцова и др. [17;125–133] рассматривались космологические модели на основе тензорно-скалярной гравитации как для построения актуальных моделей Вселенной, так и для решения обратной задачи реконструкции параметров теории гравитации из наблюдаемой динамики.

Наиболее общей скалярно-тензорной теории гравитации, приводящей к уравнениям космологической динамики второго порядка в четырехмерной Вселенной Фридмана является гравитация Хорндески [29;134;135]. При построении космологических моделей на основе гравитации Хорндески можно рассматривать частные случаи, основанные на неминимальном взаимодействии скалярного поля со скаляром Риччи и скаляром Гаусса-Бонне, иначе гравитацией Эйнштейна-Гаусса-Бонне (ЭГБ), которая, также, является частным случаем гравитации Лавлока [136].

Для анализа космологических моделей на основе неминимального взаимодействия скалярного поля со скаляром Риччи, определяемых действием [16;17;137–140]

$$S_{(STG)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}F(\phi)R - \frac{\omega(\phi)}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right], \quad (1.60)$$

часто используется метод конформных преобразований метрики $\hat{g}^{\mu\nu} = \Omega^2(\phi)g^{\mu\nu}$, где $\Omega^2(\phi)$ – конформный множитель, от представления Йордана, которому соответствует действие (1.60) к представлению Эйнштейна с действием (1.55).

Также отметим возможность построения моделей конформной гравитации на основе тензора Вейля, действие для которых инвариантно относительно конформных преобразований $\hat{g}^{\mu\nu} = \Omega^2(\phi)g^{\mu\nu}$ [117; 141–144].

Для действия (1.60) со скаляром Риччи, рассматривая конформный множитель вида $\Omega^2(\phi) = F(\phi)$, получим следующие соотношения между параметрами космологических моделей в двух представлениях [29; 134; 135; 145]

$$V_E(\phi_E) = \frac{V(\phi)}{F^2(\phi)}, \quad \phi_E = \int \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{F'_\phi}{F} \right)^2 + \frac{\omega}{F}} d\phi, \quad (1.61)$$

$$t_E = \sqrt{F} dt, \quad a_E = \sqrt{F} a, \quad H_E = \frac{1}{\sqrt{F}} \left(H + \frac{\dot{F}}{2F} \right). \quad (1.62)$$

Например, потенциал Хиггса

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \sigma^2)^2, \quad (1.63)$$

где σ – масса поля Хиггса в состоянии истинного вакуума, для $F(\phi) = 1 + \xi\phi^2$, где ξ – параметр неминимального взаимодействия поля и кривизны, после конформных преобразований (1.61) в случае $\phi \gg 1/\sqrt{\xi}$ переходит в потенциал [146; 147]

$$V_E(\phi_E) = \frac{3}{4} m^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_E} \right)^2, \quad (1.64)$$

в точности соответствующий потенциалу в модели Старобинского (1.59).

Тем не менее, подобные преобразования для случая неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне найдены не были. Следовательно, для сопоставления моделей ранней Вселенной на основе ОТО и ЭГБ-гравитации необходимы другие методы их анализа.

Одним из таких методов может послужить нахождение параметрических и функциональных связей между моделями, основанными на ОТО и скалярно-тензорных теориях гравитации, непосредственно из уравнений динамики в четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера.

Следовательно, после нахождения таких связей, анализ ранней Вселенной и повторного ускоренного расширения можно провести комплексно для гравитации Эйнштейна и ее модификаций на основе обобщенных точных решений уравнений космологической динамики.

Также отметим два важных следствия использования модифицированных теорий гравитации или неканонических скалярных полей при построении моделей эволюции Вселенной. Первым следствием является существенное отличие эволюции возмущений скалярного поля и метрики пространства от случая ОТО на инфляционной стадии, что приводит к расхождению в значениях спектральных параметров и результирующем спектре космологических возмущений. Анализ эволюции космологических возмущений для различных модификаций модели с каноническим скалярным полем и гравитацией Эйнштейна рассматривался в работе [148].

Вторым следствием является возможность построения различных моделей астрофизических объектов на основе модифицированных теорий гравитации или гравитации Эйнштейна [149–157], которая связана с исходной проблематикой исследования в контексте произведенных в настоящее время наблюдений гравитационных волн от слияния нейтронных звезд и черных дыр [21–25]. Скорость распространения обнаруженных гравитационных волн соответствует случаю ОТО с высокой точностью [21–25]. Следовательно, соответствие наблюдениям дают модели приводящие к одинаковым со случаем гравитации Эйнштейна результатам. Общий принцип построения таких ОТО-подобных моделей на основе модифицированных теорий гравитации рассматривался в работе [26].

Другой возможностью соответствия наблюдениям [21–25] для случая модифицированных теорий гравитации является построение моделей космологической инфляции, в которых исходное расхождение с гравитацией Эйнштейна убывает по мере расширения Вселенной таким образом, что образование и эволюция звезд и черных дыр соответствуют случаю ОТО. Построение таких космологических моделей с одной стороны подразумевает связь с существенными квантовыми эффектами при образовании Вселенной, приводящими к возникновению поправочных членов в действии (1.55), с другой – обеспечивает соответствие современным наблюдательным данным по гравитационному излучению от слияния нейтронных звезд и черных дыр.

Глава 2. Анализ динамики Вселенной Фридмана на основе гравитации Эйнштейна

Анализ космологической динамики имеет ключевое значение при построении актуальных моделей ранней Вселенной на основе эволюции скалярного поля. Методы анализа можно разделить на три основных группы, именно:

1. точные решения уравнений динамики;
2. решение уравнений динамики с использованием физически обоснованных приближений;
3. численный анализ уравнений космологической динамики.

В настоящем исследовании будут рассматриваться первые два метода, причем, основное внимание уделяется точным решениям уравнений космологической динамики и оценке расхождения между точными и приближенными решениями.

Одним из наиболее популярных методов приближенного анализа ранней Вселенной является приближение медленного скатывания, которое, с одной стороны, позволяет существенно упростить процедуру определения параметров космологических моделей, с другой – подразумевает ускоренное расширение на ранней стадии эволюции, что является необходимым условием при построении космологических моделей на основе инфляционной парадигмы.

2.1 Приближение медленного скатывания

Ускоренному расширению ранней Вселенной соответствуют малые значения параметров медленного скатывания, которые рассматривались в секции § 1.5. В литературе можно найти два разных способа реализации этого приближения. Первый устанавливает ограничения на форму потенциала и основан на условии $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Этот подход полезен при изучении инфляции для заданного потенциала и называется «приближением медленного скатывания по потенциалу» [71].

Кинетическая энергия $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ и «ускорение» изменения скалярного поля $\ddot{\phi}$, в таком случае, приближенно равны нулю и исключаются из уравнений динамики

$$3H^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (2.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi = 0, \quad (2.2)$$

которые записываются следующим образом [33; 71]

$$3H^2 \approx V(\phi), \quad (2.3)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V'_\phi, \quad (2.4)$$

то есть существенно упрощаются по сравнению с исходными.

Также отметим, что уравнения (2.3)–(2.4) можно записать как

$$V(\phi) \approx 3H^2, \quad (2.5)$$

$$\dot{\phi} \approx -2H'_\phi, \quad (2.6)$$

которые будут отличаться от точных уравнений (1.14)–(1.15)

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'^2_\phi, \quad (2.7)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_\phi. \quad (2.8)$$

отсутствием второго слагаемого в потенциале при одинаковой динамике Вселенной и эволюции скалярного поля.

На основе данного приближения параметры медленного скатывания можно рассчитать через потенциал скалярного поля

$$\epsilon \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V, \quad (2.9)$$

$$\delta \simeq \frac{V''_\phi}{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^2 \equiv \eta_V - \epsilon_V, \quad (2.10)$$

$$\xi \simeq \frac{V'_\phi V'''_\phi}{V^2} - \frac{3}{2} \frac{V''_\phi}{V} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^4 \equiv \xi_V - 3\eta_V \epsilon_V + 3\epsilon_V^2. \quad (2.11)$$

Другим способом является использование условий $\epsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$, которые следуют из $\dot{H} \approx 0$, то есть стадия инфляции является квазидеситтеровской, что соответствует ускоренному расширению. Этот подход называется «приближением медленного скатывания по параметру Хаббла» и используется в случае если потенциал скалярного поля изначально не задан [71].

Так, из исходных уравнений космологической динамики (2.1)–(2.2), в терминах параметров медленного скатывания, получим следующие уравнения

$$V(\phi) = 3H^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{3} \right), \quad (2.12)$$

$$-V'_\phi = 3H\dot{\phi} \left(1 - \frac{\delta}{3} \right), \quad (2.13)$$

упрощение которых для случая $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ приводит к (2.3)–(2.4).

В качестве примера использования приближения медленного скатывания для анализа космологических моделей рассмотрим потенциал в модели Старобинского (1.59)

$$V(\phi) = \frac{3}{4}m^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)^2. \quad (2.14)$$

Для данного типа потенциала скалярного поля, из уравнений (2.5)–(2.6), получим

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\mp \frac{2}{3}mt + c \right), \quad (2.15)$$

$$H(t) = \frac{m}{\frac{4}{3}mt \mp 2c} \pm \frac{1}{2}m, \quad (2.16)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left(\pm \frac{1}{2}mt \right) (2mt \mp 3c)^{3/4}, \quad (2.17)$$

где решения с верхними знаками соответствуют инфляционному сценарию эволюции ранней Вселенной, решениям с нижними знаками соответствует сценарий «дефляции» [158], который формально соответствует инфляции после смены знака космического времени $t \rightarrow -t$ в космологических решениях.

Таким образом, потенциалу (2.14) соответствует экспоненциально-степенная динамика расширения ранней Вселенной, и для инфляционных решений имеем следующее ограничение $t < 3c/2m$ на время стадии медленного скатывания.

Тем не менее, получить вид эволюции скалярного поля и масштабный фактор из уравнений (2.5)–(2.6) в данном приближении возможно не для всех потенциалов. Например, для потенциала Коулмана-Вайнберга [65]

$$V(\phi) = M^4 \phi^4 \left(16 \ln \left(\frac{\phi}{B} \right) + 1 \right), \quad (2.18)$$

где M и B – постоянные параметры модели, решения получены не были.

В таких случаях, в контексте метода приближения медленного скатывания, анализ космологических моделей производится на основе параметров медленного скатывания (2.9)–(2.11), которые рассчитываются непосредственно из потенциала $V(\phi)$ [59; 159].

Данный способ анализа космологических моделей является наиболее популярным в литературе, и часто модели космологической инфляции анализируются в рамках данного подхода без определения закона расширения Вселенной или эволюции скалярного поля, исходя из того, что условия $\epsilon_V \ll 1$ и $\eta_V \ll 1$ дают соответствие требованию ускоренного расширения $\ddot{a} > 0$ [59].

Отметим, что, несмотря на очевидные преимущества такого подхода к анализу космологических моделей, существует возможность достаточно больших расхождений с результатами, основанными на точных решениях уравнений динамики, метод оценки которых мы рассмотрим в дальнейшем.

2.2 Кинетическое приближение

Теперь рассмотрим альтернативный, по отношению к приближению медленного скатывания, подход, который основан на приближенной линейной связи кинетической энергии скалярного поля и параметра состояния. Из такой связи, как и в случае приближения медленного скатывания, следует квазидеситторовское расширение, но с учетом кинетической энергии поля.

Для описания этого метода запишем уравнения космологической динамики в следующем виде

$$3H^2 = X + V(\phi), \quad (2.19)$$

$$3H\sqrt{2X} = \frac{d}{d\phi} (X + V(\phi)), \quad (2.20)$$

$$\dot{H} = -X, \quad (2.21)$$

с учетом соотношений $\ddot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}$ и $\dot{\phi} = -\sqrt{2X}$.

Также определим плотность энергии скалярного поля и давление

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V = X + V, \quad (2.22)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V = X - V, \quad (2.23)$$

и соответствующий параметр состояния

$$w = \frac{X - V}{X + V}. \quad (2.24)$$

Теперь рассмотрим кинетическую энергию скалярного поля X как линейную функцию параметра состояния w таким образом, чтобы при $w = -1$ выполнялось условие $X = 0$, которое соответствует ускоренному расширению, обусловленному космологической постоянной, то есть

$$X = \beta(w + 1), \quad (2.25)$$

где β – положительная постоянная.

Подставляя параметр состояния (2.24) в уравнение (2.25), с учетом уравнения (2.19), получим

$$3H^2 = X + V = 2\beta, \quad H = \text{const}. \quad (2.26)$$

Следовательно, определение кинетической энергии скалярного поля в виде $X \approx \beta(w + 1)$, которое назовем «кинетическим приближением», обеспечивает ускоренное расширение $H \approx \text{const}$ и дает возможность нахождения решений уравнений динамики скалярных полей посредством соответствующего выбора параметра состояния w .

Далее, в качестве примера, рассмотрим параметр состояния следующего вида

$$w(t) = \frac{A}{B \exp[-\alpha(t - t_e)] + 1} - 1, \quad A = 4/3, \quad (2.27)$$

соответствующий выходу из стадии инфляции $w(t \rightarrow \infty) = 1/3$, где t_e – время завершения инфляционной стадии, которое определяется условием $w = -1/3$.

Также запишем кинетическую энергию скалярного поля

$$X(t) = \frac{A\beta}{B \exp[-\alpha(t - t_e)] + 1}. \quad (2.28)$$

Из уравнения (2.25) получим зависимость скалярного поля от времени

$$\varphi(t) = \phi(t) - C = \pm \frac{2\sqrt{2A\beta}}{\alpha} \operatorname{arth} \left(\sqrt{1 + B e^{-\alpha(t-t_e)}} \right), \quad (2.29)$$

где C – постоянная интегрирования.

Из уравнения (2.21) получим параметр Хаббла

$$H(t) = C_1 + \frac{A\beta}{\alpha} \ln(B + e^{\alpha(t-t_e)}), \quad (2.30)$$

где $C_1 = H_0 - \frac{A\beta}{\alpha} \ln(B)$.

Соответствующий масштабный фактор определяется как

$$a(t) = a_0 \exp \left[C_1 t - \frac{A\beta}{\alpha^2} f(1 + B e^{\alpha(t-t_e)}) \right], \quad (2.31)$$

где функция f определяется следующим образом

$$f(\xi) = \int_1^\xi \frac{\ln(\xi)}{1 - \xi} d\xi. \quad (2.32)$$

Также запишем параметр Хаббла как функцию скалярного поля

$$H(\phi) = H_0 + \frac{A\beta}{\alpha} \ln \left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right) + 1 \right]. \quad (2.33)$$

Из уравнения (2.19) получим потенциал

$$V(\varphi) = 3 \left(H_0 + \frac{A\beta}{\alpha} \ln \left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right) + 1 \right] \right)^2 + \frac{\frac{A\beta}{4\alpha^2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{2A\beta}} \right)}{\left[\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right) + 1 \right]^2}, \quad (2.34)$$

и запишем кинетическую энергию как функцию скалярного поля

$$X(\varphi) = \frac{A\beta}{\operatorname{th}^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right)}. \quad (2.35)$$

Для определения поведения потенциала и скалярного поля при завершения инфляционной стадии рассмотрим следующие условия: $\phi_0 - \phi \ll 1$ или $\varphi \ll 1$.

В результате, получим

$$V(\varphi) = V_1\varphi^4 + V_2\varphi^2 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6), \quad (2.36)$$

где

$$V_0 = \frac{3[H_0 - A\beta \ln(2)]^2}{\alpha^2}, \quad (2.37)$$

$$V_1 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{3H_0 + 3A\beta \ln(2)}{768A\beta} - \frac{1}{768A\beta} + \frac{3}{256} \right), \quad (2.38)$$

$$V_2 = \frac{3}{8\alpha^2} \left(H_0 + A\beta \ln(2) - \frac{1}{4} \right). \quad (2.39)$$

Задавая различные значения постоянных β , α и H_0 , получим следующие типы потенциалов:

1. При $V_1 = 0$ получим потенциал $V(\varphi) = V_2\varphi^2 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6)$;
2. При $V_2 = 0$ потенциал $V(\varphi) = V_1\varphi^4 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6)$;
3. При $V_1 > 0, V_2 < 0$ получим потенциал Хиггса $V(\varphi) = V_1\varphi^4 - V_2\varphi^2 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6)$,

которые соответствуют классам I и II в рассмотренной ранее классификации по форме потенциала.

Теперь покажем, что поведение скалярного поля (2.29) при условии $\phi_0 - \phi \ll 1$ соответствует полученным потенциалам. Для этого разложим (2.29) в ряд по малому параметру $e^{-\alpha(t-t_e)}$, в результате, для верхнего знака, получаем

$$\phi - C \approx \frac{\sqrt{2A\beta}}{2\pi\alpha} + \frac{\sqrt{2A\beta}}{2\pi\alpha} e^{-\alpha(t-t_e)}, \quad (2.40)$$

Определяя $C = -\frac{\sqrt{2A\beta}}{\pi\alpha} + \phi_0$, где $\phi_0 = \frac{\sqrt{2A\beta}}{2\pi\alpha}$, запишем

$$\phi \approx \phi_0 e^{-\alpha(t-t_e)}, \quad (2.41)$$

что соответствует динамике скалярного поля для потенциалов $V(\phi) = V_0\phi^4$, или $V(\varphi) = V_1\phi^4 - V_2\phi^2 + V_0$ с различными значениями ϕ_0 и α . В первом случае повторное нагревание происходит за счет осцилляций скалярного поля около минимума потенциала и реализуется сценарий хаотической инфляции. Второй случай подразумевает фазовый переход из одного локального минимума в другой с повышением плотности энергии и спонтанным нарушением симметрии или реализуется сценарий «новой инфляции» [43].

Для малого параметра $(t - t_e)$, раскладывая (2.29) в ряд и выбирая верхний знак, получим

$$\phi \approx C + \frac{4\sqrt{A\beta}}{\alpha} - \sqrt{A\beta}(t - t_e), \quad (2.42)$$

$$\phi \approx \phi_0 - \sqrt{A\beta}(t - t_e), \quad \phi_0 = C + \frac{4\sqrt{A\beta}}{\alpha}. \quad (2.43)$$

В данном случае, эволюция скалярного поля ϕ соответствует потенциалу $V(\phi) = V_0\phi^2$. Для потенциала $V(\phi) = V_0\phi^2$ повторное нагревание происходит при осцилляциях скалярного поля около минимума в модели хаотической инфляции [33].

Таким образом, резкий рост кинетической энергии на завершении инфляционной стадии происходит или в сценарии хаотической инфляции (этот механизм реализуется для выбранных параметров модели) или в случае спонтанного нарушения симметрии. Оба случая подразумевают повторное нагревание и последующую генерацию элементарных частиц.

Как видно из предыдущей модели, при задании параметра состояния как функции времени $w = w(t)$ получается потенциал достаточно сложного вида. Настолько же громоздкие потенциалы можно получить, задавая $w(t) = -1 + \frac{A\alpha^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + 1}$ или $w(t) = -1 + A \operatorname{th}^2(\alpha t)$, которые определяют естественный выход из инфляции с последующей стадией преобладания излучения.

Вместо этого рассмотрим, в контексте кинетического приближения, модель космологической инфляции, которую зададим, определяя параметр состояния как функцию параметра Хаббла в уравнении (2.19)

$$V = 3H^2 - \beta[w(H) + 1], \quad (2.44)$$

Для параметра состояния $w(H) = -1 - \frac{2A^2}{\beta}H^2 + 2A^2\lambda^2$ получим решения уравнений (2.19)–(2.21) в следующем виде

$$\phi(t) = A \ln[\operatorname{th}(\lambda t)], \quad (2.45)$$

$$H(t) = A^2 \lambda \operatorname{cth}(2\lambda t), \quad (2.46)$$

$$a(t) = a_0 [\operatorname{sh}(2\lambda t)]^{A^2/2}, \quad (2.47)$$

$$V(\phi) = A^2 \lambda^2 \left[(3A^2 - 2) \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\phi}{A} \right) + 2 \right]. \quad (2.48)$$

Параметр состояния, отличный в кинетическом приближении от $w(t) = -1 - 2\dot{H}/3H^2$, запишем следующим образом

$$w(t) = -1 - \frac{2A^6 \lambda^2}{\beta} \operatorname{cth}^2(2\lambda t) + 2A^2 \lambda^2. \quad (2.49)$$

Естественный выход из инфляции, повторное нагревание скалярного поля и дальнейший корректный переход к стадии преобладания излучения ($w = 1/3$) происходит при выборе параметра модели $\lambda = \sqrt{2\beta/3A(\beta - A^4)}$, где $\beta > A^4$.

Метод кинетического приближения можно применять и для фантомных полей с отрицательной кинетической энергией

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V = -X + V, \quad (2.50)$$

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V = -X - V. \quad (2.51)$$

В данном случае, параметр состояния определяется следующим образом

$$w = \frac{X + V}{X - V}. \quad (2.52)$$

Следовательно, для $X \approx -\beta(w + 1)$, параметр Хаббла $H \approx const$, что соответствует стадии ускоренного расширения.

Таким образом, преимуществом кинетического приближения относительно приближения медленного скатывания является учет вклада кинетической энергии скалярного поля в космологическую динамику при сохранении условия ускоренного расширения для канонических и фантомных полей.

2.3 Точные решения уравнений космологической динамики

Несмотря на эффективность методов приближенного анализа, при рассмотрении моделей космологической инфляции важную роль играют точные решения уравнений космологической динамики и вычисленные на их основе значения параметров космологических возмущений, которые сопоставляются с наблюдательными данными, в контексте верификации моделей ранней Вселенной. Также точные решения являются критерием проверки корректности моделей и основой оценки погрешности приближенных методов решения.

Методы точных решений уравнений космологической динамики (1.7)–(1.9) можно разделить на несколько групп:

1. Выбор одного из параметров в уравнениях (1.7)–(1.9) и восстановление по ним потенциала и остальных параметров модели.
2. Метод генерирующих функций, приводящий к упрощению уравнений динамики.
3. Приведение уравнений (1.7)–(1.9) к известным, с разработанными методами их решения.
4. Использование симметрий, законов сохранения и форм-инвариантных преобразований.

В рамках первого метода, в работах [66; 67; 160–163] задавались зависимости масштабного фактора $a = a(t)$ или скалярного поля $\phi = \phi(t)$ от времени и на основе этих зависимостей записывались точные решения уравнений (1.7)–(1.9).

Второй подход включает большое число генерирующих функций, которые выбирают как функцию одного из параметров модели (или их комбинации) [164–171]; среди них отметим плотность полной энергии скалярного поля или «суперпотенциал» W в терминологии

работы [171]. Также, в работе [172], в качестве генерирующей функции, рассматривалось тензорно-скалярное отношение.

В работах Иванова [62; 63] и впоследствии Салопека-Бонда [64; 173] был предложен метод приведения (1.7)–(1.9) к уравнениям (1.14)–(1.15), в которых параметр Хаббла рассматривается как функция скалярного поля и точные решения получаются посредством выбора $H = H(\phi)$. Этот метод соответствует первым трем группам методов точных решений. Следует отметить, что в литературе уравнения (1.14)–(1.15) получили название «уравнения типа Гамильтона-Якоби».

В контексте третьего метода, уравнения (1.7)–(1.9) приводились к уравнению Шрёдингера [163; 174–177], уравнениям Риккати [170], Абеля [178; 179], Ермакова–Пиннея [180], Кортевега–де Фриза [181; 182] и другим типам уравнений.

В рамках четвертого подхода, для получения точных решений используется симметрия Нётер для экспоненциальных потенциалов [183], закон сохранения Хожмана [184–186] и другие нелокальные законы сохранения для произвольных потенциалов [187], а также форм-инвариантные преобразования уравнений (1.7)–(1.9) [188–190]. Отметим, что использование симметрий Нётер и Хожмана более эффективно при генерировании точных решений для космологических моделей, основанных на модифицированных теориях гравитации [191–193]. В случае моделей, основанных на гравитации Эйнштейна, точные решения, полученные с помощью этих классов симметрий, можно получить более простым способом, используя первые три группы методов. Форм-инвариантные преобразования уравнений космологической динамики будут рассматриваться на основе первых трех подходов. По этой причине, основное внимание будет уделено классификации и развитию первых трех групп методов.

Также следует заметить, что в случае точных решений, в отличие от приближения медленного скатывания или кинетического приближения, требуется обоснование наличия стадии ускоренного расширения, исходя из вида масштабного фактора, параметра состояния или параметров медленного скатывания.

2.4 Точные решения на основе выбора параметра Хаббла

Рассмотрим точные решения уравнений динамики на основе выбора параметра Хаббла как функции времени или поля, то есть путем априорного задания динамики, соответствующей инфляционной стадии ускоренного расширения, или потенциала, определяющего физические процессы, происходящие на этой стадии эволюции Вселенной.

Для этого запишем уравнения космологической динамики на стадии инфляции в следующем виде

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (2.53)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (2.54)$$

Точные решения этой системы уравнений можно получить задавая параметр Хаббла $H = H(t)$ или масштабный фактор $a = a(t)$, исходя из определения $H \equiv \dot{a}/a$. После решения уравнения (2.54) и получения эволюции скалярного поля в явном виде $\phi = \phi(t)$, подставляя обратную зависимость $t = t(\phi)$ в уравнение (2.53), в итоге, получаем потенциал скалярного поля $V = V(\phi)$.

Для генерирования точных решений уравнений космологической динамики в форме Иванова-Салопека-Бонда

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'_\phi{}^2, \quad (2.55)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_\phi, \quad (2.56)$$

изначально задается параметр Хаббла как функция скалярного поля $H = H(\phi)$. Из уравнения (2.55) определяется вид потенциала $V(\phi)$, и из уравнения (2.56) – эволюция скалярного поля $\phi = \phi(t)$, подстановка которой в выражение $H(\phi)$ дает динамику Вселенной в виде зависимости параметра Хаббла от времени $H = H(t)$ и соответствующего масштабного фактора $a = a(t)$.

Для построения точных решений уравнений космологической динамики будем использовать оба этих подхода. Теперь рассмотрим некоторые примеры точно разрешимых моделей космологической инфляции.

2.4.1 Модели с постоянным потенциалом

Вначале рассмотрим модели космологической инфляции с постоянным (плоским) потенциалом $V = const$.

I. Первым случаем является экспоненциальное расширение, которое определяется масштабным фактором $a(t) \propto \exp(\lambda t)$ или параметром Хаббла $H = \lambda$, где λ – некоторая положительная постоянная.

Из уравнений (2.53)–(2.54) получим

$$V = 3\lambda^2, \quad \phi = const. \quad (2.57)$$

Данные решения являются вакуумными решениями де Ситтера в частном случае $\phi = 0$, и источником экспоненциального расширения является космологическая постоянная $\Lambda = V = 3\lambda^2$, которая ассоциируется с ненулевой энергией вакуума.

II. Второй вид решений получим из масштабного фактора $a(t) \propto \text{sh}^{1/3}(Bt)$ или $a(t) \propto \text{ch}^{1/3}(Bt)$ с соответствующими параметрами Хаббла $H(t) = \frac{1}{3}B \text{th}(Bt)$ или $H(t) = \frac{1}{3}B \text{cth}(Bt)$, для которых решения уравнений (2.53)–(2.54) записываются следующим образом

$$V = \frac{1}{3}B^2 > 0, \quad (2.58)$$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} [\pm \ln(e^{Bt} - 1) \mp \ln(e^{Bt} + 1)] + \text{const}. \quad (2.59)$$

В этом случае, $V = \frac{1}{3}B^2 = \Lambda_{eff}$, то есть эволюция скалярного поля (2.59) определяет эффективную космологическую постоянную Λ_{eff} . Космологические модели, основанные на данных решениях рассматривались ранее в работах [160; 164].

2.4.2 Модели со степенным потенциалом

Теперь рассмотрим точные космологические решения на основе следующего параметра Хаббла $H(\phi) = A\phi^m$, где A и $m < 2$ – некоторые постоянные.

Из уравнений (2.55)–(2.56) получим следующие решения уравнений космологической динамики

$$V(\phi) = 3A^2\phi^{2m} - 2A^2m^2\lambda\phi^{2(m-1)}, \quad (2.60)$$

$$\phi(t) = [c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{1}{2-m}}, \quad (2.61)$$

$$H(t) = A[c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{m}{2-m}}, \quad (2.62)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{1}{4m}[c_1 + 2mA(m-2)t]^{\frac{2}{2-m}}\right). \quad (2.63)$$

В данном случае, условие ускоренного расширения определяется выбором постоянных m , A и c_1 . Например, случай $m < 0$, $\frac{1}{2-m} < 1$ соответствует обратной зависимости потенциала от скалярного поля и приводит к ускоренному расширению быстрее степенного и медленнее экспоненциального. По этой причине, такие модели получили название «промежуточной инфляции» [67].

Далее рассмотрим следующий параметр Хаббла как функцию скалярного поля

$$H(\phi) = A \ln[\text{ch}(C\phi)] + B. \quad (2.64)$$

Из уравнений (2.55)–(2.56) получим потенциал скалярного поля

$$V(\phi) = 3(A \ln[\operatorname{ch}(C\phi)] + B)^2 - 2A^2C^2 \operatorname{th}^2(C\phi), \quad (2.65)$$

и остальные параметры данной модели инфляции

$$\phi(t) = \frac{1}{C} \arcsin [\exp(-2AC^2(t + c_1))], \quad (2.66)$$

$$H(t) = \frac{A}{2} \ln [1 + \exp(-4AC^2(t + c_1))] + B, \quad (2.67)$$

$$a(t) = c_2 \exp\left(\frac{1}{8C^2} \{8BC^2t + f [1 + \exp(-4AC^2(t + c_1))]\}\right), \quad (2.68)$$

где функция f определяется из условия (2.32) и c_1, c_2 – постоянные интегрирования.

Для малого поля $\phi \ll 1$ получим

$$V(\phi) = \left(-\frac{1}{2}ABC^4 + \frac{3}{4}A^2C^4 + \frac{4}{3}A^2C^6\right)\phi^4 + (-2A^2C^4 + 3ABC^2)\phi^2 + 3B^2 + \mathcal{O}(\phi^6). \quad (2.69)$$

Таким образом, в зависимости от выбора постоянных, потенциал (2.65) принадлежит классу I, II или является плоским.

Случаю $B = \frac{2}{3}AC^2$ соответствует потенциал

$$V(\phi) = A^2C^4 \left(C^2 + \frac{3}{4}\right)\phi^4 + \mathcal{O}(\phi^6), \quad (2.70)$$

для $B = \frac{8}{3}AC^2 + \frac{3}{2}A$ получим

$$V(\phi) = 3AC^2 \left(2C^2 + \frac{3}{2}\right)\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^6), \quad (2.71)$$

из соотношений $B = -\frac{1}{2}A, C = \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$ получаем

$$V(\phi) = 3B^2 + \mathcal{O}(\phi^6). \quad (2.72)$$

Теперь рассмотрим точные космологические решения со степенным потенциалом на основе параметра Хаббла как функции космического времени

$$H(t) = \frac{A \exp(2B(t - \alpha))}{(2\beta \exp(B(t - \alpha)) + C)^2}, \quad (2.73)$$

где A, B, C, α, β – постоянные свободные параметры модели.

Точные решения уравнений (2.53)–(2.54) запишем следующим образом

$$\phi(t) = \frac{2\sqrt{-ABC}}{B\beta} (2\beta e^{B(t-\alpha)} + C)^{-1/2}, \quad (2.74)$$

$$H(\phi) = \frac{(B\beta\phi^2 + 4A)^2}{64A\beta^2}, \quad (2.75)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{(8A)^4} (B\phi^2 + 4A)^2 [3B\phi^4 + B(24A - 32B)\phi^2 + 48A^2], \quad (2.76)$$

$$a(t) = C_1 \exp\left(\frac{AC}{48\beta^2(2\beta e^{B(t-\alpha)} + C)}\right) (2\beta e^{B(t-\alpha)} + C)^{\frac{A}{4B\beta^2}}. \quad (2.77)$$

Для случая $B = 0$ получим постоянный (плоский) потенциал $V = 3/16$ и расширение де Ситтера $H = const$. Если выбрать параметры $A = 1$ и $B = (n/3)A$, то для $0 < n < 4$ получим потенциалы класса I, для $n = 4$ – потенциал класса VI, для $n > 4$ получим нефизические потенциалы (не соответствующие механизму инфляции и появлению элементарных частиц).

2.4.3 Модели с экспоненциальным потенциалом

Далее рассмотрим следующий параметр Хаббла

$$H(\phi) = \mu_1 \exp(-\mu_2 \phi) + \mu_3, \quad (2.78)$$

где μ_1 , μ_2 и μ_3 – некоторые постоянные.

Из уравнений (2.55)–(2.56) получим следующие космологические решения

$$V(\phi) = \mu_1^2(3 - 2\mu_2^2) \exp(-2\mu_2 \phi) + 6\mu_1\mu_3 \exp(-\mu_2 \phi) + 3\mu_3^2, \quad (2.79)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\mu_2} \ln [2\mu_1\mu_2^2 t + c], \quad (2.80)$$

$$H(t) = \frac{\mu_1}{2\mu_1\mu_2^2 t + c} + \mu_3, \quad (2.81)$$

$$a(t) = a_0 \exp(\mu_3 t) (2\mu_1\mu_2^2 t + c)^{1/2\mu_2^2}. \quad (2.82)$$

Частным случаем полученных решений для $\mu_3 = 0$ является модель с масштабным фактором $a(t) = a_0(2\mu_1\mu_2^2 t + c)^{1/2\mu_2^2}$, соответствующая степенной инфляции, которая рассматривалась в работах [56; 57; 62; 63].

Аналогично можно построить и другие точные космологические решения, соответствующие инфляционной стадии эволюции Вселенной.

2.5 Космологические решения в терминах конформного времени

Теперь запишем метрику пространства Фридмана-Робертсона-Уокера как конформно-плоскую метрику следующего вида

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \quad (2.83)$$

где $(d\eta = dt/a)$ – конформное время.

Далее запишем соотношения между параметром Хаббла в терминах космического и конформного времени

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a}, \quad H = \frac{\mathcal{H}}{a}, \quad \dot{H} = \frac{\mathcal{H}'}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}. \quad (2.84)$$

Уравнения космологической динамики (1.7)–(1.9) в терминах конформного времени и параметра Хаббла \mathcal{H} можно записать в следующем виде [194; 195]

$$3\mathcal{H}^2 = \frac{1}{2}\phi'^2 + a^2V(\phi), \quad (2.85)$$

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.86)$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2}\phi'^2, \quad (2.87)$$

где штрих означает производную по конформному времени η .

Используя определение \mathcal{H} , из уравнения (2.87) запишем

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = -\frac{a''}{a} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2. \quad (2.88)$$

После подстановки (2.88) в уравнение (2.85), использования определения \mathcal{H} и простых преобразований, потенциал $V(\phi)$ запишем как

$$V(\phi(\eta)) = \frac{a''}{a^3} + \frac{a'^2}{a^4}. \quad (2.89)$$

Чтобы упростить уравнения (2.88)–(2.89) переобозначим масштабный фактор $a(\eta) = \sqrt{-A(\eta)}$. В таком случае, метрика (2.83) определяется следующим образом

$$ds^2 = A(\eta)[d\eta^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2]. \quad (2.90)$$

Подставляя соотношение $a(\eta) = \sqrt{-A(\eta)}$ в уравнения (2.88)–(2.89), получим следующие выражения для потенциала и скалярного поля в терминах конформного множителя $A(\eta)$

$$V(\phi(\eta)) = -\frac{A''}{2A^2}, \quad (2.91)$$

$$(\phi')^2 = -\frac{A''}{A} + \frac{3}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2. \quad (2.92)$$

Далее, рассмотрим метрику (2.90) с сигнатурой $(-, +, +, +)$, что означает замену $A(\eta)$ на $-A(\eta)$. В таком случае $A(\eta) = a^2(\eta)$, метрика пространства

$$ds^2 = A(\eta)[-d\eta^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \quad (2.93)$$

и уравнения (2.91)–(2.92) записываются как

$$V(\phi(\eta)) = \frac{A''}{2A^2}, \quad (2.94)$$

$$(\phi')^2 = -\frac{A''}{A} + \frac{3}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2, \quad (2.95)$$

$$\mathcal{H} = \frac{A'}{2A}. \quad (2.96)$$

Таким образом, точные решения уравнений космологической динамики в терминах конформного времени генерируются посредством выбора конформного множителя $A(\eta)$.

Теперь рассмотрим следующий конформный множитель $A(\eta) = A_0 e^{\beta(\eta)}$. Из уравнений (2.94)–(2.96) получим следующие точные решения

$$V(\phi(\eta)) = \frac{e^{-\beta(\eta)}}{2A_0} [\beta''(\eta) + \beta'^2(\eta)], \quad (2.97)$$

$$\phi(\eta) = \pm \int \sqrt{\frac{\beta'^2(\eta)}{2} - \beta''(\eta)} d\eta + \phi_0, \quad (2.98)$$

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{\beta'(\eta)}{2}, \quad (2.99)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} e^{\beta(\eta)/2}. \quad (2.100)$$

Следовательно, задавая функцию $\beta = \beta(\eta)$, можно получать точные решения для конкретных космологических моделей в терминах конформного времени. Далее рассмотрим некоторые примеры генерирования точных космологических решений на основе выбора конформного множителя $A(\eta)$ метрики (2.93) или соответствующей ему функции $\beta(\eta)$.

2.5.1 Степенное расширение

Рассмотрим конформный множитель вида $A(\eta) = A_0 e^{m \ln(\alpha\eta)} = A_0 (\alpha\eta)^m$, то есть, выберем $\beta(\eta) = m \ln(\alpha\eta)$.

Из уравнений (2.97)–(2.100) получим

$$\phi(\eta) = \pm \sqrt{\frac{m(m+2)}{2}} \ln(\alpha\eta) + \phi_0, \quad (2.101)$$

$$\eta = \frac{1}{\alpha} e^{\pm \sqrt{\frac{2}{m(m+2)}} (\phi - \phi_0)}, \quad (2.102)$$

$$V(\phi) = \frac{m(m-2)}{4A_0} e^{\mp \sqrt{\frac{2(m+2)}{m}} (\phi - \phi_0)}, \quad (2.103)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} \alpha^{m/2} \eta^{m/2} = \tilde{a}_0 \eta^{m/2}, \quad (2.104)$$

соответствующие степенному масштабному фактору в терминах конформного времени.

2.5.2 Обобщенное экспоненциальное расширение

Для этого случая рассмотрим $A(\eta) = A_0 e^{\beta(\eta)}$, где $\beta(\eta) = \frac{c_1}{2}\eta^2 + c_2\eta + c_3$. Из уравнений (2.97)–(2.100) точные космологические решения записываются как

$$V(\phi(\eta)) = \frac{e^{-\beta}}{2A_0} [c_1 + (c_1\eta + c_2)^2], \quad (2.105)$$

$$\phi(\eta) = \pm \frac{\sqrt{2}}{c_1} \left[\frac{\tilde{\eta}}{2} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} - \frac{c_1}{2} \ln |\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1}| \right], \quad (2.106)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} e^{\frac{c_1}{4}\eta^2 + \frac{c_2}{2}\eta + \frac{c_3}{2}}, \quad (2.107)$$

где $\tilde{\eta} = (c_1\eta + c_2)/\sqrt{2}$.

Для функции $\beta(\eta) = \frac{b_1}{12}\eta^4 + b_3$ получим

$$V(\phi(\eta)) = \frac{e^{-\beta}}{2A_0} \left(b_1\eta^2 + \frac{b_1^2}{9}\eta^6 \right), \quad (2.108)$$

$$\phi(\eta) = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}b_1} \left[\frac{\tilde{\eta}}{2} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - b_1} - \frac{b_1}{2} \ln |\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - b_1}| \right], \quad (2.109)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} e^{\frac{b_1}{24}\eta^4 + \frac{b_3}{2}}, \quad (2.110)$$

где $\tilde{\eta} = (b_1\eta^2)/3$.

Преобразование космологических решений в терминах конформного времени η на случай космического времени t производится на основе определения $d\eta = dt/a$.

2.6 Метод генерирующих функций

Для получения точных решений уравнений динамики скалярного поля часто используется метод генерирующих функций, суть которого заключается в построении некоторых функционалов скалярного поля, потенциала, параметра Хаббла и масштабного фактора (или их комбинации) с целью упрощения уравнений динамики. Далее, задавая вид функционала (генерирующей функции), из полученных уравнений записываются точные решения.

При выборе вида генерирующей функции необходимо руководствоваться условиями корректной инфляционной динамики, то есть решения, определяющие динамику, должны соответствовать комбинации решений (квази) де Ситтера и Фридмана. Также, полученный в результате такой процедуры потенциал $V(\phi)$, должен быть физическим, то есть соответствовать корректному описанию стадии инфляции и постинфляционных процессов.

2.6.1 Первый класс генерирующих функций

В работах Иванова [62;63] рассматривалась генерирующая функция $F(\phi)$, связанная с параметром Хаббла следующим образом

$$H(\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}(F(\phi) + F_*). \quad (2.111)$$

Таким образом, уравнения космологической динамики запишем следующим образом

$$V(\phi) = -\frac{2}{3}F'^2 + (F(\phi) + F_*)^2, \quad (2.112)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{\sqrt{3}}F'_\phi. \quad (2.113)$$

Специальный случай такого представления с $F_* = 0$ рассматривался в работе [196].

В качестве исходной, рассмотрим модель с плоским потенциалом $V(\phi) = \Lambda > 0$, которой соответствует следующая генерирующая функция

$$F(\phi) = \sqrt{\Lambda}, \quad (2.114)$$

масштабный фактор $a(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$, следующие скалярное поле и параметр Хаббла

$$\dot{\phi} = 0, \quad H = H_I \equiv \sqrt{\Lambda/3}. \quad (2.115)$$

Теперь рассмотрим генерирующую функцию

$$F(\phi) = \sqrt{\Lambda} \left(1 + \frac{\mu}{n+1} |\phi|^{n+1} \right), \quad (2.116)$$

которой соответствует степенной потенциал

$$V(\phi) = \Lambda \left(1 + \frac{\mu}{n+1} |\phi|^{n+1} \right)^2 - \frac{2}{3} \Lambda \mu^2 \phi^{2n}, \quad (2.117)$$

где μ, n – некоторые постоянные.

Для этой модели, эволюция скалярного поля и масштабный фактор определяются следующим образом

$$\phi(t) = (2(n-1)\mu H_I t)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad (2.118)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left(H_I t - \frac{(2(n-1)\mu H_I t)^{-\frac{2}{n-1}}}{2(n+1)} \right), \quad (2.119)$$

где $\phi_0 = \phi(0) = 0$ в начальный момент времени $t = t_0$.

Для экспоненциального потенциала

$$V(\phi) = \Lambda e^{\sqrt{6}\beta\phi}, \quad (2.120)$$

генерирующая функция выглядит следующим образом

$$F(\phi) = \sqrt{\frac{\Lambda}{1-\beta^2}} e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\beta\phi}, \quad (2.121)$$

где постоянная $|\beta| < 1$.

Из уравнения (2.113) получим скалярное поле и масштабный фактор

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \beta^2 \sqrt{\frac{3\Lambda}{1-\beta^2}} t \right), \\ a(t) &= a_0 \left(1 + \beta^2 \sqrt{\frac{3\Lambda}{1-\beta^2}} t \right)^{\frac{1}{3\beta^2}}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Для гиперболической генерирующей функции

$$F(\phi) = \sqrt{\Lambda} (\text{ch}(\alpha\phi) - \beta), \quad (2.123)$$

получим

$$V(\phi) = \Lambda \left(1 - \frac{2\alpha^2}{3} \right) \left[\text{ch}(\alpha\phi) - \frac{\beta}{1 - \frac{2}{3}\alpha^2} \right]^2 + V_0, \quad (2.124)$$

где $V_0 = \frac{2\alpha^2\Lambda}{3} \left(1 - \frac{\beta^2}{1-2\alpha^2/3} \right)$.

Скалярное поле и масштабный фактор, в данном случае, определяются как

$$\phi(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \text{cth}(\alpha^2 H_I t), \quad (2.125)$$

$$a(t) = a_0 e^{-\beta H_I t} [\text{sh}(2\alpha^2 H_I t)]^{\frac{1}{2\alpha^2}}. \quad (2.126)$$

Многие космологические решения, полученные на основе генерирующей функции (2.111), рассматривались в работах [196; 197].

2.6.2 Второй класс генерирующих функций

В работах [166; 167] потенциал скалярного поля рассматривается в следующем виде

$$V[\phi(a)] = \frac{F(a)}{a^6}, \quad (2.127)$$

где $F(a)$ – некоторая функция масштабного фактора.

Из уравнений (2.53)–(2.54) получим

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{6}{a^6} \int da \frac{F}{a} = \frac{C}{a^6}, \quad (2.128)$$

где C – постоянная интегрирования.

Таким образом, точные решения записываются в квадратурах

$$\Delta t = \sqrt{3} \int \frac{da}{a} \left[\frac{6}{a^6} \int da \frac{F}{a} + \frac{C}{a^6} \right]^{-1/2}, \quad (2.129)$$

$$\Delta \phi = \sqrt{6} \int \frac{da}{a} \left[\frac{-F + 6 \int da F/a + C}{6 \int da F/a + C} \right]^{1/2}, \quad (2.130)$$

где $\Delta t \equiv t - t_0$, $\Delta \phi \equiv \phi - \phi_0$ и t_0 , ϕ_0 – произвольные постоянные.

Для генерирующей функции вида

$$F(a) = Ba^s (b + a^s)^n, \quad (2.131)$$

где $B > 0$, $b > 0$, s и n – постоянные, $s(n+1) = 6$ из уравнения (2.127) получим следующий потенциал

$$V(\phi) = B \left[\text{ch} \left(\frac{s}{2\sqrt{6}} \Delta \phi \right) \right]^{2n}. \quad (2.132)$$

Данный потенциал имеет минимум при $\Delta \phi = 0$ для $s > 0$, что соответствует космологической постоянной. В случае $s < 0$ потенциал экспоненциально убывает для больших значений ϕ .

Уравнение (2.129) разрешимо для некоторых значений s :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{3}{B}} \left[\arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) - \frac{a}{(b + a^2)^{1/2}} \right], \quad s = 2, \quad (2.133)$$

$$a = \left\{ b \left[\exp \left(\sqrt{3B} \Delta t \right) - 1 \right] \right\}^{1/3}, \quad s = 3. \quad (2.134)$$

Для $s > 0$ расширение Вселенной начинается из сингулярности при $\Delta t^{1/3}$ и асимптотически стремится к стадии де Ситтера при $\Delta \phi \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, для $s < 0$ происходит переход от стадии де Ситтера к степенному расширению $\Delta t^{1/3}$ при $t \rightarrow \infty$.

2.6.3 Третий класс генерирующих функций

В работе [164] уравнения космологической динамики (2.53)–(2.54) записывались в следующем виде

$$\dot{H} = V(H) - 3H^2, \quad (2.135)$$

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{2} \sqrt{3H^2 - V(H)}, \quad (2.136)$$

где $V(\phi) = V(\phi(t)) = V(\phi(t(H))) = V(H)$.

Потенциал, как функция параметра Хаббла $V = V(H)$, определяется следующим образом

$$V(H) = 3H^2 + g(H). \quad (2.137)$$

Таким образом, точные решения системы уравнений (2.135) – (2.136) задаются посредством выбора генерирующей функции $g(H)$.

Для степенной функции

$$g(H) = -AH^n, \quad (2.138)$$

где n и A – положительные постоянные, получим следующие точные решения:

Для $n = 0$

$$H(t) = -(At + C_1), \quad (2.139)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2A}(At + C_1)^2 + C_2\right), \quad (2.140)$$

$$\phi(t) = \pm\sqrt{\frac{2A}{\kappa}}(At + C_1 - C_3), \quad (2.141)$$

$$V(\phi) = 3\left(\sqrt{\frac{\phi}{2A}} + C_3\right)^2 - A. \quad (2.142)$$

Для $n = 1$

$$H(t) = C_1 \exp(-At), \quad (2.143)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{C_1}{A} \exp(-At) + \frac{C_2}{A}\right), \quad (2.144)$$

$$\phi(t) = \pm\sqrt{\frac{8}{A}}\left[\sqrt{C_1} \exp\left(\frac{-At}{2} - C_3\right)\right], \quad (2.145)$$

$$V(\phi) = \frac{A}{8}e^{2C_3}\phi^2\left(\frac{3A}{8}e^{2C_3}\phi^2 - A\right). \quad (2.146)$$

Для $n = 2$

$$H(t) = \frac{1}{At + C_1}, \quad (2.147)$$

$$a(t) = a_0(C_2(At + C_1))^{1/A}, \quad (2.148)$$

$$\phi(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{A}}\ln\left(\frac{1}{C_3(At + C_1)}\right), \quad (2.149)$$

$$V(\phi) = (3 - A)C_3^2 \exp(\pm\sqrt{2A}\phi). \quad (2.150)$$

Для $n \neq 0, 1, 2$

$$H = (A(n - 1)(t + C_1))^{1/(1-n)}, \quad (2.151)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left[(A(n - 1))^{1/(1-n)}\frac{1-n}{2-n}(t + C_1)^{(2-n)/(1-n)}\right], \quad (2.152)$$

$$\phi(t) + C_3 = \sqrt{\frac{2}{A}}\frac{2}{2-n}\left[A(n - 1)(t + C_1)\right]^{(2-n)/(2(1-n))}, \quad (2.153)$$

$$V(\phi) = \sqrt{\frac{A}{8}}(2 - n)(\phi + C_3)^{2/(2-n)} \times \left(3\frac{A}{8}(2 - n)^2(\phi + C_3)^2 - A\left(\frac{A}{8}\right)^{n/2}(2 - n)^n(\phi + C_3)^n\right), \quad (2.154)$$

соответствующие моделям инфляции с квадратичным потенциалом, потенциалом Хиггса, экспоненциальным потенциалом (для степенной инфляции) и степенным потенциалом.

Далее, рассмотрим генерирующую функцию в виде многочлена

$$g(H) = \frac{1}{G}H^2 + \left(D - \frac{2A}{G}\right)H + \frac{A^2}{G} - AD, \quad (2.155)$$

где A, D, G – произвольные постоянные.

Точные решения для этой модели записываются следующим образом

$$H(t) = A - \frac{DG \exp(Dt + F)}{1 + \exp(Dt + F)}, \quad (2.156)$$

$$a(t) = a_0 \frac{\exp(At + K)}{(1 + \exp(Dt + F))^G}, \quad (2.157)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{8G} \operatorname{arctg} \left(\exp \left(\frac{Dt + F}{2} \right) \right) + C, \quad (2.158)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{\left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\pm(\phi - C)/\sqrt{8G} \right)\right]^2} \times \left[3A^2 + (6A^2 - 6ADG - D^2G) \operatorname{tg}^2 \left(\pm \sqrt{\frac{1}{8G}}(\phi - C) \right) + 3(A - DG)^2 \operatorname{tg}^4 \left(\pm \sqrt{\frac{1}{8G}}(\phi - C) \right) \right]. \quad (2.159)$$

Для $DG = 2A$, то есть для функции

$$g(H) = -2H^2/\hat{A}^2 + 2\hat{A}^2\lambda^2, \quad (2.160)$$

решения соответствуют полученным в работе [160]

$$\phi(t) = \hat{A} \ln[\operatorname{th}(\lambda t)], \quad (2.161)$$

$$H(t) = \hat{A}^2 \lambda \operatorname{cth}(2\lambda t), \quad (2.162)$$

$$a(t) = a_0 [\operatorname{sh}(2\lambda t)]^{\hat{A}^2/2}, \quad (2.163)$$

$$V(\phi) = \hat{A}^2 \lambda^2 \left[(3\hat{A}^2 - 2) \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\phi}{\hat{A}} \right) + 2 \right], \quad (2.164)$$

для случая гиперболического потенциала.

2.6.4 Четвертый класс генерирующих функций

В работе [165] генерирующая функция $F = F(\phi)$ задавалась следующим образом

$$\dot{\phi} \equiv \pm \sqrt{(F - 1)V}, \quad (2.165)$$

что приводит к уравнению

$$\ddot{\phi} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} V \sqrt{F^2 - 1} + V'_\phi = 0. \quad (2.166)$$

Уравнения (2.165) и (2.166) представляют собой систему, эквивалентную уравнениям (2.53)–(2.54). Переменные в них можно разделить после дифференцирования (2.165) по времени и подстановки $\ddot{\phi}$ в (2.166).

С учетом $\ddot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}$ из уравнения (2.165) получим

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{2} [(F - 1)V'_\phi + VF'_\phi]. \quad (2.167)$$

Постановка этого выражения для $\ddot{\phi}$ в (2.166) приводит к следующему уравнению

$$(F + 1)V' + VF'_\phi \pm \sqrt{6}V\sqrt{F^2 - 1} = 0. \quad (2.168)$$

Из уравнения (2.168) получим выражение потенциала скалярного поля через генерирующую функцию

$$V = B \exp \left(\mp \sqrt{6} \int \sqrt{\frac{F - 1}{F + 1}} d\phi \right), \quad (2.169)$$

где B – произвольная постоянная.

Таким образом, на основе выбора функции $F = F(\phi)$, появляется возможность генерировать точные решения уравнений динамики скалярного поля.

Для $F = const$, из уравнения (2.169), получим

$$V = B \exp \left(\mp \sqrt{6} \sqrt{\frac{F - 1}{F + 1}} \phi \right), \quad (2.170)$$

$$\phi(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{F + 1}{F - 1}} \ln \left[\pm \frac{\sqrt{6}(F - 1)\sqrt{B}}{\sqrt{F + 1}} (t - C) \right], \quad (2.171)$$

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{3} \left(\frac{F + 1}{F - 1} \right)}, \quad (2.172)$$

что соответствует степенной инфляции с различными режимами расширения Вселенной для разных постоянных F .

Другие точные решения можно получить из гиперболической функции $F = \text{ch}(\lambda\phi)$, которые записываются следующим образом

$$V(\phi) = C (1 + \text{ch}(\lambda\phi))^{\mp(\sqrt{6}/\lambda)-1}, \quad (2.173)$$

$$\dot{\phi} = \pm \frac{\sqrt{C} \text{sh}(\lambda\phi)}{(1 + \text{ch}(\lambda\phi))^{1 \pm (\sqrt{6}/\lambda)-1}}. \quad (2.174)$$

Теперь рассмотрим случай $\lambda = \sqrt{3/2}$. Для нижнего знака в выражении (2.173), который соответствует нижнему знаку в уравнении (2.165), получим

$$V(\phi) = C \left[1 + \text{ch} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \phi \right) \right]. \quad (2.175)$$

Подстановка (2.175) в уравнение (2.165) приводит к соотношению

$$\dot{\phi} = -\sqrt{C} \operatorname{sh} \left(\frac{3}{2} \phi \right). \quad (2.176)$$

Отсюда получим выражение для скалярного поля

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left[\frac{\exp \left(\sqrt{\frac{3C}{2}} (t - D) \right) + 1}{\exp \left(\sqrt{\frac{3C}{2}} (t - D) \right) - 1} \right], \quad (2.177)$$

где D – постоянная интегрирования.

Задавая значение постоянной интегрирования $D = 0$, запишем

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left[\frac{\exp \left(\sqrt{\frac{3C}{2}} t \right) + 1}{\exp \left(\sqrt{\frac{3C}{2}} t \right) - 1} \right], \quad (2.178)$$

которой соответствует масштабный фактор

$$a(t) = a_0 \left[\exp \left(2 \sqrt{\frac{3C}{2}} t \right) - 1 \right]^{1/3}, \quad (2.179)$$

что подразумевает дополнительную степенную модификацию экспоненциального расширения ранней Вселенной.

2.6.5 Пятый класс генерирующих функций

В работе [168] Чартерс и Мимосо предложили другой тип генерирующей функции следующего вида

$$x(\phi) = \dot{\phi}/H. \quad (2.180)$$

В таком случае, уравнения динамики записываются следующим образом

$$V(\phi) = A \left(3 - \frac{1}{2} x^2(\phi) \right) \exp \left(- \int x(\phi) d\phi \right), \quad (2.181)$$

$$H(\phi) = \pm \sqrt{A} \exp \left(- \frac{1}{2} \int x(\phi) d\phi \right), \quad (2.182)$$

$$\dot{\phi}^2 = x^2(\phi) \exp \left(- \int x(\phi) d\phi \right). \quad (2.183)$$

В качестве примера рассмотрим следующую генерирующую функцию $x(\phi) = \lambda\phi$, которой соответствуют точные решения, обобщающие полученные ранее в модели Истера [198]

$$V(\phi) = A \left(3 - \lambda^2 \phi^2 / 2 \right) e^{\lambda \phi^2 / 2}, \quad (2.184)$$

$$a(\phi) = a_0 \phi^{1/\lambda}, \quad (2.185)$$

$$t(\phi) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{A}} \left[\text{Ei} \left(\frac{\lambda\phi_0^2}{4} \right) - \text{Ei} \left(\frac{\lambda\phi^2}{4} \right) \right], \quad (2.186)$$

где «Ei» – экспоненциальная интегральная функция.

Для потенциала (2.184) можно найти только обратную зависимость $t = t(\phi)$, однако, анализ космологической динамики можно провести и по представленным решениям, используя параметры медленного скатывания в терминах скалярного поля [168; 198].

Отметим, что на основе определения параметра медленного скатывания

$$\epsilon(\phi) = 2 \left(\frac{H'_\phi}{H} \right)^2, \quad (2.187)$$

рассматриваемая генерирующая функция определяется как

$$x(\phi) = \pm \sqrt{2\epsilon(\phi)}. \quad (2.188)$$

Таким образом, данный подход к построению точных космологических решений связан с выбором параметра медленного скатывания как функции скалярного поля.

Подобный подход также рассматривался в работе [172], в которой в качестве генерирующей функции использовалось выражение $r = 4\epsilon(\phi)$.

2.6.6 Шестой класс генерирующих функций

В работе [170] другой класс генерирующих функций определялся из соотношения

$$\dot{\phi} = \sqrt{2V(\phi)} \text{sh}(G(\phi)), \quad (2.189)$$

для которого уравнение (2.53) записывается в следующей форме

$$\frac{dG}{d\phi} + \frac{1}{2V} \frac{dV}{d\phi} \text{cth}(G(\phi)) + \sqrt{\frac{3}{2}} = 0, \quad (2.190)$$

где функция G может быть выражена через скалярное поле из уравнения

$$G(\phi) = \text{arch} \sqrt{1 + \frac{\dot{\phi}^2}{2V(\phi)}}, \quad (2.191)$$

и масштабный фактор

$$\frac{1}{a(\phi)} \frac{da(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{cth}(G(\phi)). \quad (2.192)$$

Таким образом, в данном случае, точные космологические решения генерируются на основе выбора функции $G(\phi)$.

Рассмотрим случай следующего выражения потенциала скалярного поля посредством генерирующей функции

$$G(\phi) = \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{\alpha_2} \right), \quad (2.193)$$

где α_2 – произвольная постоянная.

Из уравнения (2.190) получим

$$V(\phi) = V_0 \left(\frac{\phi}{\alpha_2} \right)^{-2(\alpha_2+1)} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\phi}{\alpha_2} \right)^2 - 1 \right], \quad (2.194)$$

Теперь, из уравнения (2.191), запишем выражение для скалярного поля

$$\phi(t) = \alpha_2 \left[\frac{\sqrt{2V_0}(\alpha_2 + 2)}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2+2}} (t - t_0)^{\frac{1}{\alpha_2+2}}. \quad (2.195)$$

Далее, из (2.192), получим масштабный фактор

$$a = a_0 \exp \left\{ \frac{1}{4\alpha_2} \left[\frac{(\alpha_2 + 2)\sqrt{2V_0}}{\alpha_2} \right]^{\frac{2}{\alpha_2+2}} (t - t_0)^{\frac{2}{\alpha_2+2}} \right\}, \quad (2.196)$$

где a_0 – постоянная интегрирования.

2.6.7 Метод суперпотенциала

Теперь рассмотрим генерирующую функцию, которая имеет наглядный физический смысл плотности энергии скалярного поля [169; 171], в терминах которой, уравнения (2.53)–(2.54) приводятся к виду

$$3H^2 = W, \quad (2.197)$$

$$3H\dot{\phi} = -W'_\phi, \quad (2.198)$$

где функция $W(\phi)$ или «суперпотенциал» в терминологии работы [171] определяется следующим образом

$$W = V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (2.199)$$

$V(\phi)$ определяет потенциальную, а $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ – кинетическую энергию скалярного поля.

Подставив параметр Хаббла из уравнения (2.197) в уравнение (2.198), получим

$$\dot{\phi} = -\frac{W'_\phi}{\sqrt{3W}}. \quad (2.200)$$

Следовательно, задавая вид зависимости $W = W(\phi)$, можно получать точные решения уравнений динамики скалярного поля. Исходя из вида различных генерирующих

Таблица 1 — Генерирующие функции и их связь с суперпотенциалом

Иванов (1981), Червон (2004)	$H(\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} (F(\phi) + F_*)$	$F(\phi) = \sqrt{W} - F_*$
Чименто и др. (1993)	$F(a) = V[\phi(a)]a^6$	$F(a(\phi)) = a^6 \left[W - \frac{W_\phi'^2}{6W} \right]$
Шранк и Миелке (1994)	$g(H) = V(H) - 3H^2$	$g(H(\phi)) = -\frac{W_\phi'^2}{6W}$
Крюгер и Норбьюри (2000)	$F(\phi) = 1 + \left(\frac{\dot{\phi}^2}{V(\phi)} \right)$	$F(\phi) = \frac{6W^2 + W_\phi'^2}{6W^2 - W_\phi'^2}$
Червон (2004)	$W(\phi) = 3H(\phi)^2$	$W(\phi) \equiv W(\phi)$
Чартерс и Мимосо (2010)	$x(\phi) = \dot{\phi}/H$	$x(\phi) = -\frac{W_\phi'}{W}$
Харко и др. (2014)	$\dot{\phi} = 2V(\phi) \text{sh}^2(G(\phi))$	$\text{cth}(G(\phi)) = \frac{\sqrt{6}W}{W_\phi'}$

функций, можно найти их выражение через суперпотенциал W , который, также, будет определять связь между ними, которая приводится в таблице 1.

Таким образом, на основе полученных соотношений, все ранее рассмотренные методы генерирования точных решений, основанные на различных классах генерирующих функций можно привести к методу суперпотенциала и найти соотношения между ними.

2.7 Уравнение Шрёдингера в космологии

Изначально, метод приведения уравнений космологической динамики к одномерному уравнению Шрёдингера рассматривался в работе [163], также в статье [174]. В дальнейшем, этот метод получил развитие в работах [175; 178]. Также в статье [176] авторы повторили этот подход для определения связи между космологическими и квантово-механическими задачами.

В контексте представления уравнений Фридмана в форме одномерного стационарного уравнения Шрёдингера, в работе [163] был предложен подход, в котором потенциал скалярного поля в виде функции $V = V(\phi)$ фактически заменяется функцией $V(t)$, которая интерпретируется как эффективный потенциал скалярного поля.

В данной работе было отмечено, что представление потенциала скалярного поля в виде $V = V(t)$ не противоречит общей вариационной проблеме вывода уравнений Эйнштейна, где используется функциональная зависимость $V(\phi)$, поскольку функциям $V(t)$ и $\phi(t)$ однозначно соответствует функция $V(\phi)$. Также, зависимость потенциала скалярного поля от космического времени рассматривалась как «история потенциала» [163], связанная с эволюцией скалярного поля и космологической динамикой.

Рассмотрим метод предложенный в работе [163], представив потенциал как $V(\phi) \rightarrow V(\phi) + \Lambda$. то есть, учитывая ненулевую энергию вакуума, которой соответствует космологическая постоянная Λ .

Для этого, следуя [163], запишем уравнение Фридмана-Эйнштейна с ненулевой, в общем случае, кривизной [163] как

$$V(\phi) = \Lambda + \dot{H} + 3H^2 + \frac{2k}{a^2}, \quad (2.201)$$

и переопределим его через масштабный фактор

$$V(\phi) = \Lambda + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}. \quad (2.202)$$

Далее, перепишем уравнение (2.202) в терминах функции $\psi(t) = a^3$

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + 3V(t) \right] \psi(t) - 6k\psi^{1/3} = -3\Lambda\psi(t). \quad (2.203)$$

Таким образом, в случае пространственно плоской Вселенной Фридмана ($k = 0$), из (2.203) получим дифференциальное уравнение

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + 3V(t) \right] \psi(t) = -3\Lambda\psi(t), \quad (2.204)$$

соответствующее одномерному стационарному уравнению Шрёдингера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 2U(x) \right] \psi(x) = 2E\psi(x), \quad (2.205)$$

с единичной массой частицы ($m_{Sch} = 1$) и $\hbar = 1$. В случае представления $x \equiv t$ получим потенциал и энергию частицы в следующем виде $U(t) = \frac{3}{2}V(t)$ и $E = -\frac{3}{2}\Lambda$. Следовательно, в данном представлении, $\psi(t)$ является волновой функцией.

Также запишем связь параметра Хаббла и волновой функции

$$H \equiv \frac{1}{3} \frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)}, \quad (2.206)$$

что подразумевает $\psi(t) = Ca^3$. Таким образом, на основе данного подхода можно формально сопоставить космологические и квантово-механические задачи.

В работе [176] в качестве исходной модели рассматривался гармонический осциллятор с потенциалом $U(x) = \omega^2 x^2/2$, для которого из уравнения Шрёдингера (2.205) получим

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega}{2}x^2} H_n(\sqrt{\omega}x), \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega. \quad (2.207)$$

где $H_n(\sqrt{\omega}x)$ – полиномы Эрмита.

Основному состоянию $n = 0$ соответствует $H_0(\sqrt{\omega}x) = 1$ со следующими выражениями для энергии частицы и волновой функции

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega, \quad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega}{2}x^2}. \quad (2.208)$$

Преобразования к космологическим решениям приводят к следующим выражениям [176]

$$H(t) = -\frac{\omega}{3}t, \quad \phi(t) = \sqrt{\frac{2\omega}{3}} t, \quad V(\phi) = \frac{\omega}{2}\phi^2, \quad \Lambda = -\frac{\omega}{3}, \quad (2.209)$$

которые соответствуют хаотической инфляции с квадратичным потенциалом и массой поля $m^2 = \omega$ [47; 62]. Также в работе [176] приводится сопоставление других квантово-механических задач с актуальными космологическими моделями.

2.7.1 Уравнение Шрёдингера в терминах скалярного поля

Теперь рассмотрим новый подход, связанный с представлением уравнений космологической динамики с нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$ в виде уравнения типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера (УШ) в терминах скалярного поля, отличный от рассматриваемого в предыдущем разделе, в котором это уравнение записывалось в терминах космического времени.

Продифференцировав уравнение

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'_\phi{}^2, \quad (2.210)$$

по полю, получим

$$V'_\phi = 6HH'_\phi - 4H'_\phi H''_\phi, \quad (2.211)$$

$$V'_\phi = \frac{dV}{d\phi} = \frac{dV}{dH} \frac{dH}{d\phi} = \frac{dV}{dH} H'_\phi = V'_H H'_\phi. \quad (2.212)$$

Из уравнений (2.211)–(2.212) следует

$$H''_\phi - \frac{3}{2}H + \frac{1}{4}V'_H = 0. \quad (2.213)$$

Теперь определим

$$V'_H = 6 \left[1 - \frac{2}{3}U(\phi) \right] H, \quad (2.214)$$

где $U(\phi)$ – некоторая функция скалярного поля.

Таким образом, уравнение (2.213) приводится к уравнению Шрёдингера

$$H''_\phi - U(\phi)H = 0, \quad (2.215)$$

в котором координата x заменяется на скалярное поле ϕ и параметр Хаббла играет роль волновой функции $\psi(\phi) = H(\phi)$.

Далее, запишем

$$V'_H = V'_\phi / H'_\phi, \quad (2.216)$$

и, в результате, получим систему уравнений

$$H''_{\phi} - U(\phi)H = 0, \quad (2.217)$$

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 6 \left[1 - \frac{2}{3}U(\phi) \right] HH'_{\phi}, \quad (2.218)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_{\phi}. \quad (2.219)$$

Потенциал, следующий из уравнения Иванова-Салопека-Бонда (2.55) отличается от потенциала в уравнениях (2.217)–(2.218) на некоторую постоянную $V_{Sch}(\phi) = V_{ISB}(\phi) + C$.

В качестве первого примера использования предложенного подхода для генерирования точных космологических решений рассмотрим модель с нулевым потенциалом $U(\phi) = 0$.

Из уравнения (2.217) запишем параметр Хаббла

$$H(\phi) = c_1\phi + c_2, \quad (2.220)$$

и, используя уравнение (2.218), найдем потенциал

$$V_{Sch}(\phi) = 3c_1^2\phi^2 + 6c_1c_2\phi + c_3. \quad (2.221)$$

Из уравнения Иванова-Салопека-Бонда (2.210) с параметром Хаббла (2.220) получим потенциал

$$V_{ISB}(\phi) = 3c_1^2\phi^2 + 6c_1c_2\phi - 2c_1^2 + 3c_2^2. \quad (2.222)$$

В случае $c_3 = -2c_1^2 + 3c_2^2$ потенциалы, полученные из уравнения Шрёдингера и методом Иванова-Салопека-Бонда совпадают $V_{Sch} = V_{ISB}$.

Соответствующая эволюция поля, параметр Хаббла и масштабный фактор для этой модели записываются следующим образом

$$\phi(t) = -2c_1t + \phi_0, \quad (2.223)$$

$$H(t) = -2c_1^2t + c_1\phi_0 + c_2, \quad (2.224)$$

$$a(t) = a_0 \exp[-c_1^2t^2 + (c_1\phi_0 + c_2)t]. \quad (2.225)$$

Выбор постоянных $c_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega}{3}}$, $c_2 = 0$, $\phi_0 = 0$, $c_3 = -2c_1^2 = -\frac{\omega}{3}$ соответствует решениям (2.209), полученным ранее для хаотической инфляции с квадратичным потенциалом из уравнения (2.205).

Таким образом, уравнения (2.217)–(2.219) определяют альтернативный метод генерирования точных космологических решений из уравнения типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера.

2.7.2 Дуальные космологические модели

Теперь рассмотрим схему построения новых точных космологических решений из известных на основе предложенного ранее подхода:

1. После выбора параметра Хаббла $H_{ISB}(\phi)$ и генерирования точных решений уравнений Иванова-Салопека-Бонда можно вычислить потенциал $U(\phi)$ из уравнения (2.217).
2. После подстановки потенциала $U = U(\phi)$ в уравнение (2.217) получим обобщенный параметр Хаббла $H_{Sch}(\phi)$ как сумму частных решений.
3. Далее, получим сопряженное (дуальное) исходному решению с помощью потенциала $U(\phi)$ из уравнений (2.217)–(2.218).
4. Финальным шагом является нахождение зависимости $\phi(t)$ из уравнения (2.219), параметра Хаббла $H(t)$ и масштабного фактора $a(t)$.

Таким образом, структура уравнения Шрёдингера, в отличие от уравнения Иванова-Салопека-Бонда, позволяет построить дуальные космологические точные решения на основе исходных. Следовательно, предложенный подход дает возможность найти связь между различными инфляционными моделями, то есть обобщить точные космологические решения на основе уравнения данного типа.

2.7.3 Точные решения на основе степенной инфляции

В качестве примера предложенного подхода рассмотрим модель степенной инфляции с параметром Хаббла

$$H_{ISB}(\phi) = c_1^2 e^{\frac{\alpha}{2}\phi}, \quad (2.226)$$

где α и c_1 – некоторые постоянные.

Из уравнения (2.210) получим потенциал скалярного поля

$$V_{ISB}(\phi) = \frac{c_1^4}{2} (6 - \alpha^2) e^{\alpha\phi}, \quad (2.227)$$

с соответствующими данному потенциалу решениями

$$\phi(t) = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[\frac{2}{c_1^2 \alpha^2 (t + c_4)} \right], \quad (2.228)$$

$$H(t) = \frac{2}{\alpha^2 (t + c_4)}, \quad (2.229)$$

$$a(t) = a_0 (t + c_4)^{2/\alpha^2}, \quad (2.230)$$

следующими из уравнения (2.219). Ускоренному расширению Вселенной, в данной модели, соответствует значение параметра $\alpha^2 < 2$.

Будем рассматривать параметр Хаббла (2.226) как частное решение уравнения Шрёдингера (2.217). После подстановки частного решения (2.226) в уравнение (2.217) получим потенциал $U(\phi) = \alpha^2/4$, который снова подставим в УШ. Для этого потенциала, из уравнения (2.217) следует общее решение

$$H(\phi) = c_1^2 e^{\frac{\alpha}{2}\phi} + c_2^2 e^{-\frac{\alpha}{2}\phi}. \quad (2.231)$$

Далее, из уравнения (2.218) найдем потенциал скалярного поля, соответствующий общему решению уравнения (2.231)

$$V_{Sch}(\phi) = \frac{1}{2}(6 - \alpha^2)(c_1^4 e^{\alpha\phi} + c_2^4 e^{-\alpha\phi}) + c_3. \quad (2.232)$$

В общем случае $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, из уравнения (2.219) и соотношения $H = \dot{a}/a$ получаем остальные параметры космологической модели

$$\phi(t) = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[\frac{c_1(e^{\alpha^2 c_1 c_2 (t+c_4)} - 1)}{c_2(e^{\alpha^2 c_1 c_2 (t+c_4)} + 1)} \right], \quad (2.233)$$

$$H(t) = 2c_1 c_2 \left[\frac{(e^{2\alpha^2 c_1 c_2 (t+c_4)} + 1)}{(e^{2\alpha^2 c_1 c_2 (t+c_4)} - 1)} \right] = 2c_1 c_2 \operatorname{cth}[\alpha^2 c_1 c_2 (t + c_4)], \quad (2.234)$$

$$a(t) = a_0 \operatorname{sh}^{2/\alpha^2}[\alpha^2 c_1 c_2 (t + c_4)]. \quad (2.235)$$

Теперь рассмотрим частные решения, соответствующие актуальным космологическим моделям.

Частные решения для случая $U = const$

Для случая $c_1 = c_2$ получим

$$H(\phi) = c_1^2 \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha}{2} \phi \right), \quad (2.236)$$

$$V_{Sch}(\phi) = c_1^4 (6 - \alpha^2) \operatorname{ch}(\alpha\phi) + c_3, \quad (2.237)$$

$$\phi(t) = -\frac{2}{\alpha} \ln \left[\frac{e^{\alpha^2 c_1^2 (t+c_4)} - 1}{e^{\alpha^2 c_1^2 (t+c_4)} + 1} \right], \quad (2.238)$$

$$H(t) = 2c_1^2 \operatorname{cth}[\alpha^2 c_1^2 (t + c_4)], \quad (2.239)$$

$$a(t) = a_0 \operatorname{sh}^{2/\alpha^2}[\alpha^2 c_1^2 (t + c_4)], \quad (2.240)$$

соответствующие инфляции с гиперболическим потенциалом скалярного поля.

Случаю $c_2 = ic_1$ соответствуют следующие решения

$$H(\phi) = c_1^2 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha}{2} \phi \right), \quad (2.241)$$

$$V_{Sch}(\phi) = c_1^4 (6 - \alpha^2) \operatorname{ch}(\alpha\phi) + c_5, \quad (2.242)$$

$$\phi(t) = \pm \frac{4}{\alpha} \operatorname{arth} [\operatorname{tg}(\alpha^2 c_1^2 t)], \quad (2.243)$$

$$H(t) = -2c_1^2 \operatorname{tg} [\alpha^2 c_1^2 (t + c_4)], \quad (2.244)$$

$$a(t) = a_0 \cos^{2/\alpha^2} [\alpha^2 c_1^2 (t + c_4)], \quad (2.245)$$

где c_3 , c_4 и c_5 – константы интегрирования.

Подобные решения с гиперболическим потенциалом скалярного поля рассматривались ранее в работе [199] в контексте моделей с «постоянным скатыванием», основанных на заданном соотношении $\ddot{\phi} = -(3 + \hat{\alpha})H\dot{\phi}$, в котором значение постоянной $\hat{\alpha}$ определяет режим ускоренного расширения и отклонение потенциала $V(\phi)$ от плоского. Таким образом, в рамках предложенного подхода, моделям с «постоянным скатыванием» соответствует постоянный потенциал $U(\phi) = \alpha^2/4 = \text{const}$ в уравнении (2.217).

Для случая $U = 3/2$ или $\alpha = \pm\sqrt{6}$ получим решения для плоского потенциала

$$H(\phi) = c_1^2 e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi} + c_2^2 e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\phi}, \quad (2.246)$$

$$V_{Sch}(\phi) = c_3 = \text{const}, \quad (2.247)$$

$$\phi(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left[\frac{c_1 (e^{6c_1 c_2 (t+c_4)} - 1)}{c_2 (e^{6c_1 c_2 (t+c_4)} + 1)} \right], \quad (2.248)$$

$$H(t) = 2c_1 c_2 \left[\frac{(e^{12c_1 c_2 (t+c_4)} + 1)}{(e^{12c_1 c_2 (t+c_4)} - 1)} \right] = 2c_1 c_2 \operatorname{cth}[6c_1 c_2 (t + c_4)], \quad (2.249)$$

$$a(t) = a_0 \operatorname{sh}^{1/3}[6c_1 c_2 (t + c_4)], \quad (2.250)$$

которые рассматривались ранее в разделе § 2.4.1.

2.7.4 Преобразования Дарбу

Одним из методов генерирования новых точных решений уравнения Шрёдингера из известных является метод преобразований Дарбу [200].

В контексте данного метода, из общего решения УШ

$$H(\phi) = H_1(\phi) + H_2(\phi), \quad (2.251)$$

можно получить новые решения для нового уравнения этого типа

$$\hat{H}_\phi'' - \hat{U}(\phi)\hat{H} = 0, \quad (2.252)$$

основанные на преобразованиях Дарбу, именно

$$\hat{H}_1 = H'_\phi - H \left(\frac{(H_1)'_\phi}{H_1} \right), \quad (2.253)$$

$$\hat{H}_2 = H'_\phi - H \left(\frac{(H_2)'_\phi}{H_2} \right), \quad (2.254)$$

для потенциалов

$$\hat{U}_1 = U - 2 (\ln H_1)''_\phi = H_1 \left(\frac{1}{H_1} \right)''_\phi, \quad (2.255)$$

$$\hat{U}_2 = U - 2 (\ln H_2)''_\phi = H_2 \left(\frac{1}{H_2} \right)''_\phi. \quad (2.256)$$

В качестве примера, рассмотрим решение (2.220) для хаотической инфляции с квадратичным потенциалом, которому соответствует $U = 0$, полученное в разделе § 2.7.1, с параметром Хаббла

$$H(\phi) = c_1\phi + c_2. \quad (2.257)$$

Из уравнений (2.253)–(2.256) получим

$$\hat{H}_1(\phi) = \frac{c_3}{\phi}, \quad \hat{U}_1(\phi) = \frac{2}{\phi^2}, \quad \hat{H}_2 = c_2, \quad \hat{U}_2 = 0. \quad (2.258)$$

Поскольку второй класс решений является тривиальным, рассмотрим только первые полученные решения.

После подстановки $\hat{U}_1(\phi)$ в уравнение (2.252) имеем общее решение этого УШ

$$\hat{H}(\phi) = c_4\phi^2 + \frac{c_3}{\phi}. \quad (2.259)$$

Используя уравнение (2.218), для случая $c_3 = 0$ найдем потенциал

$$V_{Sch}(\phi) = 3c_4^2\phi^4 - 8c_4^2\phi^2 + c_5, \quad (2.260)$$

и, из уравнения (2.219) получим остальные параметры модели

$$\phi(t) = \phi_0 \exp(-4c_4t), \quad H(t) = c_4\phi_0^2 \exp(-8c_4t), \quad a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{\phi_0^2}{8}e^{-8c_4t}\right). \quad (2.261)$$

Точные решения для потенциала Хиггса (2.260), приводящего к спонтанному нарушению симметрии, рассматривались ранее в работах [161; 201].

Для случая $c_4 = 0$ в выражении (2.259), получим

$$V_{Sch}(\phi) = -2c_3^2\phi^{-4} + 3c_3^2\phi^{-2} + c_6, \quad \phi(t) = (6c_3t + c_7)^{1/3}, \quad (2.262)$$

$$H(t) = c_2(6c_3t + c_7)^{-1/3}, \quad a(t) = a_0 \exp\left[\frac{1}{4}(6c_3t + c_7)^{2/3}\right], \quad (2.263)$$

где c_6 и c_7 – постоянные интегрирования.

Полученные решения соответствуют «промежуточной инфляции», точные решения для которой рассматривались в работе [67]. Таким образом, различные актуальные модели космологической инфляции оказались связаны преобразованиями Дарбу уравнения Шрёдингера (2.217).

2.7.5 Приведение всех независимых уравнений космологической динамики к уравнению Шрёдингера

Как было отмечено ранее, из трех уравнений космологической динамики только два являются независимыми. Теперь приведем систему из двух дифференциальных уравнений, полностью определяющих динамику ранней Вселенной, к уравнению типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера. Таким образом, методы точных решений одного дифференциального уравнения можно использовать для генерирования точных космологических решений.

Для этого рассмотрим уравнения космологической динамики в следующем виде

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (2.264)$$

$$V(\phi(t)) = 3H^2 + \dot{H}. \quad (2.265)$$

Далее, определим скалярное поле и параметр Хаббла следующим образом

$$\phi(t) = \ln(\psi(t)), \quad (2.266)$$

$$H(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} - \int u(t) dt + \lambda \right), \quad (2.267)$$

где $\psi(t)$ и $u(t)$ – некоторые функции космического времени.

После подстановки (2.266)–(2.267) в уравнение (2.264) получим уравнение Шрёдингера

$$\ddot{\psi} - u(t)\psi = 0, \quad (2.268)$$

в котором волновая функция ψ связана со скалярным полем следующим образом $\psi(t) = \exp(\phi(t))$. Теперь рассмотрим точные космологические решения на основе выбора потенциала $u(t)$.

Для случая $u = 0$ из уравнения (2.268) получим

$$\psi(t) = c_1 t + c_2, \quad (2.269)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Из уравнений (2.266)–(2.267) и (2.265) следует

$$\phi(t) = \ln(c_1 t + c_2), \quad (2.270)$$

$$H(t) = \frac{c_1 t + c_2 \lambda + c_1}{2(c_1 t + c_2)}, \quad (2.271)$$

$$a(t) = a_0 e^{\frac{1}{2}\lambda t} (c_1 t + c_2)^{1/2}, \quad (2.272)$$

$$V(\phi) = \frac{c_1^2}{4} e^{-2\phi} + \frac{3c_1 \lambda}{2} e^{-\phi} + \frac{3}{4} \lambda^2. \quad (2.273)$$

Полученные решения соответствуют экспоненциально-степенной инфляции [57]. Для $c_1 = 0$ получим решения де Ситтера $\phi = \ln(c_2) = const$, $H = \frac{\lambda}{2} = const$ и $V = \frac{3}{4}\lambda^2 = const$.

Для $u(t) = A = const \neq 0$ из уравнения (2.268) получим

$$\psi(t) = c_1 e^{\sqrt{A}t} + c_2 e^{-\sqrt{A}t}, \quad (2.274)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Запишем растущее и убывающее решения в следующей форме

$$\psi_{1,2}(t) = \exp\left(\pm\sqrt{A}t + \phi_0\right), \quad \phi_0 = const. \quad (2.275)$$

Из уравнений (2.266)–(2.267) и (2.265) получим

$$\phi(t) = \pm\sqrt{A}t + \phi_0, \quad (2.276)$$

$$H(t) = \frac{1}{2}\left(\lambda \pm \sqrt{A} - At\right), \quad (2.277)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\lambda \pm \sqrt{A}\right)t - \frac{At^2}{2}\right]\right\}, \quad (2.278)$$

$$V(\phi) = \left[\lambda \pm \sqrt{A} \pm \sqrt{A}(\phi_0 - \phi)\right]^2 - \frac{1}{2}A, \quad (2.279)$$

то есть точные решения для модели инфляции с квадратичным потенциалом.

Волновые функции, полученные из условий $c_1 = c_2$, $c_1 = -c_2$, не приводят к физическим потенциалам, необходимым для реализации инфляционного сценария.

Теперь рассмотрим волновую функцию вида

$$\psi(t) = \text{th}(\alpha t), \quad (2.280)$$

где α – некоторая постоянная.

Из уравнения (2.268) получим потенциал Пёшля-Теллера

$$u(t) = -\frac{2\alpha^2}{\text{ch}^2(\alpha t)}, \quad (2.281)$$

предложенный для описания потенциальной энергии электростатического поля двухатомной молекулы в работе [202].

Из уравнений (2.266)–(2.267) и (2.265) для случая $\lambda = 0$ получим следующие космологические решения

$$\phi(t) = \ln(\text{th}(\alpha t)), \quad (2.282)$$

$$H(t) = \alpha \text{cth}(2\alpha t), \quad (2.283)$$

$$a(t) = a_0 [\text{sh}(2\alpha t)]^{1/2}, \quad (2.284)$$

$$V(\phi) = \alpha^2 [\text{ch}^2(\phi) + 2]. \quad (2.285)$$

Точные космологические решения для потенциала (2.285) рассматривались ранее в работах [160; 164]. В данном случае мы имеем формальную связь между квантово-механической и космологической моделями.

Таким образом, на основе результатов, полученных в разделе § 2.7.1 и в данном разделе, можно рассматривать задачу анализа космологической динамики на основе одномерного стационарного уравнения Шрёдингера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = 0, \quad (2.286)$$

с дополнительными соотношениями между параметрами моделей.

Для случая $x \equiv \phi$ (или ϕ -представления УШ (2.286)) получим уравнения (2.217)–(2.219) с потенциалом $U(\phi)$ и волновой функцией $\psi(\phi) = H(\phi)$, случаю $x \equiv t$ (или t -представлению УШ (2.286)) соответствуют уравнения (2.265)–(2.268) с другим потенциалом $u(t)$ и волновой функцией $\psi(t) = \exp(\phi(t))$.

Отметим, что представление уравнений космологической динамики в виде (2.286) приводит к различным космологическим решениям для одинаковых потенциалов $U(x)$. Например, для $U = 0$ в случае $x \equiv \phi$ получены космологические решения с квадратичным потенциалом (2.221), представлению $x \equiv t$ соответствуют решения с двойным экспоненциальным потенциалом (2.272).

С другой стороны, для различных потенциалов $U(x)$ получены одинаковые космологические решения. Так для $U = 0$ при условии $x \equiv \phi$ и $u = const \neq 0$ с условием $x \equiv t$ имеем одинаковые решения для модели с квадратичным потенциалом (2.221) или (2.279).

Также отметим, что из уравнений (2.267) и (2.268) можно определить параметр Хаббла в следующем виде

$$H(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} - \int \frac{\ddot{\psi}}{\psi} dt + \lambda \right). \quad (2.287)$$

На основе уравнения (2.287) сформулируем *условие интегрируемости уравнений космологической динамики в явном виде*:

Если интеграл

$$I(t) = \int \frac{\ddot{\psi}}{\psi} dt, \quad (2.288)$$

может быть получен в явном виде для произвольной функции $\psi = \psi(t)$, то исходные уравнения космологической динамики (1.7)–(1.9) имеют точные аналитические решения, которые определяются из соотношений (2.265)–(2.266) и (2.287).

Очевидно, что данное условие означает существование точных аналитических решений уравнения Шрёдингера (2.268) для случая $x \equiv t$, $U(x) = u(t)$. Также справедливо и обратное утверждение: любым точным решениям космологической динамики (1.7)–(1.9) соответствуют точные решения уравнения (2.268).

2.7.6 Первое утверждение о эквивалентности космологических решений

На основании результатов, полученных в разделах § 2.7.1 и § 2.7.5, сформулируем *первое утверждение о эквивалентности космологических решений*:

Для моделей космологической инфляции, содержащих скалярное поле и основанных на гравитации Эйнштейна

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.289)$$

в плоском четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера, точные решения системы уравнений космологической динамики

$$3H^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (2.290)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (2.291)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi = 0, \quad (2.292)$$

полученные с помощью любых методов точных решений, могут быть также получены на основе уравнения типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = 0, \quad (2.293)$$

для которого случаю $x \equiv \phi$, $U(x) = U(\phi)$ соответствуют соотношения

$$V'_\phi = 6 \left[1 - \frac{2}{3}U(\phi) \right] \psi\psi'_\phi, \quad (2.294)$$

$$\dot{\phi} = -2\psi'_\phi, \quad H(\phi) = \psi(\phi), \quad (2.295)$$

и случаю $x \equiv t$, $U(x) = u(t)$ соответствуют соотношения

$$\dot{H} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} \right) - u(t) \right], \quad (2.296)$$

$$\phi(t) = \ln(\psi(t)), \quad (2.297)$$

$$V(\phi(t)) = 3H^2 + \dot{H}. \quad (2.298)$$

Следовательно, анализ динамики ранней Вселенной с каноническим или фантомным полем можно проводить на основе методов точных решений уравнения типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера (2.293) в ϕ или t -представлении.

2.8 Генерирование новых точных решений из известных

Несмотря на большое число рассмотренных методов анализа системы нелинейных дифференциальных уравнений, определяющих динамику ранней Вселенной, для соответствия корректной смене стадий эволюции Вселенной необходим общий метод генерирования точных решений, соответствующих комбинации стадий (квази) де Ситтера и Фридмана с корректными (с позиций инфляционной парадигмы) потенциалами.

В качестве подхода, развивающего ранее рассмотренные методы, используем построение новых точных решений на основе известных. Генерированию новых точных решений из известных соответствуют преобразования вида $(H, V, \phi) \rightarrow (\bar{H}, \bar{V}, \varphi)$.

Теперь рассмотрим следующее преобразование параметра Хаббла

$$\bar{H} = f(t)H, \quad (2.299)$$

где $f = f(t)$ – произвольная функция.

Отсюда получим выражения для нового потенциала \bar{V} и нового скалярного поля φ

$$\bar{V}(\varphi) = 3f^2H^2 + \frac{d}{dt}(fH), \quad (2.300)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{d}{dt}(fH) = -f\dot{H} - \dot{f}H. \quad (2.301)$$

Теперь запишем уравнение (2.301) в следующем виде

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -f\dot{H} - \dot{f}H = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2H + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2f\frac{H}{\dot{H}} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\left(f + f\frac{H}{\dot{H}}\right). \quad (2.302)$$

Таким образом, окончательно, получим

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\phi}^2\left(f + f\frac{H}{\dot{H}}\right). \quad (2.303)$$

Процедура генерации новых решений на основе известных $H = H(t)$ и $\phi = \phi(t)$ выглядит следующим образом: задаем функцию $f = f(t)$ и, из уравнения (2.303), определяем $\varphi = \varphi(t)$. Далее, подставляем $H = H(t)$ и $f = f(t)$ в уравнение (2.300). Финальным шагом является замена $t = t(\varphi)$ в уравнении (2.300).

Простое преобразование поля ϕ в φ можно определить следующим образом

$$\dot{\varphi}^2 = n\dot{\phi}^2, \quad (2.304)$$

где n – некоторая произвольная постоянная.

Теперь определим вид функции $f = f(t)$, исходя из условия (2.304),

$$f(t) + \dot{f}(t)\frac{H}{\dot{H}} = f(H) + f'_H H = n. \quad (2.305)$$

Решая это уравнение, получим функцию, определяющую преобразование (2.299), в следующей форме

$$f(t) = f(H(t)) = n + \frac{\lambda}{H(t)}, \quad (2.306)$$

где λ – постоянная интегрирования.

Из уравнений (2.299), (2.300) и (2.303) получим преобразования параметров инфляционных моделей

$$\bar{H} = nH + \lambda, \quad (2.307)$$

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}, \quad C = \bar{a}_0/a_0^n, \quad (2.308)$$

$$\bar{V}(t) = 3n^2H^2 + 6\lambda nH + n\dot{H} + 3\lambda^2, \quad (2.309)$$

$$\varphi = \sqrt{n}\phi. \quad (2.310)$$

Таким образом, на основе точных решений для исходной модели с каноническим скалярным поля из преобразования (2.306) можно получить точные решения для пяти новых моделей:

1. модель с каноническим скалярным полем $n > 0$, $\lambda \neq 0$;
2. модель с каноническим скалярным полем $n > 0$, $\lambda = 0$;
3. модель с фантомным полем $n < 0$, $\lambda \neq 0$;
4. модель с фантомным полем $n < 0$, $\lambda = 0$;
5. модель с космологической постоянной $n = 0$, $\lambda \neq 0$.

Соотношение (2.310) определяет связь между моделями с каноническими и фантомными полями. В случае если исходное скалярное поле ϕ – каноническое, для канонического скалярного поля φ константа $n > 0$, для фантомного поля $n < 0$, если мы рассматриваем исходные решения для фантомного поля ϕ , то каноническому полю φ соответствует случай $n < 0$, а фантомному $n > 0$.

Теперь рассмотрим степенную инфляцию с параметром Хаббла $H(t) = (At + B)^{-1}$ как исходную модель.

Из уравнений (2.53)–(2.54) получим

$$V(t) = (3 - A) \exp(At + B)^2, \quad (2.311)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{A}} \ln(At + B) + \phi_0, \quad (2.312)$$

$$V(\phi) = (3 - A) \exp \left[\mp \sqrt{2A}(\phi - \phi_0) \right], \quad (2.313)$$

$$a(t) = a_0(At + B)^{1/A}, \quad (2.314)$$

то есть точные решения, которые были рассмотрены ранее в разделе § 2.4.3 с другими постоянными параметрами модели.

Используя преобразование, заданное функцией (2.306), из уравнений (2.307)–(2.310) получим

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{2n}{A}} \ln(At + B) + \varphi_0, \quad (2.315)$$

$$\bar{V}(\varphi) = n(3n - A) \exp \left[\mp \sqrt{\frac{2A}{n}} (\varphi - \varphi_0) \right] + 6n\lambda m \exp \left[\mp \frac{A}{\sqrt{2n}} (\varphi - \varphi_0) \right] + 3\lambda^2, \quad (2.316)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp(\lambda t) (At + B)^{n/A}, \quad (2.317)$$

что соответствует экспоненциально-степенной инфляции.

Отметим, что этой модели соответствует параметр Хаббла

$$\bar{H}(t) = n(At + B)^{-1} + \lambda, \quad (2.318)$$

для которого на малых временах, соответствующих инфляционной стадии $t \approx 0$ получим $\bar{H}_{inf} = \frac{n}{B} + \lambda$, то есть экспоненциальное расширение, на больших временах $t \rightarrow \infty$ получим $\bar{H}_{sec} = \lambda < \bar{H}_{inf}$, промежуточным стадиям соответствует расширение Вселенной по степенному закону при условии $n(At + B)^{-1} \gg \lambda$.

Теперь продемонстрируем данный метод на примере модели с потенциалом Хиггса (2.260) и масштабным фактором $a(t) = a_0 \exp(-\frac{B}{A}e^{-At})$, для обозначений $A = 4c_4$, $B = \phi_0^2$, подразумевающий двойное экспоненциальное расширение для случая $A < 0$.

На основе преобразований (2.307)–(2.310) запишем новые точные решения

$$\bar{H} = nB \exp(-At) + \lambda, \quad (2.319)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp \left(\lambda t - \frac{nB}{A} e^{-At} \right), \quad (2.320)$$

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{8nB}{A}} \exp \left(-\frac{A}{2} t \right), \quad (2.321)$$

$$\bar{V}(\varphi) = \frac{3A^2}{64} \varphi^4 + \left(\frac{3A\lambda}{4} - \frac{A^2}{8} \right) \varphi^2 + 3\lambda^2. \quad (2.322)$$

Таким образом, данные преобразования не изменяют форму потенциала Хиггса, но соответствуют другой космологической динамике для потенциала скалярного поля аналогичного вида.

Также, для случая $\lambda = A/6$, получим потенциал

$$\bar{V}(\varphi) = \frac{3A^2}{64} \varphi^4 + \frac{A^2}{12}, \quad (2.323)$$

соответствующий хаотической инфляции для случая степенного потенциала [33].

Теперь рассмотрим применение предложенного подхода генерирования новых точных космологических решений из известных для случая ранее рассмотренных методов.

2.8.1 Преобразование решений в методе Иванова-Салопека-Бонда

Теперь рассмотрим преобразование космологических решений на основе функции (2.306) в уравнениях типа Гамильтона-Якоби или Иванова-Салопека-Бонда

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H_\phi'^2, \quad (2.324)$$

$$\dot{\phi} = -2H_\phi'. \quad (2.325)$$

Запишем новый потенциал, который следует из преобразования параметра Хаббла $\bar{H} = nH + \lambda$, как

$$\bar{V} = 3\bar{H}^2 - 2\left(\frac{d\bar{H}}{d\varphi}\right)^2 = 3(nH + \lambda)^2 - 2n^2\left(\frac{dH}{d\phi}\frac{d\phi}{d\varphi}\right)^2. \quad (2.326)$$

Поскольку $d\phi/d\varphi = 1/\sqrt{n}$, получим новый потенциал в терминах исходного поля ϕ в следующем виде

$$\bar{V}(\phi) = 3(nH + \lambda)^2 - 2nH_\phi'^2 = 3n^2H^2 + 6n\lambda H - 2nH_\phi'^2 + 3\lambda^2. \quad (2.327)$$

Переход к потенциалу в терминах нового поля φ производится с помощью следующей замены исходного скалярного поля

$$\bar{V}(\varphi) = \bar{V}(\phi(\varphi)), \quad \phi = \varphi/\sqrt{n}. \quad (2.328)$$

Также сохраняем преобразования масштабного фактора, полученные ранее

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}, \quad C = \bar{a}_0/a_0^n. \quad (2.329)$$

Таким образом, при генерировании новых точных решений из исходных можно не проводить дополнительных вычислений, а непосредственно использовать преобразования (2.327)–(2.329) и получить потенциал $V(\varphi)$ на основе известного выражения для $H(\phi)$.

Теперь рассмотрим следующий параметр Хаббла с каноническим скалярным полем

$$H(\phi) = (A\phi + B)^m, \quad m \neq 2, \quad (2.330)$$

где A и B – произвольные постоянные, m – целое число.

Из уравнений (2.55)–(2.56) получим точные решения

$$V(\phi) = 3(A\phi + B)^{2m} - 2m^2A^2(A\phi + B)^{2m-2}, \quad (2.331)$$

$$\phi(t) = Am \left[K(C_1 + t)\Theta(t) - \frac{B}{A^2m} \right], \quad (2.332)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2}(C_1 + t)(m - 2)\right) [Km\Theta(t)(C_1 + t)]^m, \quad (2.333)$$

где

$$\Theta(t) = [A^2 m(m-2)(C_1 + t)]^{\frac{m-1}{2-m}}, \quad (2.334)$$

$$K = m2^{\frac{1}{2-m}} - 2^{\frac{m-3}{m-2}}. \quad (2.335)$$

Исходя из вида масштабного фактора (2.333), можно заключить, что для моделей инфляции, которые задаются параметром Хаббла (2.330), ускоренное расширение Вселенной происходит для следующих значений: $m < 0$, $m = 0$ и $m = 1$.

Далее, получим новые точные решения на основе преобразований (2.327)–(2.329)

$$\varphi = \sqrt{n}Am \left[K(C_1 + t)\Theta(t) - \frac{B}{A^2 m} \right], \quad (2.336)$$

$$\bar{V}(\varphi) = 3n^2 \left(\frac{A\varphi}{\sqrt{n}} + B \right)^{2m} - 2nm^2 A^2 \left(\frac{A\varphi}{\sqrt{n}} + B \right)^{2m-2} + 6\lambda n \left(\frac{A\varphi}{\sqrt{n}} + B \right)^m + 3\lambda^2, \quad (2.337)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp \left(\lambda - \frac{n}{2}(C_1 + t)(m-2) \right) [Km\Theta(t)(C_1 + t)]^{mn}. \quad (2.338)$$

В данном случае, ускоренное расширение происходит для произвольного значения параметра m , поскольку характер динамики связан также с выбором параметров n и λ .

В качестве другого примера, рассмотрим преобразования решений, полученных в работе Барроу [161] для скалярного поля вида

$$\phi(t) = A \exp(-\mu t^m), \quad (2.339)$$

где A , μ и m – некоторые постоянные.

Случаю $m = 1$ соответствуют следующие точные решения [161]

$$H(\phi) = -\frac{\phi^2}{4\mu} \left\{ \ln^2 \left[\left(\frac{\phi}{A} \right) \right] + \ln \left[\left(\frac{\phi}{A} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\}, \quad (2.340)$$

$$V(\phi) = \frac{3\phi^4}{16\mu^2} \left\{ \ln^2 \left[\left(\frac{\phi}{A} \right) \right] + \ln \left[\left(\frac{\phi}{A} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\}^2 - \frac{\phi^2}{2\mu^2} \ln^4 \left[\left(\frac{\phi}{A} \right) \right], \quad (2.341)$$

$$H(t) = -\frac{A^2}{4\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{t} \right)^2 + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{2} \right\} \exp \left(-\frac{2\mu}{t} \right), \quad (2.342)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ -\frac{A^2}{8} \left[1 + \frac{t}{\mu} \right] \exp \left(-\frac{2\mu}{t} \right) \right\}. \quad (2.343)$$

Таким образом, ускоренное расширение происходит в этой модели только в случае, когда константа $\mu < 0$.

После преобразований (2.327)–(2.329) получим

$$\varphi(t) = A\sqrt{n} \exp(-\mu t^m), \quad (2.344)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(\phi) = \frac{3\varphi^4}{16\mu^2} \left\{ \ln^2 \left[\left(\frac{\varphi}{A\sqrt{n}} \right) \right] + \ln \left[\left(\frac{\varphi}{A\sqrt{n}} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\}^2 - \frac{\varphi^2}{2\mu^2} \ln^4 \left[\left(\frac{\varphi}{A\sqrt{n}} \right) \right] \\ - 6\lambda \frac{\varphi^2}{4\mu} \left\{ \ln^2 \left[\left(\frac{\varphi}{A\sqrt{n}} \right) \right] + \ln \left[\left(\frac{\varphi}{A\sqrt{n}} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} + 3\lambda^2, \end{aligned} \quad (2.345)$$

$$\bar{H}(t) = \lambda - \frac{A^2 n}{4\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{t} \right)^2 + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{2} \right\} \exp \left(-\frac{2\mu}{t} \right), \quad (2.346)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp \left\{ \lambda - \frac{A^2 n}{8} \left[1 + \frac{t}{\mu} \right] \exp \left(-\frac{2\mu}{t} \right) \right\}. \quad (2.347)$$

Для данной модели ускоренное расширение связано уже с выбором трех параметров λ , n и μ , что позволяет рассматривать модели инфляции с различной эволюцией скалярного поля (2.344).

В работе [161] были представлены общие решения для произвольных значений постоянной m , которые также можно обобщить на основе преобразований (2.327)–(2.329).

2.8.2 Преобразование решений в методе приведения к уравнению Шрёдингера

Теперь используем преобразования (2.307)–(2.310) в методе приведения к уравнению Шрёдингера, который рассматривался в разделе § 2.7.1.

Запишем новый параметр Хаббла следующим образом

$$\bar{H} = nH + \lambda. \quad (2.348)$$

После подстановки \bar{H} в (2.217) получим новое уравнение

$$H_\phi'' + U(\phi) \left(H + \frac{\lambda}{n} \right) = 0, \quad \tilde{H}_\phi'' - U(\phi) \tilde{H}(\phi) = 0, \quad \tilde{H} = H + \frac{\lambda}{n}, \quad (2.349)$$

со следующей связью между старыми и новыми решениями

$$\bar{U} = U, \quad (2.350)$$

$$\bar{V}(\phi) = \int \left(n^2 + \frac{n\lambda}{H} \right) dV + const, \quad (2.351)$$

$$\varphi = \sqrt{n}\phi, \quad (2.352)$$

$$\bar{a} = C a^n \exp(\lambda t). \quad (2.353)$$

В качестве примера рассмотрим модель, основанную на точных решениях (2.241)–(2.245), и, после преобразований (2.348) – (2.353), получим

$$\bar{V}(\varphi) = (6 - \alpha^2) n c_1^2 \left[\frac{n c_1^2}{2} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \varphi \right) + \lambda \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{n}} \varphi \right) \right] + const, \quad (2.354)$$

$$\varphi(t) = \pm \frac{4\sqrt{n}}{\alpha} \operatorname{arth} [\operatorname{tg}(\alpha^2 c_1^2 t)], \quad (2.355)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 \cos^{2n/\alpha^2} [\alpha^2 c_1^2 (t + c_4)] \exp(\lambda t). \quad (2.356)$$

В данном случае, мы получили точные решения для модели с возрастающим или затухающим (в зависимости от знака постоянной λ) осциллирующим масштабным фактором.

В случае $\lambda = 0$ получаем форм-инвариантные преобразования уравнения Шрёдингера (2.217) с новыми решениями $\bar{V} = n^2V + const$, $\varphi = \sqrt{n}\phi$ и $\bar{a} = Ca^n$.

2.8.3 Преобразование решений в методе суперпотенциала

Запишем уравнения космологической динамики в терминах суперпотенциала

$$3H^2 = W, \quad (2.357)$$

$$3H\dot{\phi}^2 = -\dot{W}, \quad (2.358)$$

откуда получим следующие соотношения

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{\dot{W}}{\sqrt{3W}}, \quad \dot{\phi} = -\frac{W'_\phi}{\sqrt{3W}}, \quad (2.359)$$

$$V(t) = W + \frac{\dot{W}}{2\sqrt{3W}}, \quad V(\phi) = W - \frac{W_\phi'^2}{6W}. \quad (2.360)$$

Уравнения (2.300)–(2.303), определяющие общие преобразования исходных точных космологических решений в новые, в терминах суперпотенциала записываются следующим образом

$$\bar{W} = f^2W, \quad (2.361)$$

$$\bar{V}(\varphi) = f^2W + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(2\sqrt{W}\dot{f} + f\frac{\dot{W}}{\sqrt{W}} \right) = f^2W - \frac{1}{3}f'_\phi - f\frac{W_\phi'^2}{6W}, \quad (2.362)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\phi}^2 \left(f + 2f\frac{\dot{W}}{W} \right) = -\frac{f\dot{W}}{\sqrt{3W}} - \frac{2\dot{f}\sqrt{W}}{\sqrt{3}}, \quad (2.363)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{fW'_\phi}{\sqrt{3W}} - \frac{2}{\sqrt{3}}f'_\phi\sqrt{W}, \quad (2.364)$$

где функция $f(\phi) = f(t(\phi))$.

На основе (2.361) и (2.363) запишем следующие преобразования

$$H = \bar{H}\sqrt{\frac{W}{\bar{W}}}, \quad \dot{\phi}^2 = \dot{\varphi}^2\sqrt{\frac{\bar{W}}{W}} \left(\frac{\dot{W}}{\dot{\bar{W}}} \right), \quad (2.365)$$

которые связывают исходные и новые параметры инфляционных моделей.

Таким образом, генерирование новых точных решений из исходных определяется выбором суперпотенциала \bar{W} новой модели.

Применяя преобразования (2.365) к уравнениям (2.357)–(2.358), получим

$$3\bar{H}^2 = \bar{W}, \quad 3\bar{H}\dot{\varphi}^2 = -\dot{\bar{W}}. \quad (2.366)$$

Следовательно, выражения (2.365) не меняют структуру исходных уравнений динамики (2.357)–(2.358), то есть являются форм-инвариантными преобразованиями. Подобные преобразования уравнений космологической динамики (без их вывода) рассматривались ранее в работе [190] в терминах плотности полной энергии скалярного поля ρ_ϕ и также использовались для построения точных космологических решений для различных моделей инфляции.

Теперь, в качестве примера построения новых точных решений из исходных, рассмотрим суперпотенциал для степенной инфляции следующего вида $W(t) = 3(At + B)^{-2}$.

Из уравнений (2.357)–(2.360) получим решения для степенной инфляции

$$V(\phi) = (3 - A) \exp \left[\mp \sqrt{2A}(\phi - \phi_0) \right], \quad (2.367)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{A}} \ln(At + B) + \phi_0, \quad (2.368)$$

$$a(t) = a_0(At + B)^{1/A}. \quad (2.369)$$

Выбирая функцию $f(t) = C \ln(At + B)(At + B)$, получим

$$\bar{W}(t) = 3C^2 \ln^2(At + B), \quad (2.370)$$

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{8C(At + B)}{A}} + \varphi_0, \quad (2.371)$$

$$\bar{V}(\varphi) = 3C^2 \ln^2 \left(-\frac{A}{8C}(\varphi - \varphi_0)^2 \right) - \frac{8C^2}{(\varphi - \varphi_0)^2}, \quad (2.372)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp[-(Ct + BC/A)](At + B)^{(Ct + BC/A)}, \quad (2.373)$$

соответствующие точным решениям для модели космологической инфляции, которая рассматривалась ранее в работе [164].

Таким образом, выбирая (например) степенную инфляцию в качестве исходной модели, можно получить точные решения для других моделей инфляции и провести классификацию по виду выбранной функции f или суперпотенциала \bar{W} . Отметим, что в качестве исходных можно выбрать любые другие точные решения уравнений космологической динамики.

В таблице 2 представлены точные космологические решения для некоторых моделей инфляции, на основе которых можно генерировать точные решения для новых моделей посредством предложенного метода преобразования параметра Хаббла общего вида $\bar{H}(t) = f(t)H(t)$ и его частного случая с функцией вида $f(t) \equiv n + \frac{\lambda}{H(t)}$.

Таблица 2 — Точные космологические решения для моделей, основанных на ОТО

Параметр Хаббла и масштабный фактор	Эволюция и потенциал скалярного поля
$H(t) = -At + B$ $a(t) = a_0 \exp\left[\frac{1}{2}t(2B - At)\right]$	$\phi(t) = \pm\sqrt{2A}t$ $V(\phi) = 3\left(\mp\sqrt{\frac{A}{2}}\phi + B\right)^2 - A$
$H(t) = B \exp(-At)$ $a(t) = a_0 \exp\left[-\frac{B}{A}e^{-At}\right]$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{8B}{A}} \exp\left(-\frac{A}{2}t\right)$ $V(\phi) = \frac{3A}{8}\phi^2\left(\frac{A}{8}\phi^2 - A\right)$
$H(t) = -\frac{AB}{3} \operatorname{tg}(At)$ $a(t) = a_0 \cos^{B/3}(At)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2B}{3}} \ln \sqrt{\frac{1+\sin(At)}{1-\sin(At)}}$ $V(\phi) = \frac{A^2B(B-1)}{3} \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi\right) - \frac{A^2B^2}{3}$
$H(t) = \frac{AB}{3} \operatorname{th}(At)$ $a(t) = a_0 \operatorname{ch}^{B/3}(At)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{2B}{3}} \operatorname{arcsin}(\operatorname{th}(At))$ $V(\phi) = \frac{A^2B}{3} \left(B \sin^2 \sqrt{-\frac{3}{2B}}\phi + \cos^2 \sqrt{-\frac{3}{2B}}\phi\right)$
$H(t) = A^2B \operatorname{cth}(2Bt)$ $a(t) = a_0 \operatorname{sh}^{A^2}(Bt)$	$\phi(t) = A \ln(\operatorname{th}(Bt))$ $V(\phi) = A^2B^2 \left[(3A^2 - 2) \operatorname{ch}^2\left(\frac{\phi}{A}\right) + 2\right]$
$H(t) = A^2B \operatorname{ctg}(2Bt)$ $a(t) = a_0 \sin^{A^2}(Bt)$	$\phi(t) = A \operatorname{arctg}(\cos(2Bt))$ $V(\phi) = A^2B^2 \left[(3A^2 - 2) \operatorname{ch}^2\left(\frac{\phi}{A}\right) - 3A^2\right]$
$H(t) = \frac{1}{3}B \operatorname{th}(Bt)$ $a(t) = a_0 \operatorname{sh}^{1/3}(Bt)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\pm \ln(e^{Bt} - 1) \mp \ln(e^{Bt} + 1)\right]$ $V(\phi) = \frac{1}{3}B^2$
$H(t) = \frac{1}{3}B \operatorname{cth}(Bt)$ $a(t) = a_0 \operatorname{ch}^{1/3}(Bt)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\pm \ln(e^{Bt} - 1) \mp \ln(e^{Bt} + 1)\right]$ $V(\phi) = \frac{1}{3}B^2$
$H(t) = \frac{B}{3t} - \frac{A}{3B}$ $a(t) = a_0 t^{B/3} \exp\left(-\frac{A}{3B}t\right)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2B}{3}} \ln(t)$ $V(\phi) = \frac{B(B-1)}{3} \left(e^{-2\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi} - \frac{2Ae^{-\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi}}{B(B-1)}\right) + \frac{A^2}{3B^2}$
$H(t) = A \left[\frac{B+4}{6AB}t\right]^{-\frac{B}{B+4}}$ $a(t) = a_0 \exp\left[\frac{A}{4}(B+4)t \left(\frac{B+4}{6AB}t\right)^{-\frac{B}{B+4}}\right]$	$\phi(t) = \left[\frac{B+4}{6AB}t\right]^{\frac{2}{B+4}}$ $V(\phi) = 3A^2\phi^{-B} \left(1 - \frac{B^2}{6}\phi^{-2}\right)$
$H(t) = \frac{A^2B}{6} \operatorname{cth}^3(Bt)$ $a(t) = a_0 \exp\left[-\frac{A^2}{2} \operatorname{cth}^2(Bt)\right] \operatorname{sh}^{A^2}(Bt)$	$\phi(t) = \frac{A}{\operatorname{sh}(Bt)}$ $V(\phi) = \frac{B^2}{12A^2}\phi^2(\phi^2 + A) \left(\frac{\phi^4}{A^2} + 2\phi^2 + A^2 - 6\right)$
$H(t) = C \ln(At + B)$ $a(t) = a_0(At + B)^{Ct + \frac{CB}{A}} \exp\left(-\frac{C(At+B)}{A}\right)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{8C}{A}(At + B)}$ $V(\phi) = 3C^2 \ln^2\left(-\frac{A}{8C}\phi^2\right) - \frac{8C^2}{\phi^2}$
$H(t) = \sqrt{\frac{2C}{3}} \frac{\exp(\sqrt{6C}t)}{\exp(\sqrt{6C}t)-1}$ $a(t) = a_0 \left[\exp\left(2\sqrt{\frac{3C}{2}}t\right) - 1\right]^{1/3}$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left[\frac{\exp\left(\sqrt{\frac{3C}{2}}t\right)+1}{\exp\left(\sqrt{\frac{3C}{2}}t\right)-1}\right]$ $V(\phi) = C \left[1 + \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\phi\right)\right]$

2.9 Связь точных и приближенных решений

Теперь рассмотрим соотношения между точными решениями и полученными с помощью приближения медленного скатывания, которые будем использовать для оценки расхождения между ними, нахождения начального значения скалярного поля и генерирования точных космологических решений.

Вначале запишем уравнения динамики скалярного поля для точных и приближенных решений

$$3H^2 = W, \quad (2.374)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{W'_\phi}{\sqrt{3W}}, \quad (2.375)$$

$$3H_{sr}^2 = V_{sr}, \quad (2.376)$$

$$\dot{\phi}_{sr} = -\frac{(V'_\phi)_{sr}}{\sqrt{3V_{sr}}}, \quad (2.377)$$

где H – точное выражение параметра Хаббла, H_{sr} – приближенное выражение параметра Хаббла и V_{sr} – потенциал, в приближении медленного скатывания, $W = V + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$.

Точное выражение потенциала, следующее из определения суперпотенциала и уравнений (2.374) и (2.375)

$$V = W - \frac{W'^2_\phi}{6W}, \quad (2.378)$$

Для случая одинаковой фоновой динамики $H = H_{sr}$, из соотношений (2.374) и (2.376) получим $W = V_{sr}$, из уравнений (2.375) и (2.377) получим $\phi = \phi_{sr}$, также, из уравнения (2.378) $V \neq V_{sr}$, таким образом,

$$W = V_{sr}, \quad \phi = \phi_{sr}, \quad (2.379)$$

$$V = 3H_{sr}^2 - 2(H_{sr}^2)_\phi = V_{sr} - \frac{(V'^2_\phi)_{sr}}{6V_{sr}}. \quad (2.380)$$

Следовательно, на основе уравнений (2.379) и (2.380) возможно получать точные решения из приближенных.

В качестве примера такого подхода рассмотрим полученные в разделе § 2.1 инфляционные решения для потенциала в модели Старобинского (2.14)

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(-\frac{2}{3}mt + c \right), \quad (2.381)$$

$$H(t) = \frac{m}{\frac{4}{3}mt - 2c} \pm \frac{1}{2}m, \quad (2.382)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left(\frac{1}{2}mt \right) (2mt - 3c)^{3/4}. \quad (2.383)$$

Далее, на основе соотношений (2.380) запишем точное выражение для потенциала, соответствующего решениям (2.381)–(2.383)

$$V(\phi) = \frac{27}{20}m^2 \left(1 - \frac{5}{9}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}\right)^2 - \frac{3}{5}m^2. \quad (2.384)$$

Дополняя модель положительной космологической постоянной $V(\phi) \rightarrow V(\phi) + \Lambda$, ассоциируемой с ненулевой энергией вакуума, где $\Lambda = \frac{1}{3}m^2$, получим $V(\phi = 0) + \Lambda = 0$, то есть состояние истинного вакуума для нулевого скалярного поля.

Теперь сопоставим точные и приближенные решения и определим расхождение между ними для одинаковой фоновой динамики и эволюции скалярного поля. В данном случае, различие обусловлено вторым слагаемым в выражении для потенциала скалярного поля $V(\phi) = 3H^2 - 2H_\phi'^2$.

Также рассмотрим другой случай, когда «история потенциала» $V = V(t)$ в приближении медленного скатывания совпадает с полученной из точных решений, и различие между точными и приближенными решениями будет определяться по динамике расширения Вселенной.

2.9.1 Случай одинаковой динамики и различных потенциалов

Сопоставление точных и приближенных решений для одинаковой фоновой динамики (одинакового параметра Хаббла) будем проводить по разности числа e -фолдов на основе метода суперпотенциала.

Напомним, что число e -фолдов определяется следующим образом

$$N = \int_{t_0}^{t_e} H dt = \int_{\phi_0}^{\phi_e} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_H}} \approx \int_{\phi_0}^{\phi_e} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}} \approx 60, \quad (2.385)$$

где t_0 и t_e – время начала и завершения инфляционной стадии, ϕ_0 и ϕ_e – поле в начале и в конце инфляции.

Посредством параметра медленного скатывания, определенного через параметр Хаббла или суперпотенциал

$$\epsilon_H = 2 \left(\frac{H'_\phi}{H} \right)^2 = \epsilon_W = \frac{1}{2} \left(\frac{W'_\phi}{W} \right)^2, \quad (2.386)$$

рассчитывается точное число e -фолдов на завершении стадии инфляции.

В случае параметра медленного скатывания, определенного через потенциал из приближения медленного скатывания

$$\epsilon_V = \frac{1}{2} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^2, \quad (2.387)$$

рассчитывается приближенное число e -фолдов на завершении стадии инфляции.

Теперь запишем параметр медленного скатывания для случая $H = H_{sr}$, $\phi = \phi_{sr}$, $V \neq V_{sr}$

$$\epsilon_W = \frac{1}{2} \left(\frac{W'_\phi}{W} \right)^2 = \epsilon_{V_{sr}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(V'_\phi)_{sr}}{V_{sr}} \right)^2, \quad (2.388)$$

Далее, определим различие по числу e -фолдов в случае точных и приближенных решений

$$\Delta_N^{(H)} = N(V_{sr}) - N(V) = \int_{\phi_0}^{\phi_e} \left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{V_{sr}}}} - \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}} \right) d\phi = - \int_{\phi_0}^{\phi_e} \left(\frac{W}{W'_\phi} - \frac{V}{V'_\phi} \right) d\phi. \quad (2.389)$$

Учитывая выражение для потенциала (2.378) и записывая $\Delta_N = \Delta_N(\phi)$ как функцию поля, получим

$$\Delta_N^{(H)}(\phi) = - \int \frac{2W(W_\phi'^2 - W_\phi''W)}{W_\phi'(W_\phi'^2 - 2W_\phi''W + 6W^2)} d\phi. \quad (2.390)$$

Таким образом, на основе выражения (2.390) можно рассчитать расхождение по числу e -фолдов между точными и приближенными решениями для случая одинаковой динамики. Теперь рассмотрим метод нахождения значения скалярного поля вначале инфляции на основе предложенного подхода.

2.9.2 Нахождение начального значения скалярного поля

Поскольку фоновая динамика в случае точных и приближенных решений одинакова, то есть $H = H_{sr}$, при вычислении N по параметру Хаббла как функции космического времени расхождение $\Delta_N^{(H)} = 0$.

Для нахождения модели инфляции, соответствующего этому условию, рассмотрим уравнение

$$W_\phi'^2 - W_\phi''W = 0. \quad (2.391)$$

Решением этого уравнения будет суперпотенциал $W(\phi) = C_1 \exp(C_2\phi)$, где C_1 и C_2 – константы интегрирования. Данному суперпотенциалу соответствует степенная инфляция (2.367)–(2.369).

Теперь рассмотрим модели космологической инфляции с ненулевым расхождением между точными и приближенными решениями.

Например, для модели инфляции, соответствующей потенциалу (2.330), в случае произвольного n , получим

$$\Delta_N^{(H)}(\phi) = \frac{A(A\phi + B)}{2A^2(n^2 - n) - 3A^2\phi^2 - 6AB\phi - 3B^2}. \quad (2.392)$$

Также, можно записать расхождение как функцию времени, подставляя зависимость $\phi = \phi(t)$ (2.332) в выражение (2.392), получим

$$\Delta_N^{(H)}(t) = -\frac{AK(C_1 + t)\Theta(t)}{3A^2K^2n(C_1^2 + t^2) + 6A^2K^2C_1n\Theta^2(t)t - 2n + 2}. \quad (2.393)$$

Из условия $\Delta_N^{(H)}(t = 0) = 0$ можно найти значение скалярного поля ϕ_0 вначале инфляции, что является полезным практическим приложением предложенного подхода для анализа моделей космологической инфляции.

Например, в случае расхождения (2.393) из условия $\Delta_N(t) = 0$ получим $t = t_0 = -C_1$ и, соответственно, $\phi_0 = -B/A$.

Теперь рассмотрим другую модель с суперпотенциалом

$$W(\phi) = \lambda\phi^2, \quad \lambda = const. \quad (2.394)$$

Этому суперпотенциалу соответствуют следующие точные космологические решения

$$V(\phi) = \lambda\phi^2 - \frac{2}{3}\lambda, \quad (2.395)$$

$$\phi(t) = \pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t + \phi_0. \quad (2.396)$$

Из выражения (2.390) получим расхождение между точными и приближенными решениями в терминах скалярного поля

$$\Delta_N^{(H)}(\phi) = \frac{1}{3} \ln(\phi), \quad (2.397)$$

далее, подставляя выражение (2.396) в (2.397), получим расхождение между точными и приближенными решениями в терминах космического времени

$$\Delta_N^{(H)}(t) = \frac{1}{3} \ln \left[\pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t + \phi_0 \right]. \quad (2.398)$$

Учитывая, что в начале инфляции $\Delta_N^{(H)}(\phi_0) = \Delta_N^{(H)}(t_0) = 0$, также $t_0 = 0$, получим точное значение скалярного поля $\phi_0 = 1$.

В таблице 3 приведены расхождения по числу e -фолдов между точными и приближенными решениями и начальные значения скалярного поля для некоторых моделей.

Также, на основе полученного значения скалярного поля в начале стадии инфляции, можно вычислить начальное значение потенциала.

Например, для модели с потенциалом

$$V(\phi) = \lambda\phi^2 - \frac{2}{3}\lambda, \quad (2.399)$$

после вычисления значения поля вначале инфляции из выражения (2.390) и подстановки $\phi_0 = 1$ в (2.399) получим $V_0 = \frac{1}{3}\lambda$.

Таблица 3 — Расхождение между точными и приближенными решениями по числу e -фолдов для некоторых моделей космологической инфляции.

$W(\phi) = \lambda e^{-\alpha\phi}$	$\Delta_N^{(H)}(\phi) = 0$
$V(\phi) = \lambda \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) e^{-\alpha\phi}$	$\Delta_N^{(H)}(t) = 0$
$W(\phi) = \lambda\phi^2$	$\Delta_N^{(H)}(\phi) = \frac{1}{3} \ln(\phi)$
$V(\phi) = \lambda\phi^2 - \frac{2}{3}\lambda$	$\Delta_N^{(H)}(t) = \frac{1}{3} \ln \left[\pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} t + \phi_0 \right]$
$V_0 = \frac{1}{3}\lambda$	$\phi_0 = 1$
$W(\phi) = \lambda\phi^{-2}$	$\Delta_N^{(H)}(\phi) = \frac{1}{6} \ln(3\phi^2 - 4), \quad \phi_0 = \sqrt{5/3}$
$V(\phi) = -\frac{2}{3}\lambda\phi^{-4} + \lambda\phi^{-2}$	$\Delta_N^{(H)}(t) = \frac{1}{6} \ln \left[3 \left(2\sqrt{3\lambda} t + \phi_0^3 \right)^{2/3} - 4 \right]$
$V_0 = \frac{9}{25}\lambda$	$\phi_0 = \sqrt{\frac{5}{3}}$
$W(\phi) = \lambda\phi^4$	$\Delta_N^{(H)}(\phi) = \frac{1}{6} \ln(3\phi^2 - 4)$
$V(\phi) = \lambda\phi^4 - \frac{8}{3}\lambda\phi^2$	$\Delta_N^{(H)}(t) = \frac{1}{6} \ln \left[3\phi_0^2 \exp \left(\pm 8\sqrt{\frac{\lambda}{3}} t \right) - 4 \right]$
$V_0 = \frac{5}{9}(5\lambda - 8)$	$\phi_0 = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

Следует отметить, что любой потенциал скалярного поля можно определить с точностью до константы, то есть $V \rightarrow V + \Lambda$, где постоянной Λ соответствует значение энергии вакуума. В данном случае, рассматриваются модели с нулевой космологической постоянной $\Lambda = 0$.

2.9.3 Случай одинаковой истории потенциала и различной динамики

Запишем уравнения фоновой динамики в приближении медленного скатывания в следующем виде

$$V_{sr}(t) = 3H_{sr}^2, \quad (2.400)$$

$$3H_{sr}\dot{\phi}_{sr}^2 = -\dot{V}_{sr}, \quad (2.401)$$

также запишем точные уравнения

$$V(t) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (2.402)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (2.403)$$

Теперь рассмотрим случай $V(t) = V_{sr}(t)$, для которого $\phi \neq \phi_{sr}$ и $H \neq H_{sr}$.

Выразим приближенный параметр Хаббла через точный

$$3H_{sr}^2 = 3H^2 + \dot{H}, \quad H_{sr} = \sqrt{H^2 + \frac{\dot{H}}{3}}, \quad (2.404)$$

где оставляем только положительный знак, поскольку в период инфляции $H > 0$.

Таким образом, разница между точными и приближенными решениями по числу e -фолдов

$$N - N_{sr} = \Delta_N^{(V)} = \int_{t_0}^{t_e} \left(H(t) - \sqrt{H^2(t) + \frac{\dot{H}(t)}{3}} \right) dt. \quad (2.405)$$

Функция $\Delta_N^{(V)}(t)$ определяется посредством дифференциального уравнения

$$\frac{d\Delta_N^{(V)}(t)}{dt} = H(t) - \sqrt{H^2(t) + \frac{\dot{H}(t)}{3}}. \quad (2.406)$$

Например, для степенной инфляции с параметром Хаббла $H = (At + B)^{-1}$, в отличие от случая с одинаковой фоновой динамикой, получим ненулевое расхождение

$$\Delta_N^{(V)}(t) = \frac{1 - \alpha}{A} \ln(At + B), \quad H_{sr}(t) = \alpha(At + B)^{-1}, \quad (2.407)$$

где α – постоянная, определяющая расхождение точного и приближенного выражений параметра Хаббла, для случая $\alpha = 1$ получим $H = H_{sr}$.

2.9.4 Генерирование точных решений из расхождения $\Delta_N^{(V)}$

Априорно заданное расхождение между точными и приближенными решениями $\Delta_N^{(V)}(t)$ можно рассматривать как генерирующую функцию.

Например, рассматривая линейную функцию $\Delta_N^{(V)}(t)$ следующего вида

$$\Delta_N^{(V)}(t) = A(t - t_0), \quad (2.408)$$

где A – положительная постоянная, и решая уравнение (2.406) получим

$$H(t) = \frac{3A\phi_0^2}{4} \exp[-3A(t - t_0)] + \frac{A}{2}, \quad (2.409)$$

$$\phi(t) = \phi_0 \exp[-3A(t - t_0)], \quad (2.410)$$

$$V(\phi) = \frac{27A^2}{4} \left(\phi^2 - \frac{2}{3} \right)^2, \quad (2.411)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left[\frac{A}{2}(t - t_0) + \frac{\phi_0^2}{8} (1 - e^{-6A(t-t_0)}) \right], \quad (2.412)$$

что соответствует модели инфляции, которая определяется потенциалом Хиггса, инфляция на основе которого рассматривалась в работах [33; 59].

Глава 3. Космологические возмущения

Космологические возмущения являются источником эволюции крупномасштабной структуры Вселенной. Объяснение распределения галактик и скоплений галактик на больших расстояниях в наблюдаемой части Вселенной на основе космологических возмущений было изначально предложено в работах Харрисона [203] и Зельдовича [204].

В контексте инфляционной парадигмы, источником космологических возмущений являются квантовые флуктуации скалярного поля и соответствующие флуктуации метрики, которым, в линейном порядке, соответствуют три моды, развивающиеся независимо. Спектр космологических возмущений в моделях ранней Вселенной с одним скалярным полем, построенных на основе гравитации Эйнштейна, является гауссовым [76; 77; 205; 206].

Из классической теории космологических возмущений известно, что анализ метрических неоднородностей может быть упрощен до изучения одной возмущенной величины [76; 77]. Таким образом, квантовую теорию космологических возмущений можно редуцировать к квантовому описанию флуктуаций некоторого скалярного поля.

Поскольку фон, в котором развивается скалярное поле, зависит от времени, масса поля также будет зависеть от времени. Эта зависимость массы поля от времени будет приводить к появлению частиц, если эволюция начинается с некоторого вакуумного состояния. Квантовое рождение частиц соответствует развитию и росту космологических возмущений [76; 77; 205; 206].

Первый шаг в анализе метрических возмущений заключается в их классификации в соответствии с изменениями свойств в результате плоских вращений. В теории космологических возмущений рассматриваются скалярные, векторные и тензорные возмущения [76; 77; 205; 206].

Рассмотрим возмущения фоновой метрики плоского пространства Фридмана-Робертсона-Уокера

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}.$$

Фоновая метрика зависит только от времени, тогда как возмущения метрики $\delta g_{\mu\nu}$ зависят от пространства и времени. Так как метрический тензор является симметричным, существует 10 степеней свободы возмущений для $\delta g_{\mu\nu}$. Четыре степени свободы соответствуют скалярным возмущениям метрики (существует только четыре возможности конструирования возмущений метрики скалярными функциями)

$$\delta g_{ij} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2A & -B_{,j} \\ -B_{|j} & 2(\psi\delta_{ij} - E_{ij}) \end{pmatrix},$$

где четыре степени свободы возмущений обозначены A , B , E и ψ , $|j$ обозначает ковариантную производную и δ_{ij} – символ Кронекера [76; 77; 205; 206].

Также учитываются четыре векторные степени свободы возмущений метрики, соответствующие четырем возможностям конструирования возмущений метрики из векторов

$$\delta g_{ij} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_{|i} \\ -S_{|i} & F_{i|j} + F_{j|i} \end{pmatrix},$$

где S и F – векторы, дивергенция которых равна нулю (в случае векторов с неисчезающей дивергенцией, дивергенция переходит в скалярные моды возмущений).

Две тензорные моды соответствуют двум состояниям поляризации гравитационных волн. Возмущения метрики, в данном случае, запишем следующим образом

$$\delta g_{ij} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix},$$

где тензор h_{ij} не содержит ни скалярных, ни векторных составляющих. Отметим, что гравитационные волны не связаны линейно с возмущениями материи.

В квантовой теории космологических возмущений большое значение имеет определение начальных условий. Вакуумное состояние, как правило, выбирается в виде вакуума Банча-Дэвиса, так как в этом состоянии в начальный момент времени отсутствуют частицы [207].

В моделях инфляции с одним скалярным полем, на пересечении радиуса Хаббла, космологические возмущения «замерзают» и их квантовое состояние начинает меняться таким образом, чтобы выполнялось условие постоянства амплитуды. Замерзание вакуумного состояния приводит к появлению классических свойств [76; 77; 205; 206]. Таким образом, квантовая теория возмущений обеспечивает последовательную систему взглядов при рассмотрении генерации и эволюции космологических возмущений.

Влияние космологических возмущений на анизотропию и поляризацию реликтового излучения определяется на основе спектральных параметров, наблюдательные ограничения на значения которых составляют основу экспериментальной проверки теоретических моделей ранней Вселенной.

Изложение теории космологических возмущений представлено во многих источниках, причем, в некоторых случаях, их спектральные параметры (например, спектры мощности) имеют различное обозначение. Также, отметим, что при расчете параметров возмущений используются две различные нормировки тензора реликтовых гравитационных волн.

В данном случае, рассмотрим проблему построения характеристик космологических возмущений на основе подхода, представленного в обзорах [76; 77; 205; 206].

3.1 Возмущения поля и метрики

Рассмотрим невозмущенную метрику пространства ФРУ в следующем виде

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j], \quad (3.1)$$

$$\phi = \phi(\eta), \quad (3.2)$$

где γ_{ij} – пространственная часть метрики, $\{i, j\}$ – индексы пространственных координат, $\eta = \int dt/a$ – конформное время, в терминах которого уравнения динамики записываются следующим образом

$$3\mathcal{H}^2 = \frac{1}{2}\phi'^2 + a^2V(\phi), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2}\phi'^2, \quad (3.4)$$

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2V'(\phi) = 0, \quad (3.5)$$

где $\mathcal{H} = aH$, $\phi' = \dot{\phi}$ и штрих означает производную по конформному времени η .

Теперь запишем возмущенные метрику и скалярное поле

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[- (1 + 2A)d\eta^2 + 2B_{|i}dx^i d\eta + \left\{ (1 + 2\mathcal{R})\gamma_{ij} + 2E_{|ij} + 2h_{ij} \right\} dx^i dx^j \right], \quad (3.6)$$

$$\phi = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, x^i), \quad (3.7)$$

где $|i$ означает ковариантную производную.

Четыре параметра (A, B, \mathcal{R}, E) определяют первый тип возмущений, именно, скалярные возмущения, h_{ij} соответствует тензорным возмущениям (гравитационным волнам), третий тип возмущений – векторные возмущения отсутствуют (быстро затухают) в первом порядке теории космологических возмущений [76; 77; 205; 206].

Поскольку космологические возмущения рассматриваются в пространстве-времени, им соответствуют некоторые координаты. Но координаты являются просто метками для обозначения точек в пространственно-временном многообразии и не несут независимого физического смысла. Выполняя преобразования пространственно-временных координат, впоследствии называемых «калибровочными преобразованиями», можно ввести «фиктивные» возмущения в однородную и изотропную Вселенную. Такие возмущения называются «калибровочными артефактами».

Рассмотрим два пространственно-временных многообразия, одно из них однородная и изотропная Вселенная M_0 , другое M – Вселенная с неоднородностями. Выбор координат представим как отображение D между многообразиями M_0 и M .

Теперь рассмотрим второе отображение \tilde{D} некоторой точки из многообразия M_0 в различные точки многообразия M . Используя инверсию этих отображений, можно определить два различных набора координат в точках M . Рассмотрим теперь некоторую физическую величину Q на многообразии M_0 , и, соответственно, физическую величину Q_0 на многообразии M . В первой системе координат, заданной отображением D , возмущение δQ в точке $p \in M$ будет определяться как

$$\delta Q(p) = Q(p) - Q^{(0)}(D^{-1}(p)).$$

Аналогично, во второй системе координат, заданной \tilde{D} , возмущение будет

$$\delta \tilde{Q}(p) = Q(p) - Q^{(0)}(\tilde{D}^{-1}(p)).$$

Различие $\Delta Q = \delta \tilde{Q}(p) - \delta Q(p)$ определяет «калибровочные артефакты», которые имеют место только для скалярных возмущений, поскольку тензорные возмущения калибровочно инвариантны.

В результате, на основе следующего преобразования координат

$$\tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, x^i), \quad (3.8)$$

$$\tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij} \xi_j(\eta, x^i), \quad (3.9)$$

которые определяются произвольными функциями (ξ^0, ξ) получим новые «фиктивные» возмущения

$$\tilde{A} = A - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad (3.10)$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \mathcal{H}\xi^0, \quad \tilde{E} = E - \xi, \quad (3.11)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij}. \quad (3.12)$$

Для устранения «фиктивных» возмущений обычно рассматриваются калибровочно-инвариантные потенциалы Бардина [208]

$$\Phi = A + (B - E')' + \mathcal{H}(B - E'), \quad (3.13)$$

$$\Psi = \mathcal{R} + \mathcal{H}(B - E'). \quad (3.14)$$

Теперь, на основе потенциалов Бардина (3.13)–(3.14), запишем калибровочно-инвариантные уравнения для возмущений [76; 77; 205; 206]

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = \frac{1}{2}[\phi'\delta\phi' - a^2V'(\phi)\delta\phi], \quad (3.15)$$

$$-\nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = -\frac{1}{2}[\phi'\delta\phi' + a^2V'(\phi)\delta\phi], \quad (3.16)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{1}{2}\phi'\delta\phi, \quad (3.17)$$

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi = 4\phi'\Phi' - 2a^2V'(\phi)\Phi - a^2V''(\phi)\delta\phi. \quad (3.18)$$

Для упрощения системы уравнений (3.15)–(3.18) обычно используют переменные Муханова-Сасаки [76]

$$u \equiv a\delta\phi + z\Phi, \quad (3.19)$$

$$z \equiv a\frac{\phi'}{\mathcal{H}}, \quad (3.20)$$

в терминах которых уравнения на возмущения записываются как

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{z''}{z}u = 0, \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\mathcal{H}}{2a^2}(zu' - z'u), \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{a^2\Phi}{\mathcal{H}}\right)' = \frac{1}{2}zu. \quad (3.23)$$

Процедура решения этих уравнений выглядит следующим образом: из уравнения (3.21) находим $u(z)$, далее, из уравнений (3.22)–(3.23) определяем $\Phi(z)$ и возмущения поля $\delta\phi$ из соотношений (3.19)–(3.20).

3.2 Квантование возмущений

Теперь рассмотрим возмущения Φ и $\delta\phi$ как некоторые квантовые поля. Уравнения динамики для скалярных возмущений рассмотрим, как уравнения Эйлера-Лагранжа для действия [76]

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z}u^2 \right]. \quad (3.24)$$

Чтобы перейти к квантовому описанию космологических возмущений в пространстве (3.1) определим оператор $\hat{u}(\eta, \mathbf{x})$, соответствующий классической переменной u , в следующем виде

$$\hat{u}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[u_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_k^*(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (3.25)$$

где k – волновое число, операторы рождения и уничтожения соответствуют следующим условиям, определяющим вакуумное состояние

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad (3.26)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0. \quad (3.27)$$

Записывая уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана (3.24) с оператором (3.25) и условиями (3.26)–(3.27) получим уравнение типа одномерного уравнения Шрёдингера

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)u_k = 0, \quad (3.28)$$

в котором отношение z''/z является эффективным потенциалом.

Для решения этого уравнения запишем параметры медленного скатывания в следующем виде

$$\epsilon = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = \frac{z^2}{2a^2}, \quad (3.29)$$

$$\delta = 1 - \frac{\phi''}{\mathcal{H}\phi'} = 1 + \epsilon - \frac{z'}{\mathcal{H}z}, \quad (3.30)$$

$$\xi = - \left(2 - \epsilon - 3\delta + \delta^2 - \frac{\phi'''}{\mathcal{H}^2\phi'} \right). \quad (3.31)$$

В терминах параметров медленного скатывания конформное время η и эффективный потенциал z''/z для каждой моды u_k записываются следующим образом

$$\eta = -\frac{1}{\mathcal{H}} + \int \frac{\epsilon da}{a\mathcal{H}}, \quad (3.32)$$

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}^2 \left[(1 + \epsilon - \delta)(2 - \delta) + \mathcal{H}^{-1}(\epsilon' - \delta') \right]. \quad (3.33)$$

Считая параметры (3.29)–(3.30) постоянными в порядке ϵ^2 [77], запишем

$$\epsilon' = 2\mathcal{H}(\epsilon^2 - \epsilon\delta) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.34)$$

$$\delta' = \mathcal{H}(\epsilon\delta - \xi) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.35)$$

$$\dot{\epsilon} = 2H(\epsilon^2 - \epsilon\delta) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.36)$$

$$\dot{\delta} = H(\epsilon\delta - \xi) = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.37)$$

С учетом этих соотношений, получаем

$$\eta = -\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{1}{1 - \epsilon}, \quad (3.38)$$

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (3.39)$$

$$\nu = \frac{1 + \epsilon - \delta}{1 - \epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (3.40)$$

При рассмотрении космологических возмущений характерным масштабом является размер горизонта событий H^{-1} , таким образом, можно записать решения уравнения (3.28) для двух режимов $k/a \gg H$, то есть для возмущений с длиной волны гораздо меньшей этого масштаба и $k/a \ll H$ для длинноволновых возмущений

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k \gg aH, \quad (3.41)$$

$$u_k = C_1 z, \quad k \ll aH. \quad (3.42)$$

В пределе $k/a \gg H$ моды космологических возмущений развиваются как обычные квантовые возмущения в пространстве Минковского, тогда как в противоположном пределе $k/a \ll H$ отношение u_k/z становится постоянным в масштабах, превышающих горизонт событий, что соответствует их «замерзанию» [76; 77; 205; 206].

Исходя из условий (3.34)–(3.37), решение уравнения (3.28) с эффективным потенциалом (3.40) для случая $k/a \gg H$ записывается следующим образом

$$u_k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} (-\eta)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-k\eta), \quad (3.43)$$

где $H_\nu^{(1)}(z)$ – функции Ханкеля первого рода и величина ν определяется из уравнения (3.40), в терминах параметров медленного скатывания.

В пределе $k\eta \rightarrow 0$ решение (3.43) можно записать как

$$|u_k| = \frac{2^{\nu-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2k}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (-k\eta)^{\frac{1}{2}-\nu} = \frac{C(\nu)}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad (3.44)$$

$$C(\nu) = 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (1-\epsilon)^{\nu-\frac{1}{2}}, \quad (3.45)$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция.

Теперь рассмотрим тензорные возмущения с уравнениями динамики, следующими из действия [76; 77]

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \frac{a^2}{2} \left[(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2 \right]. \quad (3.46)$$

с тензором, соответствующим реликтовым гравитационным волнам

$$\hat{h}_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1,2} \left[h_k(\eta) e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{h.c.} \right] \quad (3.47)$$

где «h.c.» означает эрмитово сопряженное первому слагаемому, $h_k(\eta)$ – амплитуда, $e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda)$ – два тензора поляризации, удовлетворяющие следующим условиям

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad k^i e_{ij} = 0, \quad e_{ii} = 0, \quad (3.48)$$

$$e_{ij}(-\mathbf{k}, \lambda) = e_{ij}^*(\mathbf{k}, \lambda), \quad (3.49)$$

и $\lambda = 1, 2$ соответствует двум типам поляризации.

Условие нормировки для тензоров поляризации гравитационных волн определяется следующим образом [206]

$$\sum_{\lambda} e_{ij}^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{ij}(\mathbf{k}, \lambda) = \delta_{ij}. \quad (3.50)$$

Далее, определим новую переменную

$$v_k(\eta) = \frac{a}{\sqrt{2}} h_k(\eta), \quad (3.51)$$

в терминах которой уравнения, соответствующие лагранжиану (3.46), записываются следующим образом

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (3.52)$$

С учетом условий (3.34)–(3.37) получим

$$\frac{a''}{a} = 2\mathcal{H}^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{1}{\eta^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right), \quad (3.53)$$

$$\mu = \frac{1}{1 - \epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (3.54)$$

Два асимптотических решения для случаев $k/a \gg H$ и $k/a \ll H$ записываются следующим образом

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k \gg aH, \quad (3.55)$$

$$v_k = C a, \quad k \ll aH. \quad (3.56)$$

Решение уравнения (3.51) для случая $k/a \gg H$ определяется аналогично (3.28) и, в пределе $k\eta \rightarrow 0$, получим

$$|v_k| = \frac{C(\mu)}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{1}{2}-\mu}, \quad (3.57)$$

$$C(\mu) = 2^{\mu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (1 - \epsilon)^{\mu-\frac{1}{2}}. \quad (3.58)$$

Переменные (3.44) и (3.57) непосредственно связаны с измеряемыми параметрами космологических возмущений.

3.3 Параметры космологических возмущений

Параметры космологических возмущений, которые оценивают по влиянию возмущений скалярного поля и метрики на стадии инфляции на анизотропию реликтового излучения, именно, спектры мощности, в моделях с одним скалярным полем в линейном порядке рассчитывают как двухточечную корреляцию в пространстве Фурье [76; 77; 205; 206].

Вначале рассмотрим скалярные возмущения, определяемые величиной $\mathcal{R} = u_k/z$

$$\langle 0 | \mathcal{R}_k^* \mathcal{R}_{k'} | 0 \rangle = \frac{|u_k|^2}{z^2} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{(2\pi)^3}{4\pi k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.59)$$

Из определения переменной z (3.20) получим следующие соотношения

$$z = a \frac{\phi'}{\mathcal{H}} = \frac{a\dot{\phi}}{H}, \quad \phi' = \frac{d\phi}{d\eta} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\eta} = a\dot{\phi}, \quad (3.60)$$

$$z^2 = \frac{a^2 \dot{\phi}^2}{H^2} = -2a^2 \frac{\dot{H}}{H^2} = 2a^2 \epsilon, \quad (3.61)$$

с учетом которых определим *спектр мощности скалярных возмущений*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|u_k|^2}{z^2} = \frac{C^2(\nu)}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}. \quad (3.62)$$

На пересечении радиуса Хаббла $k = aH$ получим

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{C^2(\nu)}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2, \quad (3.63)$$

где индекс \mathcal{R} заменяется индексом S , который соответствует скалярным возмущениям.

Далее, из условия $k = aH$, запишем

$$d \ln k = H dt + \frac{\dot{H}}{H} dt = H(1 - \epsilon) dt, \quad (3.64)$$

которое, также, можно записать в терминах скалярного поля

$$d \ln k = H(1 - \epsilon) dt = \frac{H}{\dot{\phi}} (1 - \epsilon) dt = \frac{H}{2H'_\phi} (\epsilon - 1) d\phi = \left(\frac{H'_\phi}{H} - \frac{H}{2H'_\phi} \right) d\phi. \quad (3.65)$$

и, из определения *спектрального индекса (наклона спектра) скалярных возмущений*, получим

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_\mathcal{R}(k)}{d \ln k} = \frac{1}{H(1 - \epsilon)} \left[\frac{d \ln \mathcal{P}_\mathcal{R}(t)}{dt} \right]. \quad (3.66)$$

Также, подставляя выражение спектра мощности, запишем

$$\begin{aligned} n_s - 1 = & -\frac{1}{H^2 \epsilon (1 - \epsilon)^3} \left\{ 2\Psi(\nu) H \epsilon (\dot{\epsilon} \delta - \dot{\delta} \epsilon - 2\dot{\epsilon} + \dot{\delta}) + \right. \\ & + \dot{\epsilon} \epsilon H [2 \ln(1 - \epsilon)(\delta - 2\epsilon) + 2 \ln 2(\delta - 2) + 3\epsilon - 2\delta] + \\ & \left. + 2H \epsilon \dot{\delta} (1 - \epsilon) \ln[2(1 - \epsilon)] - 2\dot{H} \epsilon (1 - \epsilon)^2 + H \dot{\epsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где $\Psi = \Psi(\nu)$ – дигамма-функция, которую, для постоянного значения величины ν , можно определить как $\Psi(n) = H_{n-1} - \gamma$, где H_n – гармоническое число и $\gamma \approx 0.57722$ – постоянная Эйлера. Для постоянного параметра $\nu = 3/2$ получим $\Psi(\frac{3}{2}) = 2 - \gamma - 2 \ln 2$.

В случае приближения медленного скатывания $\epsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$, $\epsilon \delta \approx 0$, из выражения (3.67) получим

$$n_s - 1 \approx 2\delta - 4\epsilon - 8(1 + C)\epsilon^2 + 2(3 + 5C)\epsilon\delta - 2C\epsilon\xi, \quad (3.68)$$

где $C = 4(\ln 2 + \gamma) - 5 \approx 0.08145$.

Также, для анализа космологических возмущений вводят дополнительный параметр – «убегание» возмущений, который рассчитывается по формуле

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = \frac{1}{H(1 - \epsilon)} \left(\frac{dn_s}{dt} \right). \quad (3.69)$$

Теперь рассмотрим тензорные возмущения (реликтовые гравитационные волны)

$$\sum_{\lambda} \langle 0 | h_{k,\lambda}^* h_{k',\lambda} | 0 \rangle = s \frac{2}{a^2} |v_k|^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \frac{(2\pi)^3}{4\pi k^3} \mathcal{P}_T(k) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.70)$$

В большинстве работ по теории космологических возмущений значение параметра $s = 4$ (см. например, [33; 76; 205; 206; 209]). Однако, в других работах [77; 148; 210] значение

параметра $s = 1$. Это различие легко объяснить, рассматривая нормированную амплитуду тензорных возмущений $\bar{h}_k(\eta) = \sqrt{s} \times h_k(\eta)$. Таким образом, различные результаты соответствуют различным нормировкам тензора реликтовых гравитационных волн и, для общности изложения, будем рассматривать параметры космологических возмущений с учетом параметра $s = 1,4$.

Теперь запишем *спектр мощности тензорных возмущений*

$$\mathcal{P}_T(k) = 2 \times s C^2(\mu) \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2 = 2s C^2(\mu) \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2, \quad (3.71)$$

где, при умножении на 2, мы учитываем две возможных поляризации (« \times » и « $+$ ») гравитационных волн.

Спектральный индекс (наклон спектра) тензорных возмущений определяется следующим образом

$$n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_g(k)}{d \ln k} = \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left[\frac{d \ln \mathcal{P}_g(t)}{dt} \right], \quad (3.72)$$

$$n_T = \frac{2}{H^2 \epsilon (1-\epsilon)^3} \left\{ H \dot{\epsilon} (\Psi(\mu) + \ln[2(1-\epsilon)] - 1) + \dot{H} \epsilon (1-\epsilon)^2 \right\}. \quad (3.73)$$

В приближении медленного скатывания получим

$$n_T \approx -2\epsilon - (3+C)\epsilon^2 + (1+C)\epsilon\delta. \quad (3.74)$$

Также запишем «убегание» тензорных возмущений

$$\frac{dn_g}{d \ln k} = \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left(\frac{dn_g}{dt} \right). \quad (3.75)$$

Отметим, что выражения (3.67) и (3.73) спектральных индексов скалярных и тензорных возмущений отличается от выражений (3.68) и (3.74) представленных в работах [76; 205] и совпадают с ними только в приближении медленного скатывания $1 - \epsilon \approx 0$.

Важным параметром космологических возмущений является *тензорно-скалярное отношение*, которое, на пересечении радиуса Хаббла, определяется как отношение спектров мощности тензорных и скалярных возмущений

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_g}{\mathcal{P}_R} = 4s\epsilon \frac{C^2(\mu)}{C^2(\nu)} = 4^{\frac{1-2\epsilon+\delta}{1-\epsilon}} s\epsilon (1-\epsilon)^{\frac{2(\delta-\epsilon)}{1-\epsilon}} \frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma^2(\nu)}. \quad (3.76)$$

Определим следующие условия для параметров $C(\nu)$, $C(\mu)$, μ и ν на пересечении радиуса Хаббла

$$C(\nu) \simeq 1, \quad \nu \simeq 3/2, \quad (3.77)$$

$$C(\mu) \simeq 1, \quad \mu \simeq 3/2, \quad (3.78)$$

которые выполняются при условии $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$.

При выполнении этих условий, на пересечении радиуса Хаббла, получим следующие выражения для параметров космологических возмущений

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{P}_T(k) = 2s \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (3.80)$$

$$r = 4s\epsilon, \quad (3.81)$$

$$n_S - 1 = 2 \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \right), \quad (3.82)$$

$$n_T = -\frac{2\epsilon}{1 - \epsilon}, \quad (3.83)$$

$$\frac{dn_S}{d \ln k} = -\frac{2(2\delta^2\epsilon - \delta\epsilon^2 - 5\delta\epsilon + 4\epsilon^2 - \epsilon\xi + \xi)}{(1 - \epsilon)^3}, \quad (3.84)$$

$$\frac{dn_T}{d \ln k} = -\frac{4(\epsilon^2 - \epsilon\delta)}{(1 - \epsilon)^3}. \quad (3.85)$$

В данном случае, мы учитываем малую поправку $(1 - \epsilon)$, которая отсутствует в выражениях для параметров космологических возмущений в случае приближения медленного скатывания ($1 - \epsilon \approx 1$)

$$\mathcal{P}_R(k) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \simeq \frac{1}{2\epsilon_V} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (3.86)$$

$$\mathcal{P}_g(k) = 2s \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (3.87)$$

$$n_s - 1 \simeq 2(\delta - 2\epsilon) \simeq 2\eta_V - 6\epsilon_V, \quad (3.88)$$

$$n_g \simeq -2\epsilon \simeq -2\epsilon_V, \quad (3.89)$$

$$r = s\epsilon \simeq s\epsilon_V. \quad (3.90)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln k} \simeq -(2\xi + 8\epsilon^2 - 10\epsilon\delta) \simeq -(2\xi_V + 24\epsilon_V^2 - 16\eta_V\epsilon_V), \quad (3.91)$$

$$\frac{dn_g}{d \ln k} \simeq -4(\epsilon^2 - \epsilon\delta) \simeq -(8\epsilon_V^2 - 4\eta_V\epsilon_V), \quad (3.92)$$

что соответствует результатам, представленным в работе [205].

Также отметим, что в случае использования кинетического приближения для анализа инфляционных моделей, рассмотренного в разделе § 2.2, расчет параметров космологических возмущений также производится с помощью соотношений (3.79)–(3.85) или (3.86)–(3.92) поскольку, в данном приближении, условия $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ выполняются для любых моделей.

Таким образом, процедура верификации моделей ранней Вселенной по наблюдательным данным заключается в сопоставлении значений спектральных параметров космологических возмущений, полученных из выражений (3.79)–(3.83), с наблюдательными ограничениями на эти параметры, полученные из наблюдений анизотропии реликтового излучения.

Таблица 4 — Параметры медленного скатывания и число e -фолдов для некоторых моделей инфляции

$H = H(t), \quad a = a(t)$	$\epsilon = \epsilon(t), \quad \delta = \delta(t)$	$N = N(t), \quad t = t(N)$
$H(t) = \frac{B}{t}$ $a(t) = a_0 t^B$	$\epsilon = \frac{1}{B}$ $\delta = \frac{1}{B}$	$N(t) = B \ln(t)$ $t = \exp\left(\frac{N}{B}\right)$
$H(t) = -At + B$ $a(t) = a_0 \exp\left(\mu_1 - \frac{B}{3}t^2\right)$	$\epsilon = \frac{3}{2Bt^2}$ $\delta = 0$	$N(t) = \mu_1 - \frac{B}{3}t^2$ $t^2 = \frac{3}{B}(\mu_1 - N)$
$H(t) = B \exp(-At)$ $a(t) = a_0 \exp\left(\frac{\mu_2}{A} - \frac{B}{A}e^{-At}\right)$	$\epsilon = \frac{A}{B} \exp(At)$ $\delta = \frac{A}{2B} \exp(At)$	$N(t) = \frac{\mu_2}{A} - \frac{B}{A} \exp(-At)$ $\exp(At) = \frac{B}{\mu_2 - AN}$
$H(t) = -\frac{AB}{3} \operatorname{tg}(At)$ $a(t) = a_0 \cos^{B/3}(At)$	$\epsilon = \frac{3}{B \sin^2(At)}$ $\delta = \frac{3}{B}$	$N(t) = \frac{B}{3} \ln(\cos(At))$ $\cos(At) = \exp\left(\frac{3N}{B}\right)$
$H(t) = \frac{AB}{3} \operatorname{th}(At)$ $a(t) = a_0 \operatorname{ch}^{B/3}(At)$	$\epsilon = \frac{3}{B \operatorname{sh}^2(At)}$ $\delta = \frac{3}{B}$	$N(t) = \frac{B}{3} \ln(\operatorname{ch}(At))$ $\operatorname{ch}(At) = \exp\left(\frac{3N}{B}\right)$
$H(t) = AB \operatorname{cth}(2Bt)$ $a(t) = a_0 \operatorname{sh}^{A/2}(2Bt)$	$\epsilon = \frac{2}{A \operatorname{ch}^2(2Bt)}$ $\delta = \frac{2}{A}$	$N(t) = \frac{A}{2} \ln(\operatorname{sh}(2Bt))$ $\operatorname{sh}(2Bt) = \exp\left(\frac{2N}{A}\right)$
$H(t) = A \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{-\frac{B}{B+4}}$ $a(t) = a_0 \exp\left(\frac{A(B+4)t}{4} \left[\frac{B+4}{6AB} t \right]^{-\frac{B}{B+4}} \right)$	$\epsilon = \frac{B \left[\frac{B+4}{6AB} t \right]^{-\frac{B}{B+4}}}{A(B+4)t}$ $\delta = \frac{(B+2) \left[\frac{B+4}{6AB} t \right]^{-\frac{B}{B+4}}}{A(B+4)t}$	$N(t) = \frac{A(B+4)t}{4} \left[\frac{B+4}{6AB} t \right]^{-\frac{B}{B+4}}$ $t = \frac{4N}{A(B+4)} \left(\frac{2N}{3A^2B} \right)^{B/4}$

Приведем наблюдательные ограничения на значения параметров космологических возмущений по данным спутника PLANCK [27]

$$\mathcal{P}_S = 2.1 \times 10^{-9}, \quad (3.93)$$

$$n_s = 0.9663 \pm 0.0041, \quad (3.94)$$

$$r < 0.1 \quad (\text{Planck 2018}), \quad (3.95)$$

$$r < 0.065 \quad (\text{Planck 2018/BICEP2/Keck-Array}). \quad (3.96)$$

В таблице 4 представлены параметры медленного скатывания для различных моделей космологической инфляции, на основе которых, из выражений (3.79)–(3.85), рассчитываются параметры космологических возмущений.

Также, учитывая связь между космическим временем t и числом e -фолдов, можно рассчитывать спектральные параметры космологических возмущений в терминах космического времени, равного времени пересечения радиуса Хаббла $t = t_H$, или в терминах числа e -фолдов N ($N = 50 - 60$). Также время пересечения радиуса Хаббла можно получить из условия $N = 50 - 60$.

3.4 Параметры космологических возмущений в терминах конформного времени

Теперь, на основе выражений (3.79)–(3.83), рассмотрим параметры космологических возмущений на пересечении радиуса Хаббла ($k = aH = \mathcal{H}$) в терминах конформного времени, используя следующие соотношения

$$d\eta = \frac{dt}{a}, \mathcal{H} = \frac{a'}{a}, H = \frac{\mathcal{H}}{a}, \dot{H} = \frac{\mathcal{H}'}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}. \quad (3.97)$$

В результате, из соотношений (3.79)–(3.85) получим:

1. спектры мощности скалярных и тензорных возмущений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = -\frac{\mathcal{H}^4 a^2}{8(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)} = \frac{A^4}{32\pi^2 A^3 (3A'^2 - 2A''A)}, \quad (3.98)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{\mathcal{H}^2}{2\pi^2 a^2} = \frac{A'^2}{8\pi^2 A^3}; \quad (3.99)$$

2. наклоны спектров

$$\begin{aligned} n_S(k) - 1 &= \frac{a^2}{\mathcal{H}'} \left[4 \left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2} \right) - \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2} \left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2} \right)' \right] \\ &= \frac{9A'^4 + 8A''^2 A^2 - 14A'' A'^2 A - 2A''' A' A^2}{(2A'' A - 3A'^2)(A'' A - A'^2)}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = \frac{2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} = \frac{2A'' A - 3A'^2}{A'' A - A'^2}; \quad (3.101)$$

3. тензорно-скалярное отношение

$$r = -4 \left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}^2} \right) = \frac{12A'^2 - 8A'' A}{A'^2}, \quad (3.102)$$

в терминах конформного множителя A на пересечении радиуса Хаббла $\eta = \eta_H$.

Рассматривая конформный множитель в виде $A(\eta) = A_0 e^{\beta(\eta)}$, получим

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\beta'^4}{32\pi^2 A_0 e^{\beta} (\beta'^2 - 2\beta'')}, \quad (3.103)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{\beta'^2}{8\pi^2 A_0 e^{\beta}}, \quad (3.104)$$

$$n_S(k) - 1 = \frac{\beta'^4 + 8\beta''^2 - 4\beta'' \beta'^2 - 2\beta''' \beta'}{\beta'' (2\beta'' - \beta'^2)}, \quad (3.105)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = \frac{2\beta'' - \beta'^2}{\beta''}, \quad (3.106)$$

$$r = \frac{4\beta'^2 - 8\beta''}{\beta'^2}. \quad (3.107)$$

Конформное время, соответствующее пересечению радиуса Хаббла η_H для возмущений с заданной длиной волны (или волновым числом) определяются из условия $k = \mathcal{H}$, что эквивалентно соотношению $2k = \beta'(\eta)|_{\eta=\eta_H}$ для заданного конформного множителя.

3.4.1 Степенное расширение

На основе решений, полученных в разделе § 2.5.1, определим параметры космологических возмущений для случая степенной инфляции в терминах конформного времени

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{m^3(\alpha\eta_H)^{-m}}{32\pi^2 A_0 \eta_H^2 (m+2)}, \quad (3.108)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{m^2(\alpha\eta_H)^{-m}}{8\pi^2 A_0 \eta_H^2}, \quad (3.109)$$

$$n_S(k) - 1 = m + 2, \quad (3.110)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = m + 2, \quad (3.111)$$

$$r = \frac{4(m+2)}{m}, \quad (3.112)$$

где конформное время пересечения радиуса Хаббла $\eta_H = m/2k$.

3.4.2 Обобщенное экспоненциальное расширение

Для случая обобщенного экспоненциального расширения, рассмотренного в разделе § 2.5.2, получим

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{(c_1\eta_H + c_2)^4}{32\pi^2 A_0 (c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1)} e^{-\left(\frac{c_1}{2}\eta_H^2 + c_2\eta_H + c_3\right)}, \quad (3.113)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{(c_1\eta_H + c_2)^2}{8\pi^2 A_0} e^{-\left(\frac{c_1}{2}\eta_H^2 + c_2\eta_H + c_3\right)}, \quad (3.114)$$

$$n_S(k) - 1 = \frac{4c_1^3\eta_H^2 + 8c_1^2c_2\eta_H + 4c_1c_2^2}{c_1(c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1)} - \frac{4c_1^3c_2\eta_H^3 + 6c_1^2c_2^2\eta_H^2 + 4c_1c_2^3\eta_H + c_1^4\eta_H^4 + c_2^4 + 8c_1^2}{c_1(c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1)}, \quad (3.115)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = -c_1\eta_H^2 - 2c_2\eta_H - \frac{c_2^2}{c_1} + 2, \quad (3.116)$$

$$r = 4 \frac{c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1}{(c_1\eta_H + c_2)^2}, \quad (3.117)$$

где $\eta_H = \frac{c_2 - 2k}{c_1}$.

Для функции $\beta(\eta) = \frac{b_1}{12}\eta^4 + b_3$ параметры космологических возмущений следующие

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{b_1^3\eta_H^{10}}{288\pi^2 A_0 (b_1\eta_H^4 - 18)} e^{-\left(\frac{b_1}{12}\eta_H^4 + b_3\right)}, \quad (3.118)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{b_1^2 \eta_H^6}{72\pi^2 A_0} e^{-(\frac{b_1}{12} \eta_H^4 + b_3)}, \quad (3.119)$$

$$n_S(k) - 1 = \frac{540 - 38b_1 \eta_H^4 + b_1^2 \eta_H^8}{9(b_1 \eta_H^4 - 18)}, \quad (3.120)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = 2 - \frac{b_1}{9} \eta_H^4, \quad (3.121)$$

$$r = 4 \frac{b_1 \eta_H^4 - 18}{b_1 \eta_H^4}, \quad (3.122)$$

где $\eta_H = (6k/b_1)^{1/3}$.

Верификация моделей ранней Вселенной подразумевает сопоставление полученных параметров космологических возмущений с наблюдательными данными (3.93)–(3.96), что означает согласованный выбор постоянных параметров. Вместо этого рассмотрим более эффективный метод верификации, в рамках которого такое сопоставление производится независимо от выбора постоянных параметров модели.

3.5 Диаграмма тензорно-скалярное отношение – спектральный индекс скалярных возмущений

При анализе космологических моделей на уровне возмущений поля и метрики необходимо учитывать соответствие параметров (3.79)–(3.85) наблюдательным ограничениям (3.93)–(3.96). Этой цели можно достигнуть за счет выбора свободных параметров моделей, значение которых необходимо согласовать как для оценки числа е-фолдов, так и при вычислении параметров космологических возмущений.

Простым методом верификации моделей космологической инфляции, который позволяет определить соответствие модели ранней Вселенной наблюдениям независимо от выбора свободных параметров является использование диаграммы зависимости тензорно-скалярного отношения от наклона спектра скалярных возмущений $r = r(n_S)$.

Исходя из соотношений, следующих из полученных ранее выражений (3.81)–(3.82)

$$n_S - 1 = 2 \left(\frac{\delta(\epsilon) - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \right), \quad \epsilon = \frac{r}{4s}, \quad (3.123)$$

получим

$$n_S - 1 = 2 \left(\frac{\delta(r) - 2\epsilon(r)}{1 - \epsilon(r)} \right) = 2 \left(\frac{\delta(r) - \frac{r}{2s}}{1 - \frac{r}{4s}} \right), \quad (3.124)$$

где зависимость $\delta = \delta(\epsilon)$ различна для разных моделей инфляции.

Далее, из уравнения (3.124) получим выражение тензорно-скалярного отношения как функции наклона спектра скалярных возмущений $r = r(n_S)$.

Комбинированные результаты измерений PLANCK (BICEP2/Keck Array) анизотропии реликтового излучения и дополнительных наблюдений по барионным акустическим осцилляциям, гравитационному линзированию и измерению значения параметра Хаббла H_0 (в настоящее время) на диаграмме $r = r(n_s)$ представляются в виде разрешенных областей, соответствующим доверительным вероятностям 68% и 95% для случая гауссова спектра космологических возмущений в моделях с одним скалярным полем (см. [27; 83]), которым соответствуют ограничения на значения спектрального индекса скалярных возмущений и тензорно-скалярного отношения [83]

$$n_s = 0.9663 \pm 0.0041, \quad (3.125)$$

$$r_{0.002} < 0.1 \quad (\text{Planck 2018}), \quad (3.126)$$

$$r_{0.002} < 0.065 \quad (\text{Planck 2018/BICEP2/Keck-Array}). \quad (3.127)$$

Данные значения параметров космологических возмущений представлены для масштаба $k = 0.002 \text{ Мпк}^{-1}$ и условия $n_T = -\frac{r}{8}$, которое следует из соотношений (3.88)–(3.90) с параметром $s = 4$. Очевидно, для случая $s = 1$ это соотношение нарушается $n_T \neq -\frac{r}{8}$.

Наблюдательные ограничения на модели с условием $n_T \neq -\frac{r}{8}$ также рассматривались при анализе результатов PLANCK [211] на основе диаграмм (r_{k_1}, r_{k_2}, n_T) , соответствующих двум масштабам $k_1 = 0.002 \text{ Мпк}^{-1}$ и $k_2 = 0.02 \text{ Мпк}^{-1}$, которые накладывались на наблюдательные данные, дополненные результатами наблюдений LIGO и VIRGO [21–23].

В результате, для моделей с нарушением условия $n_T = -\frac{r}{8}$, было получено другое ограничение на значение тензорно-скалярного отношения

$$r_{0.002} < 0.044 \quad (\text{Planck 2018/LIGO/VIRGO2016}). \quad (3.128)$$

Далее, в тексте рассматривается следующее обозначение $r \equiv r_{0.002}$. Также будем придерживаться принятой в большинстве работ по теории космологических возмущений нормировки $s = 4$.

Таким образом, зависимость тензорно-скалярного отношения от спектрального индекса скалярных возмущений $r = r(n_s)$ позволяет определить соответствие построенной модели наблюдательным данным. После проверки соответствия рассматриваемой теоретической модели наблюдательным ограничениям по диаграмме $r = r(n_s)$ рассчитывается значение спектра мощности скалярных возмущений на пересечении радиуса Хаббла, которое сопоставляется с (3.93).

Теперь рассмотрим процедуру верификации некоторых моделей ранней Вселенной на основе данного метода более подробно, используя ранее полученные точные космологические решения.

3.5.1 Верификация моделей со степенным потенциалом

Рассмотрим модели со степенным потенциалом и параметром Хаббла $H(\phi) = A\phi^m$, точные решения для которых были получены в разделе § 2.4.2.

Параметры медленного скатывания, в данном случае, равны

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 2m^2 [c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{2}{m-2}}, \quad (3.129)$$

$$\delta = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} = 2m(m-1) [c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{2}{m-2}}, \quad (3.130)$$

следовательно, связь между этими параметрами определяется как

$$\delta = \left(\frac{m-1}{m}\right) \epsilon. \quad (3.131)$$

Из выражений (3.81) и (3.82) получим следующую зависимость

$$r = \frac{16m(n_S - 1)}{m(n_S - 3) - 2}. \quad (3.132)$$

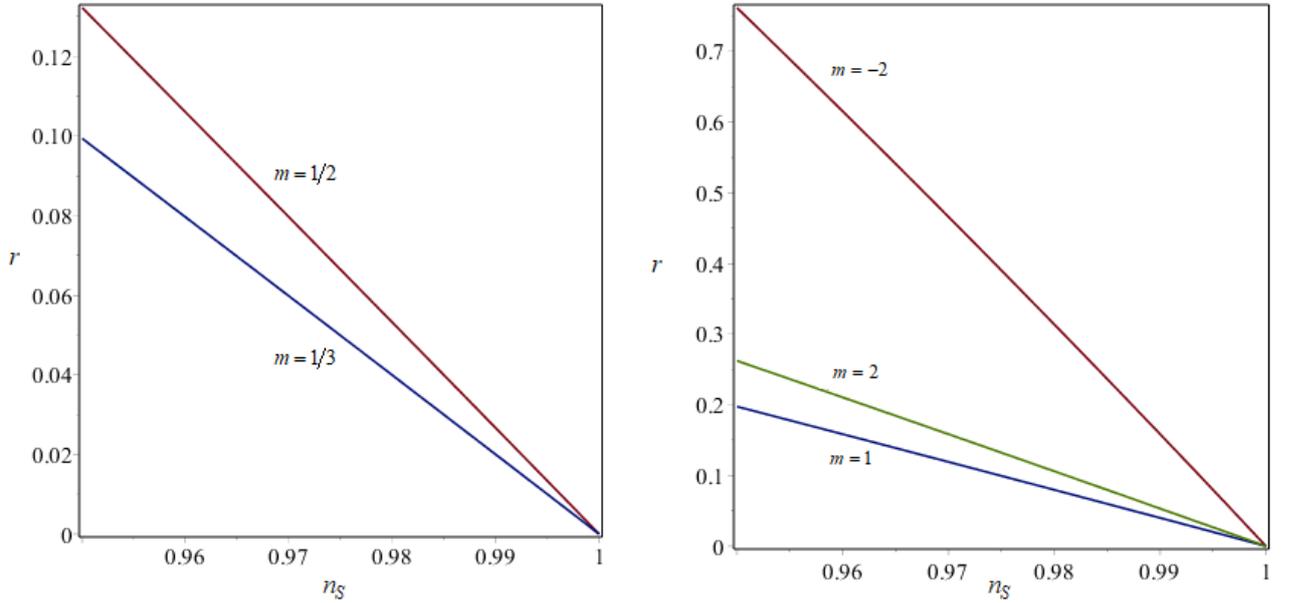


Рисунок 3.1 — Диаграммы $r = r(n_S)$ для различных значений параметра m .

На Рис. 3.1 представлены зависимости $r = r(n_S)$, построенные на основе (3.132) из которых видно, что инфляция на основе полиномиальных потенциалов скалярного поля удовлетворяет наблюдательным ограничениям (3.125)–(3.127) для значений $m = 1/3$ и $m = 1/2$.

Из зависимости числа e -фолдов от космического времени

$$N = \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) = \exp \left(-\frac{1}{4m} [c_1 + 2mA(m-2)t]^{\frac{m}{m-2}} \right), \quad (3.133)$$

получим следующее уравнение

$$c_1 + 2mA(m-2)t = -(4mN)^{1-\frac{m}{2}}. \quad (3.134)$$

Подставляя $t = t(N)$ в выражение для спектра мощности скалярных возмущений (3.79) на пересечении радиуса Хаббла, получим

$$\mathcal{P}_S(N) = 16^{\frac{2m-1}{2-m}} \left(\frac{A}{4\pi m} \right)^2 [2^{-m+2}(mN)^{1-\frac{m}{2}}]^{\frac{2(m+1)}{2-m}}, \quad \mathcal{P}_S(N=60) = 2.1 \times 10^{-9}. \quad (3.135)$$

Из этого условия найдем значение постоянного параметра $A = 10^{-5}$ для $m = 1/3$, случаю $m = 1/2$ соответствует $A = 8 \times 10^{-6}$. Произвольной постоянной c_1 соответствуют различные значения спектрального индекса скалярных возмущений, поэтому, в данном случае, его нельзя определить однозначно.

3.5.2 Верификация моделей с экспоненциальным потенциалом

Рассмотрим модели с экспоненциальным потенциалом и параметром Хаббла

$$H(\phi) = \mu_1 \exp(-\mu_2 \phi) + \mu_3, \quad (3.136)$$

точные решения для которых были получены в разделе § 2.4.3.

Вначале определим параметры медленного скатывания

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{2\mu_1^2\mu_2^2}{(2\mu_1\mu_2^2\mu_3 t + c\mu_3 + \mu_1)^2}, \quad (3.137)$$

$$\delta = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} = \frac{2\mu_1\mu_2^2}{(2\mu_1\mu_2^2\mu_3 t + c\mu_3 + \mu_1)}. \quad (3.138)$$

Для случая степенной инфляции $\mu_3 = 0$ из выражений (3.137)–(3.138) следует $\epsilon = \delta = 2\mu_2^2 = const$.

Из зависимости числа e -фолдов от космического времени

$$N = \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) = \frac{1}{2\mu_2^2} \ln(2\mu_1\mu_2^2 t + c) \quad (3.139)$$

получим обратную зависимость

$$t(N) = \frac{1}{2\mu_1\mu_2^2} \left(e^{2\mu_2^2} - c \right). \quad (3.140)$$

После подстановки зависимости (3.140) в выражение (3.79) для спектра мощности скалярных возмущений на пересечении радиуса Хаббла получим следующее условие

$$\mathcal{P}_S(N) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 = \frac{\mu_1^2}{16\pi^2\mu_2^2} \exp(-4\mu_2^2 N), \quad (3.141)$$

$$\mathcal{P}_S(N=60) = 2.1 \times 10^{-9}. \quad (3.142)$$

Очевидно, что различный выбор параметров μ_1 и μ_2 для $N = 60$ может удовлетворять этому условию.

Для случая степенной инфляции, из выражений (3.81) и (3.82) получим следующую зависимость

$$r = \frac{16(n_S - 1)}{n_S - 3}. \quad (3.143)$$

Для экспоненциально-степенной инфляции $\mu_3 \neq 0$ из выражений (3.137)–(3.138) получим следующее условие

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\mu_2} \right)^2. \quad (3.144)$$

Далее, на основе выражения

$$N = \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) = \frac{1}{2\mu_2^2} \ln(2\mu_1\mu_2^2 t + c) + \mu_3 t, \quad (3.145)$$

запишем

$$t(N) = -\frac{1}{2\mu_1\mu_2^2\mu_3} \left[c\mu_3 - \mu_1 W \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} \exp(2\mu_1\mu_2^2 N + c\mu_3\mu_1) \right) \right], \quad (3.146)$$

где W – функция Ламберта.

Подставляя выражение (3.146) в (3.79), имеем условие

$$\mathcal{P}_S(N) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 = \frac{\mu_3^2}{16\pi^2\mu_2^2} \frac{\left[W \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} \exp(2N\mu_1\mu_2^2 + c\mu_3\mu_1) \right) + 1 \right]^4}{\left[W \left(\frac{\mu_3}{\mu_1} \exp(2N\mu_1\mu_2^2 + c\mu_3\mu_1) \right) \right]^2}, \quad (3.147)$$

$$\mathcal{P}_S(N = 60) = 2.1 \times 10^{-9}. \quad (3.148)$$

Данное условие выполняется для различных значений параметров c , μ_1 , μ_2 , μ_3 при $N = 60$.

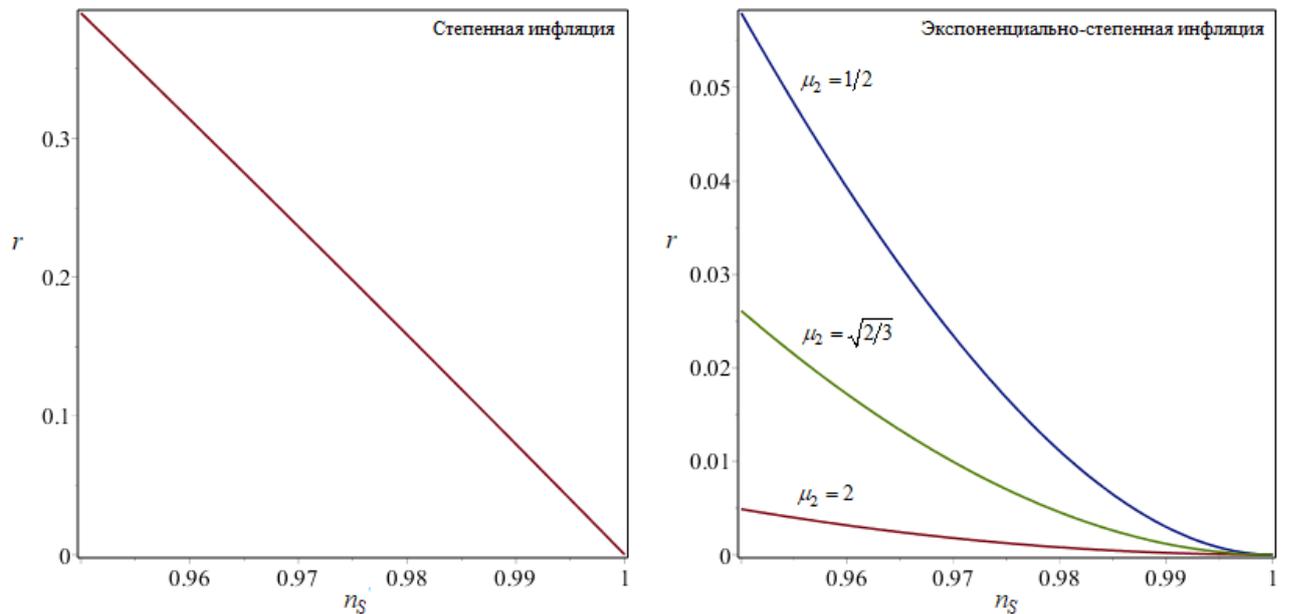


Рисунок 3.2 — Диаграммы $r = r(n_S)$ для степенной и экспоненциально-степенной инфляции.

Далее, из выражений (3.81) и (3.82) получим

$$r = \frac{16}{n_S - 3} \left[n_S - 1 \mp \frac{\sqrt{2}\mu_2 \left(-\sqrt{2}\mu_2 + \sqrt{2\mu_2^2 + 4n_S^2 - 16n_S + 12} \right)}{2(n_S - 3)} \right], \quad (3.149)$$

и будем рассматривать решение с верхним (отрицательным) знаком.

На Рис. 3.2 представлены зависимости $r = r(n_S)$, построенные на основе выражений (3.143) и (3.149) из которых видно, что экспоненциально-степенная инфляция удовлетворяет наблюдательным ограничениям (3.125)–(3.127), в отличие от степенной инфляции.

3.6 Влияние множителя $(1 - \epsilon)^{-1}$ на параметры космологических возмущений

Теперь рассмотрим влияние множителя $(1 - \epsilon)^{-1}$ на расхождение между оценками параметров космологических возмущений, полученных в приближении медленного скатывания и на основе точных космологических решений с убывающими в течение инфляции параметрами ϵ и δ до значений $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ на пересечении радиуса Хаббла.

Для оценки его влияния на параметры космологических возмущений запишем отношения спектров мощности скалярных и тензорных возмущений на основе точных решений и приближения медленного скатывания, которые не зависят от нормировки тензора гравитационных волн

$$\frac{(\mathcal{P}_S)_{ex}}{(\mathcal{P}_S)_{sr}} = \left(\frac{3 - \delta}{3 - \epsilon} \right)^2 = \frac{1}{(1 + \Delta_\zeta)^2}, \quad \frac{(\mathcal{P}_T)_{ex}}{(\mathcal{P}_T)_{sr}} = 1, \quad (3.150)$$

$$\frac{r_{ex}}{r_{sr}} = \left(\frac{3 - \epsilon}{3 - \delta} \right)^2 = (1 + \Delta_\zeta)^2, \quad (3.151)$$

$$\frac{(n_S - 1)_{ex}}{(n_S - 1)_{sr}} = \frac{1}{(1 + \Delta_\zeta)^2}, \quad \frac{(n_T)_{ex}}{(n_T)_{sr}} = 1, \quad (3.152)$$

где параметр

$$\Delta_\zeta = \frac{3 - \epsilon}{3 - \delta} - 1 = \frac{\delta - \epsilon}{3 - \delta}, \quad (3.153)$$

назовем «параметром отклонения» характеристик космологических возмущений для приближения медленного скатывания.

В таблице 5 представлены выражения параметра отклонения Δ_ζ для ранее рассмотренных моделей космологической инфляции.

Отметим, что для $\Delta_\zeta > 0$ тензорно-скалярное отношение $r_{ex} > r_{sr}$, $r_{ex} < r_{sr}$ в случае $\Delta_\zeta < 0$ и $r_{ex} = r_{sr}$ для $\Delta_\zeta = 0$. Значение Δ_ζ определяется из параметров модели и времени пересечения радиуса Хаббла $t = t_H$.

Таблица 5 — Модели космологической инфляции и расхождение по параметрам космологических возмущений

Параметр Хаббла	Параметр отклонения Δ_ζ
$H(t) = \frac{B}{t}$	$\Delta_\zeta = 0$
$H(t) = -At + B$	$\Delta_\zeta = -\frac{1}{2Bt^2}$
$H(t) = B \exp(-At)$	$\Delta_\zeta = -\frac{Ae^{At}}{6B - Ae^{At}}$
$H(t) = -\frac{AB}{3} \operatorname{tg}(At)$	$\Delta_\zeta = -\frac{\operatorname{ctg}^2(At)}{B-1}$
$H(t) = \frac{AB}{3} \operatorname{th}(At)$	$\Delta_\zeta = -\frac{2 - \operatorname{ch}^2(At)}{(B-1) \operatorname{sh}^2(At)}$
$H(t) = A \left[\frac{(B+4)t}{6AB} \right]^{-\frac{B}{B+4}}$	$\Delta_\zeta = \frac{2 \times 6^{\frac{B}{B+4}}}{3(A+4t) \left(\frac{(B+4)t}{AB} \right)^{\frac{B}{B+4}} - (B+2) \times 6^{\frac{B}{B+4}}}$

В случае степенной инфляции $\epsilon = \delta$ и параметр отклонения $\Delta_\zeta = 0$ также как и расхождение по числу е-фолдов $\Delta_N = 0$, которое для степенной инфляции было получено ранее в разделе § 2.9.2.

Таким образом, расхождение между параметрами космологических возмущений в приближении медленного скатывания и с учетом множителя $(1 - \epsilon)^{-1}$, в общем случае, зависит от параметров модели и времени пересечения радиуса Хаббла.

Теперь рассмотрим более наглядный пример влияния множителя $(1 - \epsilon)^{-1}$ на значение тензорно-скалярного отношения для случая моделей инфляции с полиномиальным потенциалом

Из соотношений (3.79)–(3.81) с учетом $(1 - \epsilon)^{-1}$ получим зависимость

$$r = \frac{4sm(n_S - 1)}{m(n_S - 3) - 2}. \quad (3.154)$$

В случае приближения медленного скатывания, пренебрегая множителем $(1 - \epsilon)^{-1} \approx 1$, из выражений (3.86)–(3.90) получим

$$r = -\frac{2sm(n_S - 1)}{m + 1}. \quad (3.155)$$

Для случая «промежуточной» инфляции с параметром $m = -1$ в первом случае из выражения (3.154) получим $r = 4s$, во втором случае из выражения (3.155) следует $r \rightarrow \infty$. Таким образом, учет множителя $(1 - \epsilon)^{-1}$, в данном случае, устраняет расходимость при определении значения тензорно-скалярного отношения.

Отметим, что влияние фактора $(1 - \epsilon)^{-1}$ (в терминах параметра Хаббла H и его производных по космическому времени \dot{H} , \ddot{H}) при вычислении параметров космологических возмущений на пересечении радиуса Хаббла рассматривалось в работе Червона и др. [212], что получило дальнейшее развитие в работах [213–216].

3.7 Преобразование параметров космологических возмущений

Теперь рассмотрим изменение параметров космологических возмущений на основе преобразования параметра Хаббла $\bar{H} = nH$. Параметры медленного скатывания, в таком случае, преобразуются следующим образом

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{n}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{n}. \quad (3.156)$$

На основе выражений (3.79)–(3.83) запишем

$$\frac{\bar{\mathcal{P}}_S}{\mathcal{P}_S} = n^3, \quad \frac{\bar{\mathcal{P}}_T}{\mathcal{P}_T} = n^2, \quad \frac{\bar{r}}{r} = \frac{1}{n}, \quad (3.157)$$

$$\frac{\bar{n}_S}{n_S} = \left[\frac{1-\epsilon}{n-\epsilon} \right] \left[\frac{n-5\epsilon+2\delta}{1-5\epsilon+2\delta} \right], \quad \frac{\bar{n}_T}{n_T} = \frac{1-\epsilon}{n-\epsilon}, \quad (3.158)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_S = \frac{n^3}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad \bar{\mathcal{P}}_T = 2sn^2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (3.159)$$

$$\bar{n}_S - 1 = 2 \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{n - \epsilon} \right), \quad \bar{n}_T = -\frac{2\epsilon}{n - \epsilon}, \quad \bar{r} = \frac{4s\epsilon}{n}. \quad (3.160)$$

Для случая $n = 1$ выражения (3.157)–(3.160) переходят в исходные (3.79)–(3.83). Для моделей со степенным параметром Хаббла $H(t) = At^\beta$ и следующим соотношением между параметрами медленного скатывания $\delta = \alpha\epsilon$, где $\beta = -1$ и $\alpha = 1$ соответствуют степенной инфляции с экспоненциальным потенциалом, $\beta = \frac{m}{2-m}$ и $\alpha = \left(\frac{m-1}{m}\right)$ соответствуют инфляции со степенными потенциалами (2.60), получим одинаковые зависимости $r = r(n_S)$

$$r = \frac{4s(n_S - 1)}{2\alpha + n_S - 5}, \quad \bar{r} = \frac{4s(n_S - 1)}{2\alpha + n_S - 5}. \quad (3.161)$$

В общем случае, преобразование $\bar{H} = nH$ приводит к изменению параметров космологических возмущений и зависимости $r = r(n_S)$.

В случае преобразования $\bar{H} = nH + \lambda$ параметры медленного скатывания изменяются следующим образом

$$\bar{\epsilon} = \frac{n\epsilon}{\left(n + \frac{\lambda}{H(\epsilon)}\right)^2}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\left(n + \frac{\lambda}{H(\epsilon)}\right)}, \quad (3.162)$$

и параметры космологических возмущений рассчитываются для новых параметров медленного скатывания (3.162), что позволяет преобразовать неverified модель ранней Вселенной в соответствующую наблюдательным данным.

Простым примером применения такого подхода является преобразование модели степенной инфляции в инфляцию с экспоненциально-степенным ускоренным расширением, что рассматривалось в разделе § 2.8. Очевидно, что данный метод позволяет преобразовать и другие модели, изначально не соответствующие наблюдательным ограничениям.

Поскольку преобразованию параметра Хаббла $\dot{H} = nH + \lambda$ соответствует масштабный фактор вида

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}, \quad (3.163)$$

назовем такие модели *обобщенной экспоненциально-степенной инфляцией*, в рамках которой, соответствие теоретической модели наблюдательным ограничениям достигается за счет выбора параметров n и λ .

Предложенный подход имеет два ограничения:

1. исходный масштабный фактор $a(t)$ не нарушает закон ускоренного расширения (3.163) ;
2. потенциал скалярного поля $V(\phi)$, соответствующий масштабному фактору (3.163), подразумевает эволюцию скалярного поля, согласно инфляционной парадигме.

Также отметим, что исходный масштабный фактор $a(t)$ может не соответствовать условию ускоренного расширения $\ddot{a} > 0$, но результирующий масштабный фактор $\bar{a}(t)$ подразумевает комбинацию решения де Ситтера (для $n = 0$) и расширения по степенному закону (для случая $\lambda = 0$), что соответствует исходной задаче построения инфляционных моделей.

3.8 Постинфляционная эволюция космологических возмущений

Рассмотрим последовательность событий при переходе от инфляционной стадии к стадии преобладания излучения и вещества.

Инфляционная стадия завершается распадом скалярного поля и образованием частиц с последующим нуклеосинтезом и дальнейшей эволюцией согласно стандартному сценарию. При этом космологические возмущения различных длин волн (с различным волновым числом k) в течение нескольких e -фолдов после выхода за горизонт становятся классическими величинами. Это время обозначим как t_* .

При уходе за горизонт космологические возмущения остаются «вмороженными» в гравитационный фон и не меняют своей амплитуды в сопутствующей системе координат. При вхождении под горизонт (в эпоху преобладания излучения), обозначим это время t_{pr} , амплитуда возмущений эволюционирует известным образом. Считается, что теория космологических возмущений применима в начальную эпоху, которая начинается до вхождения интересующих нас космологических масштабов под горизонт. Начальная эпоха начинается гораздо позже нуклеосинтеза, поэтому материальные составляющие вселенной, за

исключением небарионной темной материи, известны. Теоретически установлено, каким образом эволюционируют возмущения всех материальных компонент во Вселенной после начальной эпохи, если известна плотность энергии каждой из составляющих в это время. Начальный спектр возмущений можно получить посредством функции переноса из вакуумных флуктуаций в момент времени t_* [217; 218].

Возмущение любой из составляющих вычисляется через возмущение кривизны \mathcal{R}_k при помощи функции переноса

$$g_k(t) = T_g(t, k) \mathcal{R}_k, \quad (3.164)$$

где $\mathcal{R}_k(t)$ определяется в момент времени t_* как

$$\mathcal{R}_k = - \left[\frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k \right]_{t=t_*}. \quad (3.165)$$

Рассматриваемое уточнение параметров космологических возмущений связано именно с вычислением возмущений кривизны на основе точных решений уравнений Эйнштейна (в нулевом приближении) без использования режима медленного скатывания. Так как точные выражения получены для космологических параметров при выходе за горизонт, для сопоставления с наблюдательными данными требуется выполнить перерасчет космологических параметров на современную эпоху. Для этого рассмотрим постинфляционную эволюцию космологических возмущений и найдем поправки на космологические параметры.

Воспользуемся стандартным методом пересчета космологических возмущений на фридмановские эпохи [76; 77; 205; 206].

Известно, что в течение стадии преобладания излучения $a \sim t^n$ при $n = 1/2$ и стадии преобладания вещества в случае $n = 2/3$ гравитационные возмущения (гравитационный потенциал Φ_k) преобразуются следующим образом:

1. $\Phi_k = \frac{2}{3} \mathcal{R}_k$ на стадии преобладания излучения;
2. $\Phi_k = \frac{3}{5} \mathcal{R}_k$ на стадии преобладания вещества.

Из этих соотношений заключаем, что эволюция возмущений после вхождения под горизонт сводится просто к изменению их амплитуды.

Таким образом, спектр мощности гравитационных возмущений на стадии преобладания материи определяется через спектр возмущений кривизны

$$\mathcal{P}_\Phi(MD) = \frac{9}{25} \mathcal{P}_\mathcal{R}. \quad (3.166)$$

Это, в свою очередь, позволяет определить контраст плотности и спектр мощности скалярных возмущений

$$\delta_k = \frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 T_g(t, k) \Phi_k, \quad (3.167)$$

$$\mathcal{P}_\delta(k,t) = \frac{4}{25} \left(\frac{k}{aH} \right)^4 T_g(t,k)^2 \mathcal{P}_\mathcal{R}, \quad (3.168)$$

которые можно сравнить с наблюдательными данными.

В случае произвольных длин волн (или частот) возмущений, функция переноса T_g может быть найдена численно. Значение функции переноса определяется из соотношения между темной материей, барионным веществом и излучением в эпоху наблюдения с учетом закона ускоренного расширения [217; 218].

3.9 Реликтовые гравитационные волны

В качестве дополнительного инструмента верификации космологических моделей рассмотрим возможность непосредственного детектирования высокочастотных реликтовых гравитационных волн. Определение характеристик реликтовых гравитационных волн исключительно важно для определения параметров моделей ранней Вселенной. Также, прямое детектирование позволит точно определить амплитуду тензорных возмущений, что приводит к однозначной оценке параметра s . Дополнительно, регистрация реликтовых гравитационных волн усиливает позиции инфляционной парадигмы по сравнению с альтернативными сценариями, например, моделями «генезиса» и моделями с отскоком от сингулярности, в которых космологические гравитационные волны отсутствуют [28].

В качестве основной наблюдательной характеристики реликтовых гравитационных волн рассмотрим плотность энергии, которая обычно определяется безразмерной величиной [219]

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d \ln f}, \quad (3.169)$$

где f – линейная частота, $\rho_c = 3H_q^2$ – критическая плотность энергии, H_q – значение параметра Хаббла в современную эпоху, $\rho_{GW} = \frac{1}{4} \langle \dot{h}_{ab} \dot{h}^{ab} \rangle_\lambda$ – плотность энергии, полученная из усреднения производных по времени тензора гравитационных волн h_{ab} по всем длинам волн λ . В дальнейшем, под плотностью энергии мы будем подразумевать параметр Ω_{GW} .

Также плотность энергии реликтовых гравитационных волн можно представить в терминах спектра мощности [219]

$$\Omega_{GW}(k) = \frac{k^2}{12H_q^2} \mathcal{P}_T(k). \quad (3.170)$$

Далее, определим амплитуду реликтовых гравитационных волн в выбранной системе единиц ($8\pi G = c = 1$) следующим образом [220]

$$h_{GW}^2 = \frac{1}{4\pi^2} H_{in}, \quad (3.171)$$

где H_{in} – значение параметра Хаббла на завершении стадии инфляции, и запишем выражение спектра мощности для моделей инфляции с учетом кинетической энергии скалярного поля, которые подразумевают дополнительную стадию преобладания кинетической энергии поля, спектральная плотность энергии гравитационных волн для которых записывается как [220]

$$\Omega_{GW}^{MD}(f) = \frac{3}{8\pi^2} h_{GW}^2 \Omega_{mq} \left(\frac{f_q}{f} \right), \quad f_q \leq f < f_{MD}, \quad (3.172)$$

$$\Omega_{GW}^{RD}(f) = \frac{1}{6\pi} h_{GW}^2 \Omega_{rq}, \quad f_{MD} \leq f < f_{RD}, \quad (3.173)$$

$$\Omega_{GW}^{kin}(f) = \frac{3}{8\pi^2} h_{GW}^2 \Omega_{mq} \left(\frac{f}{f_{RD}} \right), \quad f_{RD} \leq f < f_{kin}, \quad (3.174)$$

где f_q , f_{kin} , f_{RD} и f_{MD} – частоты гравитационных волн на каждой из стадий эволюции Вселенной

$$f_q = \frac{1}{2} H_q, \quad (3.175)$$

$$f_{MD} = \frac{3}{2\pi} f_q \left(\frac{\Omega_{mq}}{\Omega_{rq}} \right)^{1/2}, \quad (3.176)$$

$$f_{RD} = \frac{1}{4} f_q \left(\frac{\Omega_{rq}}{\Omega_{mq}} \right)^{1/2} \frac{T_{rh}}{T_{MD}}, \quad (3.177)$$

$$f_{kin} = H_{kin} \left(\frac{T_q}{T_{rh}} \right) \left(\frac{H_{rh}}{H_{kin}} \right)^{1/3}, \quad (3.178)$$

где $H_q = 66.97 \pm 0.9 \text{ км} \times \text{с}^{-1} \times \text{Пк}^{-1}$, $\Omega_{mq} = 0.308 \pm 0.012$ и $\Omega_{rq} = (9.230 \pm 0.022) \times 10^{-5}$ – значения параметра Хаббла, плотности материи и излучения в настоящее время. Значение температуры повторного разогрева оценивается $T_{rh} \sim 10^{14}$ ГэВ [27].

Частота и плотность энергии реликтовых гравитационных волн ограничивается следующими условиями [219]

$$T_* = 5.85 \cdot 10^6 \left(\frac{f}{\Gamma_{\text{Ц}}} \right) \left(\frac{g_*}{106.75} \right)^{-1/6} \text{ ГэВ} \quad (3.179)$$

$$f = 1.71 \cdot 10^{-7} \left(\frac{T_*}{\text{ГэВ}} \right) \left(\frac{g_*}{106.75} \right)^{1/6} \Gamma_{\text{Ц}}, \quad (3.180)$$

где g_* – эффективное число степеней свободы (в Стандартной модели $g_* = 106,75$).

Обычным методом косвенного детектирования реликтовых гравитационных волн является оценка их влияния на анизотропию и поляризацию реликтового излучения, например, в наблюдениях спутника PLANCK [27] или в проекте ВИСЕР2 [221].

В настоящее время, наиболее продуктивным методом прямого детектирования гравитационных волн является использование интерферометров в качестве детекторов, который был предложен в 1962 г. в статье Герценштейна и Пустовойта [222]. Этот принцип широко используется в современных лазерных интерференционных гравитационных антеннах, основным элементом которых является интерферометр Фабри-Перо.

После создания первого [223] лазерного интерферометра для детектирования гравитационных волн начались систематические работы по созданию и совершенствованию такого рода приборов в различных лабораториях мира, причем большинство имеющихся и проектируемых в настоящее время детекторов гравитационного излучения предназначены для обнаружения низкочастотных гравитационных волн (см., например, [224–226]). С 2016 года, в проектах LIGO и VIRGO [21–23] были непосредственно обнаружены гравитационные волны от слияния черных дыр и нейтронных звезд.

Также, в качестве наиболее перспективного проекта по непосредственному детектированию гравитационных волн, следует отметить работы по созданию космического интерферометра на гелиостационарной орбите, у которого расстояние между зеркалами составит около 1 миллиона километров. Этот проект имеет название LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [227]. Реализация проекта LISA намечена на 2029 год.

Одновременно с этим рассматриваются возможности обнаружения высокочастотных гравитационных волн с помощью детекторов, повышение чувствительности которых связано с различными физическими эффектами. На данный момент, действует высокочастотный детектор гравитационных волн, который был создан в университете Бирмингема, Великобритания [228] (чувствительность 100 МГц). Принцип работы этого детектора основан на обнаружении вращения вектора поляризации электромагнитной волны в поле гравитационной волны. Также, планируется создание детекторов ГВ (чувствительность более 100 МГц) в Японии на основе интерферометров Фабри-Перро [229].

Одним из перспективных методов повышения чувствительности гравитационных антенн в высокочастотной области спектра является использование явления низкочастотного оптического резонанса (LOR), что отличает данный подход от других проектов по детектированию гравитационных волн. Наличие данного эффекта в интерферометрах Фабри-Перро впервые рассматривалось в работах Гладышева и Морозова [230–232].

В работе [233] показано, что минимально обнаружимую спектральную плотность флуктуаций метрики пространства-времени при использовании низкочастотного оптического резонанса в интерферометре Фабри-Перро можно оценить по формуле

$$G_h(f) > \sqrt{\frac{2\pi\kappa}{T\Delta} \frac{2\pi\hbar f^{3/2}}{k_e W_0}}, \quad (3.181)$$

где κ – фазовый сдвиг, характеризующий настройку интерферометра, T – период времени усреднения спектральной плотности, Δ – потери за один цикл переотражений, \hbar – постоянная Планка, k_e – волновое число, W_0 – мощность падающего на интерферометр Фабри-Перро монохроматического лазерного излучения, f – частота гравитационной волны.

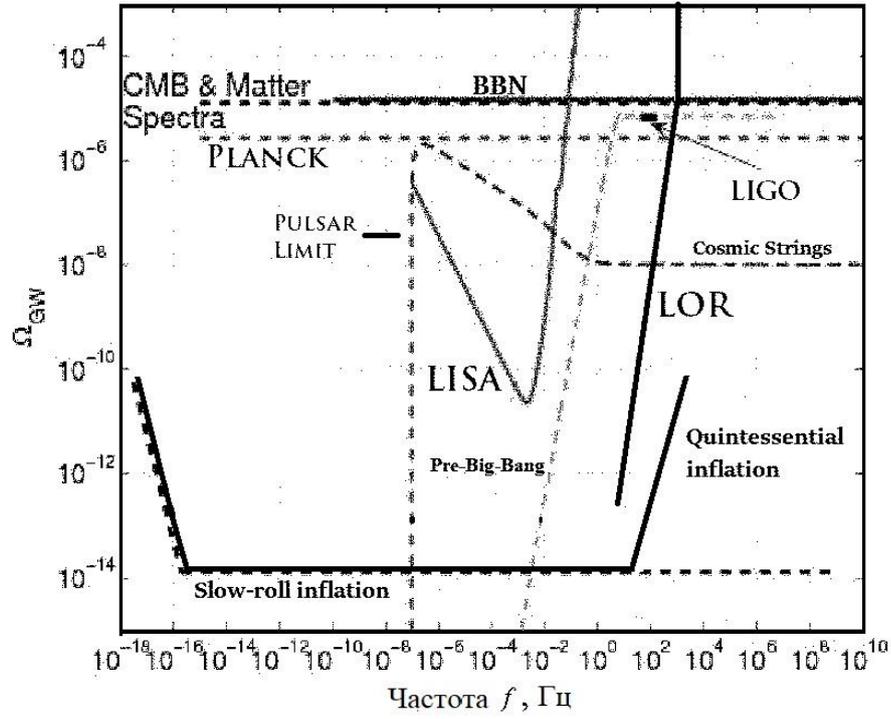


Рисунок 3.3 — Спектры гравитационных волн различного происхождения и чувствительность некоторых экспериментов. Рисунок взят из работ [234; 235].

Для перехода к величине плотности энергии гравитационных волн $\Omega_{GW}(f)$ можно воспользоваться формулой [233]

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{4\pi^2}{3H_q^2} f^3 G_h(f), \quad (3.182)$$

где H_q – параметр Хаббла в эпоху наблюдения. Подстановка формулы (3.181) в выражение (3.182) дает оценку для минимальной плотности энергии гравитационных волн, которые могут быть обнаружены с применением низкочастотного оптического резонанса

$$\Omega_{GW}(f) > \sqrt{\frac{2\pi\kappa}{T\Delta} \frac{8\pi^3 \hbar f^{9/2}}{3H_q^2 k_e W_0}}. \quad (3.183)$$

На Рис. 3.3 приведены графики плотности энергии гравитационных волн и чувствительность различных экспериментов [236]. Штриховой линией внизу обозначен спектр мощности для случая приближения медленного скатывания, в случае которого высокочастотная часть спектра отсутствует. Из рисунка видно, что теоретическая оценка чувствительности эксперимента LOR [233] соответствует возможности обнаружения высокочастотных реликтовых гравитационных волн.

Таким образом, рассмотренный экспериментальный метод является достаточно перспективным в контексте верификации космологических моделей на основе непосредственного детектирования тензорных возмущений, появившихся на ранней стадии эволюции Вселенной, согласно инфляционной парадигме.

Глава 4. Методы обобщения космологических моделей со скалярным полем

Теперь рассмотрим некоторые обобщения предложенных ранее методов анализа базовой модели на случай ненулевой кривизны Вселенной на стадии инфляции и на случай присутствия дополнительных материальных компонент на дальнейших стадиях ее эволюции. Далее, в контексте данного подхода, рассмотрим модели с полем k -эссенции и киральные космологические модели, содержащие два взаимодействующих скалярных поля.

Поскольку данные модели являются более сложными с точки зрения генерирования точных космологических решений, для их анализа используем новые методы, именно, представление всех параметров космологических моделей в терминах числа e -фолдов, выбор линейного лагранжиана поля k -эссенции, конформные преобразования метрики пространства полей и другие методы.

Предложенные методы используются для приведения более сложных космологических моделей к ранее рассмотренным, то есть, в рамках данного подхода, ставится задача поиска специальных классов точных космологических решений, соответствующих базовой модели с каноническим скалярным полем. Полученные таким образом точные космологические решения являются обобщенными в смысле возможности редукции как к решениям в исходной модели ранней Вселенной, так и на случай других стадий ее эволюции.

4.1 Динамика Вселенной Фридмана со скалярным и дополнительным материальным полем

Рассмотрим Вселенную Фридмана, содержащую дополнительную материальную компоненту в виде идеальной баротропной жидкости, давление p_m и плотность ρ_m которой (в выбранной системе единиц плотность равна плотности энергии) связаны уравнением состояния $p_m = w_m \rho_m$, аналогичным случаю скалярного поля $p_\phi = w_\phi \rho_\phi$.

Таким образом, для полной плотности энергии $\rho_{tot} = \rho_m + \rho_\phi$ и давления $p_{tot} = p_m + p_\phi$ такой системы, параметр состояния, соответствующий системе скалярного и дополнительного материального поля определяется следующим образом

$$w_{eff} = \frac{\rho_\phi w_\phi + \rho_m w_m}{\rho_m + \rho_\phi}. \quad (4.1)$$

Определим параметр состояния в терминах некоторой постоянной m , именно $w_m \equiv (m - 3)/3$, следовательно, различным видам материальных полей будут соответствовать различные значения параметра m :

1. $m = 0$ и $w_m = -1$ – космологическая постоянная;
2. $m = 2$ и $w_m = -1/3$ – ненулевая кривизна, которую можно рассматривать как эффективное материальное поле;
3. $m = 3$ и $w_m = 0$ – материя в виде пыли;
4. $m = 4$ и $w_m = 1/3$ – излучение;
5. $m = 5$ и $w_m = 2/3$ – идеальный газ;
6. $m = 6$ и $w_m = 1$ – предельно жесткое вещество.

Произвольные значения параметра m соответствуют экзотическим видам вещества.

В пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера эволюция плотности и давления материального поля выглядит следующим образом [177; 237]

$$\rho_m = \frac{K}{a^m}, \quad p_m = \left(\frac{m - 3}{3} \right) \frac{K}{a^m}, \quad (4.2)$$

где постоянная K определяет начальное значение плотности ρ_{0m} , с соответствующим уравнением динамики

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, запишем действие для моделей данного типа следующим образом

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (4.4)$$

где \mathcal{L}_m – лагранжиан дополнительного материального поля.

В случае, когда материальное поле рассматривается как баротропная идеальная жидкость, для действия (4.4) в плоском пространстве ФРУ получим следующие уравнения динамики [237]

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{K}{a^m}, \quad (4.5)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \left(\frac{3 - m}{3} \right) \frac{K}{a^m}, \quad (4.6)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi = 0, \quad (4.7)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, на основе системы (4.5)–(4.8) производится анализ обобщенных космологических моделей, которые приводятся к ранее рассмотренным для случая $K = 0$. Теперь рассмотрим методы построения точных решений системы уравнений (4.5)–(4.8) для различных материальных полей и случая ненулевой кривизны пространства ФРУ.

Отметим, что уравнения (4.5)–(4.8) можно использовать для анализа повторного ускоренного расширения пространственно плоской Вселенной Фридмана. В данном случае, ускорение Вселенной также связано с динамикой некоторого скалярного поля, которое называется полем «квинтэссенции».

Для этого, в решениях уравнений космологической динамики (4.5)–(4.8), полученных для произвольного значения параметра m необходимо задать $m = 3$, рассматривая барионную и холодную темную материю [238] в виде пыли в космологических масштабах, то есть $K = \rho_{m0} = \rho_{m0}(BM) + \rho_{m0}(DM)$, $\rho_m(t) = K a^{-3}(t)$, и пренебрегая влиянием излучения на динамику, поскольку плотность энергии излучения гораздо меньше плотности вещества $\Omega_r \ll \Omega_m$ или плотности темной энергии $\Omega_r \ll \Omega_\phi$ [27]. Также, для анализа уравнений космологической динамики, определим следующие постоянные $K_1 = (m - 6)K/12$ и $K_2 = -mK/6$. Для ненулевой (в общем случае) кривизны пространства ($m = 2$) постоянная $K = -3k$ и $K_1 = K_2 = k$, где $k = -1, 0, 1$ соответствует случаям открытой, плоской и закрытой Вселенной.

4.1.1 N-анализ уравнений динамики

Вначале перепишем уравнения (4.5)–(4.6) в терминах постоянных $\hat{K}_1 = K_1 a_0^{-m}$, $\hat{K}_2 = K_2 a_0^{-m}$ и масштабного фактора $\hat{a}(t) = a(t)/a_0$, нормированного на начальное значение

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H} + \frac{2\hat{K}_1}{\hat{a}^m}, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H} + \frac{\hat{K}_2}{\hat{a}^m}. \quad (4.10)$$

Отметим, что уравнения (4.9)–(4.10) полностью определяют динамику Вселенной, поскольку полевое уравнение (4.7) и уравнение динамики материального поля (4.8) являются следствием (4.9)–(4.10) [237].

В терминах параметра медленного скатывания как функции числа e -фолдов $\epsilon = \epsilon(N)$, с учетом соотношений

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{dH}{dN} \dot{N} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{dH}{dN} \right) = -\frac{d \ln H}{dN}, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2}\phi_N^2 = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi} \dot{N} \right)^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 H^2, \quad (4.12)$$

где

$$\frac{d}{dt} = H \frac{d}{dN}, \quad \phi_N = \frac{d\phi}{dN}, \quad (4.13)$$

уравнения (4.9)–(4.10) записываются следующим образом

$$H(N) = C \exp \left(- \int \epsilon(N) dN \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi(N)}{dN} \right]^2 = \epsilon(N) + \frac{\hat{K}_2}{C^2} \exp \left[-mN + 2 \int \epsilon(N) dN \right], \quad (4.15)$$

$$V(N) = C^2 [3 - \epsilon(N)] \exp \left(-2 \int \epsilon(N) dN \right) + 2\hat{K}_1 \exp(-mN), \quad (4.16)$$

где C – некоторая постоянная.

Также уравнения (4.14)–(4.16) можно записать в терминах генерирующей функции $F(N) = \int \epsilon(N) dN$ в следующем виде

$$H(N) = C \exp(-F), \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi(N)}{dN} \right]^2 = F_N + \frac{\hat{K}_2}{C^2} \exp[-mN + 2F], \quad (4.18)$$

$$V(N) = C^2 [3 - F_N] \exp(-2F) + 2\hat{K}_1 \exp(-mN). \quad (4.19)$$

К решениям в терминах космического времени t можно перейти, используя уравнение

$$\epsilon(N) = -\frac{\ddot{N}}{\dot{N}^2}, \quad (4.20)$$

которое является условием интегрируемости (в смысле получения явных зависимостей параметров моделей от t) в терминах космического времени.

Таким образом, задавая параметр медленного скатывания $\epsilon = \epsilon(N)$ или генерирующую функцию $F = F(N)$, из уравнений (4.14)–(4.16) или (4.17)–(4.19) можно получать точные решения для космологических моделей с ненулевой кривизной или материей.

Отметим, что уравнения (4.17)–(4.19) для частного случая $m = 2$ рассматривались ранее в работе [237] в терминах переменной $\omega = 6N$ и генерирующей функции $F'_\omega = F_N/6$ и были получены из других соображений.

Точные решения для степенного масштабного фактора

Вначале определим параметр медленного скатывания как $\epsilon = m/2$, и, из уравнений (4.14)–(4.16), получим решения в терминах числа e -фолдов

$$H(N) = C \exp \left(-\frac{m}{2} N \right), \quad \hat{a}(N) = \exp(N), \quad (4.21)$$

$$\phi(N) = \pm \frac{N}{C} \sqrt{C^2 m + 2\hat{K}_2}, \quad (4.22)$$

$$V(N) = C^2 \left(3 - \frac{m}{2} + \frac{2\hat{K}_1}{C^2} \right) \exp(-mN). \quad (4.23)$$

Далее, из условия (4.20) следует выражение для числа e -фолдов

$$N(t) = \frac{2}{m} \ln \left(\frac{C_1}{2} mt + \frac{C_2}{2} m \right), \quad (4.24)$$

где константы интегрирования C_1 и C_2 можно определить из уравнений (4.9)–(4.10), именно, $C_1 = C$ и $C_2 = 2C_1^2/m$.

Таким образом, в терминах космического времени, точные космологические решения для случая степенного расширения Вселенной записываются как

$$H(t) = \frac{2}{mt + 2C}, \quad a(t) = a_0 \left(\frac{C}{2} mt + C^2 \right)^{2/m}, \quad (4.25)$$

$$\phi(t) = \pm \frac{2\sqrt{C^2m + 2K_2a_0^{-m}}}{mC} \ln \left(\frac{C}{2} mt + C^2 \right), \quad (4.26)$$

$$V(\phi) = C^2 \left(3 - \frac{m}{2} + \frac{2K_1a_0^{-m}}{C^2} \right) \exp \left(\mp \frac{mC\phi}{\sqrt{C^2m + 2K_2a_0^{-m}}} \right). \quad (4.27)$$

Исходя из масштабного фактора (4.25) и параметра медленного скатывания $\epsilon = m/2$ получим условие ускоренного расширения $m < 2$. Таким образом, модели с ненулевой кривизной или барионной материей не дают ускоренного расширения Вселенной для степенного масштабного фактора в случае ОТО. Ускоренному расширению соответствует только модель плоской Вселенной на стадии инфляции с $k = 0$, в которой постоянная m принимает произвольные значения.

Модель с эффективной космологической постоянной

Рассмотрим модель с постоянным скалярным полем $\phi = const$. Из уравнений получим (4.14)–(4.16)

$$F(N) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{C^2m}{2\hat{K}_2(C_1m - e^{-mN})} \right], \quad (4.28)$$

$$\epsilon(N) = \frac{me^{-mN}}{2(e^{-mN} - C_1m)}, \quad (4.29)$$

$$V(N) = \frac{3\hat{K}_1}{m} (me^{-mN} - 2e^{-mN} + 2C_1m), \quad (4.30)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Из выражения (4.30) видно, что $V = 6C_1\hat{K}_1 = const$ только для случая $m = 2$, который мы и будем рассматривать.

Из уравнения (4.20) для параметра медленного скатывания (4.29) запишем

$$N(t) = \frac{1}{2} \ln \left(2 \operatorname{th}^2 [\sqrt{2C_1}(C_2t) + C_3] - 2C_1 \right), \quad (4.31)$$

$$H(t) = C_2 \sqrt{2C_1} \operatorname{th} [\sqrt{2C_1}(C_2t) + C_3]. \quad (4.32)$$

С учетом уравнений (4.9)–(4.10), получим

$$H(t) = \frac{\sqrt{K_1}}{a_0} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{K_1}}{a_0} t - \frac{1}{2} \right), \quad (4.33)$$

$$a(t) = a_0 \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{K_1}}{a_0} t - \frac{1}{2} \right), \quad (4.34)$$

$$V = \Lambda_{eff} = \frac{3K_1}{a_0^2}. \quad (4.35)$$

Таким образом, на стадии инфляции, ненулевая кривизна $K_1 = -3k$ в данной модели определяет эффективную космологическую постоянную Λ_{eff} .

4.1.2 Обобщение точных решений для моделей с $m = 2$

Теперь рассмотрим космологическую модель с параметром медленного скатывания $\epsilon = 0$. Из уравнений (4.14)–(4.16) получим

$$H(N) = C, \quad \hat{a}(N) = \exp(N), \quad (4.36)$$

$$\phi(N) = \pm \frac{2\sqrt{2K_2}}{mC} \exp \left(-\frac{m}{2} N \right), \quad (4.37)$$

$$V(N) = 3C^2 + \exp(-mN). \quad (4.38)$$

Поскольку, в данном случае, число e -фолдов $N = Ct$, решения в терминах космического времени запишем в следующем виде

$$a(t) = a_0 \exp(Ct), \quad (4.39)$$

$$\phi(t) = \pm \frac{2\sqrt{2K_2 a_0^{-m}}}{mC} \exp \left(-\frac{m}{2} Ct \right), \quad (4.40)$$

$$V(\phi) = 3C^2 + \frac{m}{8}(6-m)C^2\phi^2, \quad (4.41)$$

которые являются обобщением решений, полученных в работе [66] для случая ненулевой кривизны $m = 2$.

Также, на основе предложенного подхода, появляется возможность получить обобщения для произвольного значения m других точных решений, представленных в работах [66; 162; 180; 237], после нахождения зависимостей $\epsilon(N)$ или $F(N)$ на основе метода N -анализа уравнений космологической динамики в моделях с дополнительным скалярным полем.

4.1.3 Решение уравнений динамики посредством задания масштабного фактора

В некоторых случаях можно получить точные решения уравнений (4.9)–(4.10) посредством подстановки в них масштабного фактора, то есть из априорно заданной динамики Вселенной.

I. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \cos^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right), \quad (4.42)$$

где A , B и C – некоторые постоянные.

Из уравнений (4.9)–(4.10) получим

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2(3K_2+2B)}{m(K_2+B)}} \ln \left[\frac{1 + \sin \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)} \right], \quad (4.43)$$

$$V(t) = \frac{12(K_2+B) \sin^2 \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right) - 2m(K_2 - K_1 + B)}{m^2 A^2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)}, \quad (4.44)$$

Далее, подставляя зависимость $t = t(\phi)$ в выражение (4.44), запишем

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left\{ [(6-m)(B+K_2) + K_1 m] \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2m(K_2+B)}{3K_2+2B}} \phi \right) - [m(B-K_1+K_2) + 6(B+K_2)] \right\}. \quad (4.45)$$

II. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \sin^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right), \quad (4.46)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2(3K_2+2B)}{m(K_2+B)}} \ln \left[\frac{\sin \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)}{1 + \cos \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)} \right], \quad (4.47)$$

$$V(t) = \frac{12(K_2+B) \cos^2 \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right) - 2m(K_2 - K_1 + B)}{m^2 A^2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)}, \quad (4.48)$$

с тем же потенциалом (4.45), что и в предыдущей модели.

Полученные решения соответствуют осциллирующей динамике Вселенной, в рамках которой стадии ускоренного расширения сменяются сжатием.

III. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \operatorname{sh}^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t + C) \right), \quad (4.49)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2(3K_2 + 2B)}{m(K_2 + B)}} \left[\pm \ln \left(e^{\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t+C)} + 1 \right) \mp \ln \left(e^{\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t+C)} - 1 \right) \right], \quad (4.50)$$

$$V(t) = \frac{12(K_2 + B) \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t + C) \right) - 2m(K_2 - K_1 + B)}{m^2 A^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t + C) \right)}, \quad (4.51)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left\{ [(6 - m)(B + K_2) + K_1 m] \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2m(K_2 + B)}{3K_2 + 2B}} \phi \right) + [m(B - K_1 + K_2) + 6(B + K_2)] \right\}. \quad (4.52)$$

IV. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \operatorname{ch}^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t + C) \right), \quad (4.53)$$

$$\phi(t) = \pm 2 \sqrt{-\frac{2(3K_2 + 2B)}{m(K_2 + B)}} \operatorname{arctg} \left[e^{\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t+C)} \right], \quad (4.54)$$

$$V(t) = \frac{12(K_2 + B) \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t + C) \right) - 2m(K_2 - B)}{m^2 A^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\sqrt{K_2 + B}}{A} (t + C) \right)}, \quad (4.55)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left\{ [(6 - m)B + K_1 m] \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{m(K_2 + B)}{2(K_2 + 2B)}} \phi \right) + [m(B - K_1) + 6(B + K_2)] \right\}. \quad (4.56)$$

Таким образом, задавая различные значения параметра $m \neq 0$ в моделях I–IV, получим точные космологические решения для системы, состоящей из скалярного и материального поля (или случай скалярного поля во Вселенной Фридмана с ненулевой кривизной) с изначально определенным типом динамики.

Отметим, что, согласно современным наблюдениям, Вселенная с большой степенью точности является пространственно плоской $|\Omega_K| < 0.056$ (PLANCK), комбинированный анализ данных спутника PLANCK, гравитационного линзирования и барионных акустических осцилляций дает меньшее значение $\Omega_K = 0.0007$ [83]. Тем не менее, на стадии инфляции, модели с исходной ненулевой кривизной пространства ФРУ можно рассматривать в качестве актуальных.

4.2 Киральные космологические модели

Для реализации инфляционного сценария и наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной также рассматриваются модели с двумя скалярными полями. Введение второго скалярного поля (или нескольких полей) в космологические модели дает новые возможности для теоретического описания эволюции Вселенной. Например, в качестве актуальной модели можно рассматривать одно поле как инфлатон, а второе поле определяет темную энергию на стадии повторного ускоренного расширения или рассматривать инфляцию (повторное ускоренное расширение), обусловленную эволюцией обоих полей.

В рамках этого подхода возможны различные виды кинетического и потенциально-го взаимодействия между двумя (или несколькими) скалярными полями [239–241]. Для описания таких взаимодействий можно использовать нелинейные сигма-модели или киральные космологические модели, предложенные в работах Червона [13; 195; 242–244]) с внутренним пространством целей (полей), метрика которого и определяет взаимодействие между скалярными полями.

Запишем действие для нелинейной сигма-модели [13]

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \frac{1}{2} h_{AB} \partial_\mu \Psi^A \partial_\nu \Psi^B g^{\mu\nu} - V(\phi, \psi) \right), \quad (4.57)$$

где $V(\phi, \psi)$ – потенциал, $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства Фридмана-Робертсона-Уокера, h_{ij} – метрический тензор пространства полей, $\Psi^1 = \phi$, $\Psi^2 = \psi$.

Метрика пространства полей определяется следующим образом

$$ds^2 = h_{AB}(\Psi^k) d\Psi^A d\Psi^B. \quad (4.58)$$

Запишем систему уравнений Эйнштейна и полевых уравнений в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера для модели с двумя полями [13]

$$3H^2 = \frac{1}{2} h_{11} \dot{\phi}^2 + h_{12} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{1}{2} h_{22} \dot{\psi}^2 + V(\phi, \psi) + \frac{K}{a^m}, \quad (4.59)$$

$$- \dot{H} = \frac{1}{2} h_{11} \dot{\phi}^2 + h_{12} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{1}{2} h_{22} \dot{\psi}^2 + \frac{mK}{6a^m}, \quad (4.60)$$

$$3H \left(h_{11} \dot{\phi} + h_{12} \dot{\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(h_{11} \dot{\phi} + h_{12} \dot{\psi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{11}}{\partial \phi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial h_{12}}{\partial \phi} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.61)$$

$$3H \left(h_{12} \dot{\phi} + h_{22} \dot{\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(h_{12} \dot{\phi} + h_{22} \dot{\psi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{11}}{\partial \psi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial h_{12}}{\partial \psi} \dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0. \quad (4.62)$$

Теперь рассмотрим метод точных решений уравнений (4.59)–(4.62), основанный на конформных растяжениях (или сжатиях) метрики пространства целей и выбранном соотношении между скалярными полями в двухкомпонентных киральных космологических моделях.

4.2.1 Конформные преобразования метрики пространства полей

Метод точных решений базируется на том, что посредством конформных преобразований пространства полей, с заданными соотношениями между ϕ и ψ уравнения (4.59)–(4.62) приводятся к виду уравнений Эйнштейна-Фридмана для моделей с одним полем

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H} + \frac{2K_1}{a^m}, \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H} + \frac{K_2}{a^m}. \quad (4.64)$$

Таким образом, появляется возможность транслировать точные решения, полученные в моделях с одним скалярным полем на двухполевые космологические модели.

Рассмотрим тензор пространства полей следующего вида

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} n/2 & 0 \\ 0 & 2/n \end{pmatrix},$$

с соотношением между полями

$$\psi(t) = \frac{n}{2}\phi(t), \quad (4.65)$$

где n – постоянный конформный множитель.

В результате, получим уравнения динамики в виде

$$V(\phi, \psi) = 3H^2 + \dot{H} + \frac{2K_1}{a^m}, \quad (4.66)$$

$$\frac{n}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H} + \frac{K_2}{a^m}, \quad (4.67)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{2}{n}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.68)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{n}{2}\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0. \quad (4.69)$$

Из (4.65) и (4.68)–(4.69) получим условие

$$V(\psi) = \frac{n}{2}V(\phi), \quad V(\phi, \psi) = \left(1 - \frac{n}{2}\right)V(\phi) + V(\psi), \quad (4.70)$$

где константу интегрирования приравниваем к нулю.

Таким образом, при выполнении условий (4.70), точные решения системы уравнений (4.59)–(4.62) определяются из (4.66)–(4.67), и задача построения точных решений для двухкомпонентных киральных космологических моделей сводится к обобщению полученных ранее решений для исходной модели с одним скалярным полем.

Теперь, в качестве примера, рассмотрим обобщение решений, полученных ранее в секции § 4.1.3, на случай киральных космологических моделей для $n = 1$.

$I(\sigma)$. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \cos^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right), \quad (4.71)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2(3K_2+2B)}{m(K_2+B)}} \ln \left[\frac{1 + \sin \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)} \right], \quad (4.72)$$

$$\psi(t) = \pm \sqrt{\frac{(3K_2+2B)}{2m(K_2+B)}} \ln \left[\frac{1 + \sin \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)} \right], \quad (4.73)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left\{ [(6-m)(B+K_2) + K_1 m] \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2m(K_2+B)}{3K_2+2B}} \phi \right) - [m(B-K_1+K_2) + 6(B+K_2)] \right\}. \quad (4.74)$$

$$V(\psi) = \frac{1}{2m^2 A^2} \left\{ [(6-m)(B+K_2) + K_1 m] \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2m(K_2+B)}{3K_2+2B}} \psi \right) - [m(B-K_1+K_2) + 6(B+K_2)] \right\}. \quad (4.75)$$

Потенциал $V(\phi, \psi)$ можно записать как

$$V(\phi, \psi) = \frac{1}{2} V(\phi) + V(\psi) \quad (4.76)$$

Аналогично, из уравнений (4.66)–(4.67) и (4.67), строятся точные решения

1. $II(\sigma)$ для $a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \sin^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)$;
2. $III(\sigma)$ для $a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \operatorname{sh}^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)$;
3. $IV(\sigma)$ для $a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \operatorname{ch}^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K_2+B}}{A}(t+C) \right)$;

на основе решений II – IV с одним скалярным полем.

Исходя из уравнений (4.68)–(4.69) и постоянных $K_1 = \left(\frac{m-6}{12}\right)K$, $K_2 = -\frac{m}{6}K$, запишем условия на константы моделей:

1. $I(\sigma)$ – $III(\sigma)$ для случая ненулевой кривизны $K_1 = K_2 = k$, $m = 2$ получим $B = -\frac{3}{2}k$, в общем случае $B = \frac{m}{2}K$;
2. $IV(\sigma)$ для случая ненулевой кривизны $K_1 = K_2 = k$, $m = 2$ получим $B = \frac{1}{2}k$, в общем случае $B = -\frac{m}{6}K$.

Также отметим, что для плоской Вселенной ФРУ на стадии инфляции $K = 0$ рассмотренные методы точных решений уравнений космологической динамики (и сами решения) для моделей с одним скалярным полем можно обобщить на случай киральных космологических моделей с двумя полями.

4.2.2 ККМ с полем k -эссенции и каноническим скалярным полем

Теперь рассмотрим киральные космологические модели, в качестве компонент, содержащие поле k -эссенции и поле квинтэссенции на стадии космологической инфляции. Модели k -эссенции могут быть получены из действия Борна-Инфельда в теории струн [245] и предлагались для описания стадии космологической инфляции и темной энергии в работах [102–105; 246; 247].

Вначале запишем действие для модели инфляции с каноническим скалярным полем χ в виде

$$S = - \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \frac{1}{2} \chi_{,\mu} \chi^{,\mu} + Y(\chi) \right), \quad (4.77)$$

где $Y(\chi)$ – потенциал скалярного поля χ .

Напомним, что космологическая динамика для действия (4.77) в пространственно плоской Вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) определяется из уравнений

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + Y(\chi), \quad (4.78)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \dot{\chi}^2, \quad (4.79)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{\partial Y(\chi)}{\partial \chi} = 0. \quad (4.80)$$

Действие для моделей k -эссенции с полем φ запишем как [248]

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + p(\varphi, X) \right), \quad (4.81)$$

где $p(\varphi, X)$ – функция скалярного поля φ и кинетического члена $X = -\varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu}$, кинетическая энергия поля, в таком случае, определяется как $-X/2$.

Уравнения космологической динамики для таких моделей [248]

$$3H^2 = p - 2Xp_{,X}, \quad (4.82)$$

$$\dot{H} = Xp_{,X}, \quad (4.83)$$

$$[p_{,X} + 2Xp_{,XX}] \ddot{\varphi} + 3Hp_{,X} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} [p - 2Xp_{,X}] = 0. \quad (4.84)$$

В общем случае, нетривиальная кинетическая часть в моделях k -эссенции приводит как к изменению фоновой динамики, так и эволюции космологических возмущений [249]. Существенной особенностью является зависимость скорости распространения скалярных возмущений от кинетической части лагранжиана модели [98]

$$c_S^2 = \frac{p_{,X}}{\rho_{,X}} = \left[1 + 2X \frac{p_{,XX}}{p_{,X}} \right]^{-1}. \quad (4.85)$$

Рассмотрим специальный класс моделей k -эссенции, соответствующий моделям с каноническим скалярным полем в контексте обобщения ранее рассмотренных моделей. Для этого определим соответствие между этими моделями, которое следует из условия [248]

$$3H^2 + \dot{H} = Y(\chi) = p(\varphi, X) - X \frac{p(\varphi, X)}{\partial X} \quad (4.86)$$

В таком случае скалярное поле χ будет функцией поля φ и кинетического члена X .

Из уравнений (4.79) и (4.83) запишем

$$\dot{\chi} = \pm \sqrt{-2Xp_{,X}}. \quad (4.87)$$

После подстановки $\dot{\chi}$ в уравнение (4.80), с учётом условия (4.86), получаем

$$[p_{,X} + Xp_{,XX}] \dot{\varphi} + 3Hp_{,X} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} [p - 2Xp_{,X}] = 0. \quad (4.88)$$

Уравнения (4.84) и (4.88) записываются одинаково при условии $p_{,XX} = 0$.

Таким образом, лагранжиан $p(\varphi, X)$ определяется кинетическим членом X и функцией скалярного поля $K = K(\varphi)$ как

$$p(\varphi, X) = K(\varphi)X + K(\varphi). \quad (4.89)$$

Для рассматриваемого лагранжиана $p(\varphi, X)$ из уравнений (4.86) и (4.87) получим соотношения

$$Y(\chi) = K(\varphi), \quad (4.90)$$

$$\chi = \pm \int \sqrt{2K(\varphi)} d\varphi, \quad (4.91)$$

которые определяют связь между моделями с каноническим скалярным полем квинтэссенции и полем k -эссенции.

Исходя из условия $p_{,XX} = 0$, получим, что скорость распространения скалярных возмущений $c_S = 1$ и параметры космологических возмущений рассчитываются аналогично случаю моделей с каноническим скалярным полем. Модели такого типа рассматривались в работе [250].

Теперь рассмотрим двухкомпонентную космологическую модель, определяемую действием вида

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - V(\phi) - p(\varphi, X) - U[\phi, \varphi(\chi)] \right), \quad (4.92)$$

где кинетическое взаимодействие между полями ϕ и φ можно рассматривать как взаимодействие между полями ϕ и χ , определяемое потенциалом $U[\phi, \varphi(\chi)]$.

Уравнения динамики для действия (4.92) во Вселенной ФРУ записываются следующим образом

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + p - 2Xp_{,X} + U[\phi, \varphi(\chi)], \quad (4.93)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial}{\partial\phi}(V(\phi) + U[\phi, \varphi(\chi)]) = 0, \quad (4.94)$$

$$[p_{,X} + 2Xp_{,XX}] \dot{\phi} + 3Hp_{,X} \dot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\varphi}(p - 2Xp_{,X} + U[\phi, \varphi(\chi)]) = 0. \quad (4.95)$$

С линейным лагранжианом поля k -эссенции $p(\varphi, X) = K(\varphi)X + K(\varphi)$ уравнения принимают вид

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - K(\varphi)\dot{\varphi}^2 + K(\varphi) + U[\phi, \varphi(\chi)], \quad (4.96)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial}{\partial\phi}(V(\phi) + U[\phi, \varphi(\chi)]) = 0, \quad (4.97)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{1 + \dot{\varphi}^2}{2K(\varphi)} \frac{\partial}{\partial\varphi}(K(\varphi) + U[\phi, \varphi(\chi)]) = 0. \quad (4.98)$$

Из соответствия между лагранжианом k -эссенции $p(\varphi, X) = K(\varphi)X + K(\varphi)$ и лагранжианом скалярного поля $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - Y(\chi)$ с обычным кинетическим членом получим

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + W(\phi, \chi), \quad (4.99)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial\phi} = 0, \quad (4.100)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial\chi} = 0, \quad (4.101)$$

где $W(\phi, \chi) = V(\phi) + Y(\chi) + U(\phi, \chi)$, $U[\phi, \varphi(\chi)] = U(\phi, \chi)$.

Эта система уравнений может быть записана в виде [239]

$$H^2(\phi, \chi) = \frac{1}{3}W(\phi, \chi) + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\partial H(\phi, \chi)}{\partial\phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial H(\phi, \chi)}{\partial\chi} \right)^2 \right], \quad (4.102)$$

$$\dot{\phi} = -2 \frac{\partial H(\phi, \chi)}{\partial\phi}, \quad \dot{\chi} = -2 \frac{\partial H(\phi, \chi)}{\partial\chi}. \quad (4.103)$$

Теперь воспользуемся следующим представлением параметра Хаббла $H(\phi, \chi) = H_1(\phi) + H_2(\chi)$, которое часто используется при анализе космологических моделей, содержащих более одного скалярного поля (см., например, [239]).

В таком случае, система уравнений (4.99)–(4.101) приводится к виду

$$[H_1(\phi) + H_2(\chi)]^2 = \frac{1}{3}W(\phi, \chi) + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\partial H_1(\phi)}{\partial\phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2(\chi)}{\partial\chi} \right)^2 \right], \quad (4.104)$$

$$\dot{\phi} = -2 \frac{\partial H_1(\phi)}{\partial\phi}, \quad \dot{\chi} = -2 \frac{\partial H_2(\chi)}{\partial\chi}. \quad (4.105)$$

Далее, из уравнения (4.104) получим выражения для потенциалов самодействия скалярных полей $V(\phi)$ и $Y(\chi)$ и потенциала их взаимодействия $U(\phi, \chi)$ через параметр Хаббла

$$3H_1^2 = V_1(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = V(\phi) + 2\left(\frac{\partial H_1}{\partial \phi}\right)^2, \quad (4.106)$$

$$3H_2^2 = V_2(\chi) + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 = Y(\chi) + 2\left(\frac{\partial H_2}{\partial \chi}\right)^2, \quad (4.107)$$

$$6H_1H_2 = U(\phi, \chi). \quad (4.108)$$

Решения этой системы уравнений будут определять космологическую динамику для конкретных космологических моделей.

В качестве примера, рассмотрим следующие потенциалы канонического поля $V(\phi) = V_0 \exp\left(\frac{\phi}{A}\right)$ и поля k -эссенции $K(\varphi) = \frac{2B^2}{\varphi^2}$. Из уравнений (4.90)–(4.91) получаем потенциал $Y(\chi) = B^2 \exp\left(-\frac{\chi}{B}\right)$ эффективного скалярного поля $\chi > 0$, положительное значение поля выбирается для соответствия рассматриваемой модели однополевой космологической модели с квинтэссенцией [251] в частном случае. Таким образом, потенциал взаимодействия полей будет $U(\phi, \chi) = \Lambda \exp\left(\frac{\phi}{A} - \frac{\chi}{B}\right)$.

Потенциал $W(\phi, \chi)$ определяется как

$$W(\phi, \chi) = V_0 \exp\left(\frac{\phi}{A}\right) + B^2 \exp\left(-\frac{\chi}{B}\right) + \Lambda \exp\left(\frac{\phi}{A} - \frac{\chi}{B}\right). \quad (4.109)$$

Для случая $A = B$, $\phi = \chi$ и $V_0 = B^2$ получим модель инфляции с одним скалярным полем и потенциалом вида $W(\phi) = V_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\phi}{A}\right)$, который рассматривался ранее для построения модели ранней Вселенной в работе [251].

Точные решения системы уравнений (4.104)–(4.105) в данном случае записываются следующим образом

$$H_1(\phi) = D^2 \exp\left(\frac{\phi}{A}\right), H_2(\chi) = B^2 \exp\left(-\frac{\chi}{B}\right), D^2 = \frac{A^2 V_0}{3A^2 - 4} \quad (4.110)$$

$$H(\phi, \chi) = D^2 \exp\left(\frac{\phi}{A}\right) + B^2 \exp\left(-\frac{\chi}{B}\right), B^2 = \frac{\Lambda}{6D^2} \quad (4.111)$$

$$\phi(t) = A \ln\left(\frac{A^2}{2D^2(t+C)}\right), \chi(t) = B \ln(2(t+C)), \varphi(t) = [2(t+C)]^{-B/2}, \quad (4.112)$$

$$H(t) = \frac{A^2}{2D^2(t+C)} + \frac{B^2}{2(t+C)}, \quad a(t) = a_1 a_2 = a_0(t+C)^{\frac{A^2}{2D^2} + \frac{\Lambda}{12D^2}}, \quad (4.113)$$

где A, B, C, D и Λ – постоянные свободные параметры модели.

Для построения реалистичного космологического сценария предположим $\phi \gg \chi$, следовательно, масштабный фактор на стадии инфляции запишем следующим образом

$$a(t) \simeq a_0(t+C)^{\frac{A^2}{2D^2}}. \quad (4.114)$$

Постинфляционная космологическая динамика включает стадию преобладания излучения с масштабным фактором $a(t) = a_0(t + C)^{1/2}$ и стадию преобладания вещества $a(t) = a_0(t + C)^{2/3}$.

В современную эпоху начинается стадия повторного ускоренного расширения Вселенной с масштабным фактором

$$a(t) \simeq a_0(t + C)^{\frac{2}{3} + \frac{\Lambda}{12D^2}}, \quad (4.115)$$

для которой поле k -эссенции φ (или эффективное скалярное поле χ) моделирует тёмную энергию, определяющую динамику Вселенной на этой стадии.

Теперь запишем уравнения динамики для двухкомпонентных киральных космологических моделей

$$\frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 + h_{12}\dot{\phi}\dot{\chi} + \frac{1}{2}h_{22}(t)\dot{\chi}^2 = -\dot{H}, \quad (4.116)$$

$$\tilde{V}(t) = 3H^2 + \dot{H}. \quad (4.117)$$

Сопоставляя с уравнениями (4.104)–(4.105), для случая $h_{11} = 1, h_{22} = 1, h_{12} = h_{12}(\phi, \chi)$, получим

$$h_{12}(\phi, \chi) = \frac{3}{2} \frac{H_1(\phi)H_2(\chi)}{\left(\frac{\partial H_1(\phi)}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial H_2(\chi)}{\partial \chi}\right)}. \quad (4.118)$$

В результате, компоненты метрики пространства полей определяются как

$$h_{11} = 1, h_{22} = 1, h_{12} = h_{21} = -\frac{3}{2}AB, \quad (4.119)$$

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2}AB \\ -\frac{3}{2}AB & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, рассматриваемой модели космологической инфляции со скалярным полем ϕ и полем k -эссенции φ соответствует киральная космологическая модель с потенциалами самодействия $V(\phi) = V_0 \exp\left(\frac{\phi}{A}\right)$, $K(\varphi) = \frac{2B^2}{\varphi^2}$ и компонентами (4.119) метрики внутреннего пространства полей, определяющего взаимодействие между ними.

4.2.3 Точные решения для ККМ с произвольными компонентами метрики пространства полей

Теперь рассмотрим метод редукции уравнений космологической динамики в киральных космологических моделях к случаю моделей с одним скалярным полем для метрики пространства полей с произвольными компонентами.

Для этого рассмотрим эффективное скалярное поле φ , которое связано со скалярными полями в ККМ следующим образом $\dot{\varphi}^2 = h_{AB}\dot{\varphi}^A\dot{\varphi}^B$.

Уравнения космологической динамики ранней Вселенной в плоском пространстве ФРУ ($K = 0$) в терминах поля φ записываются как [252]

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (4.120)$$

$$\dot{\varphi}^2 = -2\dot{H}, \quad (4.121)$$

$$D_t\dot{\varphi}^A + 3H\dot{\varphi}^A + h^{AB}V_{,B} = 0, \quad (4.122)$$

где

$$D_t\dot{\varphi}^A = \frac{d\dot{\varphi}^A}{dt} + \Gamma_{BC}^A\dot{\varphi}^B\dot{\varphi}^C, \quad (4.123)$$

ковариантная производная в пространстве целей.

Также, первое уравнение (4.120) можно записать в следующем виде

$$V(\varphi) = 3H^2 + \dot{H}. \quad (4.124)$$

Таким образом, соответствие между ККМ и космологическими моделями с одним скалярным полем φ , в общем случае, определяется из соотношений

$$\ddot{\varphi}^A + \Gamma_{BC}^A\dot{\varphi}^B\dot{\varphi}^C + 3H\dot{\varphi}^A + h^{AB}V_{,B} = \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0. \quad (4.125)$$

Теперь рассмотрим частный случай двухкомпонентной ККМ, для которой уравнения динамики (4.120)–(4.122) в явном виде записываются как

$$3H^2 = \frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 + h_{12}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 + V(\phi, \psi), \quad (4.126)$$

$$-\dot{H} = \frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 + h_{12}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2, \quad (4.127)$$

$$3H \left(h_{11}\dot{\phi} + h_{12}\dot{\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(h_{11}\dot{\phi} + h_{12}\dot{\psi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{11}}{\partial \phi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial h_{12}}{\partial \phi} \dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.128)$$

$$3H \left(h_{12}\dot{\phi} + h_{22}\dot{\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(h_{12}\dot{\phi} + h_{22}\dot{\psi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{11}}{\partial \psi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial h_{12}}{\partial \psi} \dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0. \quad (4.129)$$

Для одинаковых скалярных полей $\phi = \psi$ и следующего метрического тензора пространства целей

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} -h_{12} + \frac{n}{2} & h_{12} \\ h_{21} & -h_{12} + \frac{n}{2} \end{pmatrix},$$

где $h_{11} = h_{22} = \frac{n}{2} - h_{12}$, $h_{21} = h_{12}$ и n – некоторая постоянная, получим

$$h_{11}\dot{\phi} + h_{12}\dot{\psi} = h_{12}\dot{\phi} + h_{22}\dot{\psi} = \frac{n}{2}\dot{\phi} = \frac{n}{2}\dot{\psi}, \quad (4.130)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h_{11}}{\partial \phi} \dot{\phi}^2 + \frac{\partial h_{12}}{\partial \phi} \dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{11}}{\partial \psi} \dot{\phi}^2 + \frac{\partial h_{12}}{\partial \psi} \dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 = 0, \quad (4.131)$$

$$\frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 + h_{12}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{n}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{n}{2}\dot{\psi}^2. \quad (4.132)$$

Следовательно, уравнения (4.126)–(4.129) приводятся к виду

$$V(\phi, \psi) = 3H^2 + \dot{H} = V(\varphi), \quad (4.133)$$

$$-\dot{H} = \frac{n}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{n}{2}\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2, \quad (4.134)$$

$$3H\dot{\phi} + \ddot{\phi} + \frac{2}{n}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 3H\dot{\psi} + \ddot{\psi} + \frac{2}{n}\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0. \quad (4.135)$$

Отметим, что полевое уравнение

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0, \quad (4.136)$$

может быть получено из (4.133)–(4.134), следовательно, в данном случае, условия (4.125) выполняются.

Теперь определим параметр Хаббла следующим образом

$$H(t) \equiv H(\varphi), \quad (4.137)$$

и систему (4.133)–(4.134) для эффективного поля φ можно записать в виде уравнений Иванова-Салопека-Бонда

$$V(\varphi) = 3H^2(\varphi) - 2 \left(\frac{dH(\varphi)}{d\varphi} \right)^2, \quad (4.138)$$

$$\dot{\varphi} = -2 \left(\frac{dH(\varphi)}{d\varphi} \right), \quad (4.139)$$

со следующей связью эффективного поля со скалярными полями в ККМ

$$\varphi = \pm \frac{\sqrt{n}}{2} (\phi + \psi). \quad (4.140)$$

Также запишем тензор внутреннего пространства целей в следующем виде

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} -f(\phi) + \frac{n}{2} & \frac{1}{2}(f(\phi) + f(\psi)) \\ \frac{1}{2}(f(\phi) + f(\psi)) & -f(\psi) + \frac{n}{2} \end{pmatrix},$$

где $f(\phi) \equiv f(\psi)$ – произвольные функции, определяющие взаимодействие между скалярными полями ϕ и ψ .

В качестве примера рассмотрим параметр Хаббла

$$H(\varphi) = -\frac{\alpha}{2}\varphi \quad (4.141)$$

для которого из уравнения (4.139) получим

$$\varphi(t) = \alpha t - \beta, \quad (4.142)$$

где β – постоянная интегрирования.

Параметр Хаббла и масштабный фактор как функции космического времени, в данном случае, равны

$$H(t) = -\frac{\alpha}{2}(\alpha t - \beta), \quad (4.143)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left[\frac{\alpha}{4} t (2\beta - \alpha t) \right]. \quad (4.144)$$

Отметим, что космологические модели с таким видом динамики впервые рассматривались в работе Рузмайкиных [253].

Потенциал определим из уравнения (4.138)

$$V(\varphi) = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 (3\varphi^2 - 2). \quad (4.145)$$

Далее, из уравнения (4.140) получим

$$\phi(t) = \psi(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} (\alpha t - \beta), \quad (4.146)$$

$$V(\phi, \psi) = \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left[\frac{3n}{4} (\phi + \psi)^2 - 2 \right], \quad (4.147)$$

эволюцию и потенциал скалярных полей в ККМ, соответствующих той же динамике (4.143)–(4.144) ранней Вселенной.

Таким образом, предложенный подход позволяет обобщить рассмотренные ранее решения для моделей ранней Вселенной с одним скалярным полем на случай специального класса киральных космологических моделей.

4.2.4 Космологические возмущения в мультиполевых моделях

Важным различием между инфляцией с несколькими скалярными полями и инфляцией с одним полем является появление дополнительных неадиабатических возмущений и эволюция космологических возмущений после пересечения горизонта событий как следствие взаимодействия между адиабатическими возмущениями, что может оказывать существенное влияние на значения спектральных параметров космологических возмущений. Учет взаимодействия возмущений приводит к нелинейным эффектам, поскольку возмущения скалярных полей $\delta\phi$ и $\delta\psi$ в данном случае взаимосвязаны, в отличие от случая моделей с одним скалярным полем в линейном порядке теории космологических возмущений, где все моды развиваются независимо [254–259].

Влияние этих эффектов на отклонение спектра результирующих возмущений от гауссового оценивается с помощью параметра нелинейности f_{NL} [260]. Согласно последним наблюдательным данным спутника PLANCK значение параметра нелинейности оценивается как $f_{NL} = 2.5 \pm 5.7$ [83].

В общем случае $\phi \neq \psi$, на стадии космологической инфляции, возмущениям скалярных полей $\delta\phi$ и $\delta\psi$, при выполнении условий $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$ для параметров медленного скатывания, соответствуют следующие возмущения кривизны [254]

$$\mathcal{R} \simeq H \left(\frac{\delta\phi}{\phi} + \frac{\delta\psi}{\psi} \right), \quad (4.148)$$

и энтропийные возмущения, которые определяются величиной

$$S = H \left(\frac{\delta\phi}{\phi} - \frac{\delta\psi}{\psi} \right). \quad (4.149)$$

В рассмотренных выше случаях $\phi = n\psi$ (для моделей, рассмотренных в разделе § 4.2.3 $\phi = \psi$) энтропийные возмущения равны нулю $S = 0$, и возмущения кривизны $\mathcal{R} \simeq H \frac{\delta\phi}{\phi}$ соответствуют моделям с одним скалярным полем. Таким образом, спектральные параметры космологических возмущений в рассмотренных киральных космологических моделях рассчитываются аналогично случаю моделей ранней Вселенной с одним скалярным полем из соотношений (3.79)–(3.85).

Теперь определим параметр f_{NL} , определяющий отклонение спектра космологических возмущений от гауссова, для двухполевых моделей следующим образом [258]

$$\frac{6}{5}f_{NL} = 2 \frac{\frac{v_H^2}{\sigma_*^2} \left(1 - \frac{\gamma_*^\phi}{\sigma_*^\phi} u_H\right) + \frac{v_H^2}{\sigma_*^2} \left(1 - \frac{\gamma_*^\psi}{\sigma_*^\psi} v_H\right) + 2 \left(\frac{u_H}{\sigma_*^\phi} - \frac{v_H}{\sigma_*^\psi}\right)^2 \mathcal{A}_H}{\left(\frac{u_H^2}{\sigma_*^\phi} + \frac{v_H^2}{\sigma_*^\psi}\right)^2}, \quad (4.150)$$

где

$$\sigma^\phi = \left(\frac{H_{,\phi}^{(1)}}{H}\right)^2, \quad \sigma^\psi = \left(\frac{H_{,\psi}^{(2)}}{H}\right)^2, \quad \gamma^\phi = \frac{H_{,\phi\phi}^{(1)}}{H}, \quad \gamma^\psi = \frac{H_{,\psi\psi}^{(2)}}{H}, \quad (4.151)$$

$$H(\phi, \psi) = H^{(1)}(\phi) + H^{(2)}(\psi), \quad \sigma = \sigma^\phi + \sigma^\psi = \frac{1}{2}\epsilon, \quad (4.152)$$

$$u_H \equiv \frac{H_*^{(1)} + Z_e}{H_*}, \quad v_H \equiv \frac{H_*^{(2)} - Z_e}{H_*}, \quad Z_e = (H_e^{(2)}\sigma_e^\phi - H_e^{(1)}\sigma_e^\psi) / \sigma_e, \quad (4.153)$$

$$\mathcal{A}_H = -\frac{H_e^2}{H_*^2} \frac{\sigma_e^\phi \sigma_e^\psi}{\sigma_e} \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_e^{ss}}{\sigma_e}\right), \quad (4.154)$$

$$\gamma^{ss} = (\sigma^\psi \gamma^\phi + \sigma^\phi \gamma^\psi) / \sigma. \quad (4.155)$$

Индексы $(*)$ и (e) означают пересечение возмущениями горизонта событий и завершение инфляции, соответственно.

Для случая $\phi = n\psi$ и $V(\phi) = \frac{n}{2}V(\psi)$ (или $\phi = \psi$ и $V(\phi) = V(\psi)$) параметры космологических возмущений на пересечении горизонта и при завершении инфляции равны, также

$$u_H = v_H = 1, \quad \sigma^\phi = \sigma^\psi = \frac{1}{2}\epsilon, \quad \gamma^\phi = \gamma^\psi = \delta, \quad \gamma^{ss} = \delta, \quad Z_e = 0. \quad (4.156)$$

Из выражения (4.150) получим параметр нелинейности

$$\frac{6}{5}f_{NL} = \epsilon - \delta \ll 1, \quad (4.157)$$

следовательно, спектр скалярных возмущений для рассматриваемого класса моделей можно считать гауссовым как и в случае моделей с одним скалярным полем.

Таким образом, рассмотренные киральные космологические модели полностью соответствуют моделям ранней Вселенной с одним скалярным полем φ как по фоновой динамике, так и по параметрам космологических возмущений.

Отметим, что предложенный подход существенно упрощает изначально более сложные космологические модели и, в данном случае, рассматриваются только специальные классы решений, связанные с исходной моделью ранней Вселенной с одним скалярным полем в контексте ее обобщения.

Глава 5. Космологические модели на основе скалярно-тензорной гравитации

Скалярное поле представляет собой основу построения многих физических теорий, в том числе, теорий гравитации. Еще до появления Общей Теории Относительности, Нордстрем в 1912 г. сформулировал конформно-плоскую скалярную теорию гравитации [261; 262], которая, некоторое время, рассматривалась Эйнштейном в качестве альтернативы ОТО [263].

Также, Йордан в 1949 году [264] отметил, что в теории объединения гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна при оценке масштаба 5-го измерения с неизбежностью возникает новое макроскопическое взаимодействие гравитационного напряжения, переносчиком которого является скалярное поле.

В дальнейшем, Фиртц (1956) [265], Йордан (1959) [266], Бранс и Дикке (1961) [267] предложили теорию гравитации, описываемую метрическим тензором и скалярным полем с неминимальным взаимодействием с гравитацией. Такая модель содержит только один свободный параметр ω , устремление которого к бесконечности приводит к совпадению теории с ОТО. Позднее Бергман (1968) [268], Нордтвед (1970) [269] и Вагонер (1970) [270] обобщили теорию Фиртца-Йордана-Бранса-Дикке на случай более общей теории скалярно-тензорной гравитации (СТГ) за счет введения произвольной функции $\omega(\phi)$ перед кинетическим членом и потенциала самодействия скалярного поля. После теории Бранса и Дикке были построены другие теории гравитации, альтернативные Общей Теории Относительности (см., например, [271]). Отклонения этих теорий от ОТО должны быть небольшими, исходя из экспериментов в Солнечной системе [272]. Среди многих скалярно-тензорных теорий гравитации, предложенных в литературе [15; 16], рассмотрим модели, содержащие только скаляр Риччи и запишем действие в следующем виде

$$S_{STG} = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \phi R + \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}, \quad (5.1)$$

также выделим следующие случаи [16; 17; 137–139]:

1) Гравитация Бранса-Дикке

$$S_{BD} = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \phi R + \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}. \quad (5.2)$$

2) Индуцированная гравитация

$$S_{IND} = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\beta}{2} \phi^2 R + \frac{\omega(\phi)}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}. \quad (5.3)$$

3) Неминимальное взаимодействие

$$S_{NC} = \frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1 - \xi_{ST} \phi^2) R + \frac{\omega(\phi)}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)}. \quad (5.4)$$

В случае неминимального взаимодействия ξ_{ST} – безразмерный параметр, определяющий неминимальное взаимодействие, различные значения которого соответствуют различным типам взаимодействия: $\xi_{ST} = 1/6$ (конформная связь), $\xi_{ST} = 0$ (минимальная связь) и $|\xi_{ST}| \gg 1$ (сильная связь) [138].

Отличительной особенностью скалярно-тензорных теорий гравитации является то, что гравитационная постоянная G зависит от времени: эта идея восходит к работам Дирака (1937) [273;274]. Дирак заметил, что безразмерные комбинации космологических констант и фундаментальных физических констант связаны соотношением, которое возникает естественным образом, при условии, что одна из «констант» медленно изменяется в больших (космологических) масштабах времени. Таким образом, идея Дирака состояла в возможной интерпретации гравитационной постоянной как функции времени $G = G(t)$, сохраняя при этом постоянство других фундаментальных констант [274]. Далее, Йордан развил эту идею в скалярно-тензорных теориях гравитации, в которых G представляла собой функцию геометрического скалярного поля $G = G(\phi)$ [275]. Таким образом, $G(\phi)$ ведет себя как эффективная форма материи и удовлетворяет закону сохранения энергии [275].

Обычным методом анализа космологических моделей для случая $G = G(\phi)$ являются конформные преобразования метрики $\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\phi)g_{\mu\nu}$, где $\Omega^2(\phi)$ – конформный множитель, или, иначе, переход от представления Йордана к представлению Эйнштейна, причем, геометрические поля в первом представлении рассматриваются как материальные во втором, что порождает их неоднозначную трактовку [16; 17; 137–139].

Однако, в рассматриваемой системе единиц $\kappa = 1$ (то есть, для $G = const$) отсутствует различие между геометрическими и материальными скалярными полями. Анализ космологических моделей со скалярно-тензорной гравитацией в системе единиц $8\pi G = c = 1$ приводится во многих работах по физике ранней Вселенной (см., например, [17; 126; 128; 134; 276–279]). В данном случае, модификация гравитации Эйнштейна связана с неминимальным взаимодействием материального скалярного поля (как источника гравитационного поля) и кривизны. Теперь определимся с используемой терминологией: под «неминимальным взаимодействием» часто подразумевается наличие скалярного поля в материальной части лагранжиана в случае взаимодействия поля и других видов материи, в данном случае, мы говорим о неминимальном взаимодействии или связи скалярного поля и кривизны (в данном случае, скаляра Риччи), и, для построения моделей ранней Вселенной в контексте инфляционной парадигмы, рассматриваем $\mathcal{L}^{(m)} = 0$.

Таким образом, в рамках данной интерпретации, переход от моделей инфляции со скалярно-тензорной гравитацией к инфляции на основе ОТО определяется выбором $F = 1$ и $\omega = 1$, что будет использовано в дальнейшем при сопоставлении космологических моделей для этих случаев. Такое сопоставление можно произвести на основе моделей с оди-

наковыми параметрами (потенциалом, скалярным полем, и параметром Хаббла), что подразумевает определенную связь моделей с ОТО и СТГ в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера. Также, учитывая, что потенциал скалярного поля $V(\phi)$ определяет характер инфляционной стадии, изначально заданный потенциал можно использовать для реконструкции типа скалярно-тензорной гравитации.

5.1 Уравнения космологической динамики в моделях с СТГ

Действие, определяющее динамику Вселенной со скалярным полем ϕ и скалярно-тензорной гравитацией, записывается следующим образом [16; 17; 137–139]

$$S_{STG} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{\omega(\phi)}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (5.5)$$

где функция $F(\phi)$ определяет неминимальное взаимодействие скалярного поля ϕ и скаляра Риччи R , функция $\omega(\phi)$ определяет связь поля и его кинетической энергии.

Уравнения космологической динамики для действия (5.5) в пространственно плоской Вселенной Фридмана записываются как [16; 17; 137–139]

$$3FH^2 + 3H\dot{F} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (5.6)$$

$$3FH^2 + 2H\dot{F} + 2F\dot{H} + \ddot{F} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (5.7)$$

$$\omega\ddot{\phi} + 3\omega H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\omega'_\phi + V'_\phi - 6H^2F'_\phi - 3\dot{H}F'_\phi = 0. \quad (5.8)$$

Из этих уравнений только два являются независимыми [134], поэтому динамику Вселенной на стадии инфляции можно рассматривать на основе системы из двух уравнений для различных случаев взаимодействия скалярного поля и кривизны. Таким образом, для анализа космологической динамики на ранней стадии эволюции Вселенной будем использовать первые два уравнения (5.6)–(5.7). Также, отметим, что функцию $\omega(\phi)$ можно устранить из уравнений динамики посредством переопределения скалярного поля $\psi = \int \sqrt{\omega(\phi)} d\phi$.

Также, в случае $F = 1$ и $\omega = 1$ действие (5.5) имеет вид действия Эйнштейна-Гильберта

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (5.9)$$

с уравнениями динамики (1.7)–(1.9), которые рассматривались ранее.

Точные решения системы уравнений (5.6)–(5.8), полученные различными методами, представлены в работах [138; 139; 276–280].

В данной главе мы рассмотрим новый подход к анализу космологических моделей в случае скалярно-тензорной гравитации, исходя из предположения о том, что неминимальное взаимодействие постоянного скалярного поля и кривизны является источником его эволюции и отклонения от стадии де Ситтера.

Далее, рассмотрим параметрическую связь моделей инфляции с ОТО и СТГ, которую установим непосредственно из уравнений (1.7)–(1.9) и (5.6)–(5.8), что позволит сопоставлять модели, основанные на данных теориях гравитации, на уровне космологических возмущений, оценивать расхождение между ними и реконструировать вид скалярно-тензорной гравитации для выбранных потенциалов скалярного поля.

5.2 Неминимальная связь как источник отклонения от стадии де Ситтера

В качестве исходной модели инфляции рассмотрим экспоненциальное расширение с параметром Хаббла $H = \lambda = const$ и плоским потенциалом $V = 3\lambda^2$, которое обусловлено постоянным скалярным полем $\phi = const$ в случае ОТО, то есть для $F = 1$.

Изменяющееся в течение времени неминимальная связь с кривизной $F = F(t)$ приводит к эволюции скалярного поля $\phi = \phi(t)$, отклонению от деситтеровского расширения $H = H(t)$ и плоского потенциала $V = V(\phi)$. Таким образом, данный подход подразумевает некоторую функциональную связь между параметром Хаббла H и функцией, определяющей неминимальное взаимодействие F , которую мы определим как

$$H = \lambda \mathcal{F}[F(\phi)], \quad (5.10)$$

где λ – положительная постоянная, $\mathcal{F}[F(\phi)]$ – некоторый функционал, с обязательным условием $\mathcal{F}[F(\phi)] = 1$ для $F = 1$, то есть в случае ОТО получаем $\mathcal{F} = 1$ и стадию де Ситтера $H = \lambda$.

Далее, рассмотрим случай $\mathcal{F}[F(\phi)] = \sqrt{F(\phi)}$, для которого

$$H = \lambda \sqrt{F}, \quad \lambda > 0. \quad (5.11)$$

Подставляя связь параметра Хаббла и функции неминимального взаимодействия (5.11) в уравнения (5.6) – (5.7), получим

$$V(\phi) = 3\lambda^2 F^2 + 3\lambda \sqrt{F} \dot{F} + \frac{1}{2} \ddot{F}, \quad (5.12)$$

$$\omega(\phi) \dot{\phi}^2 = -\ddot{F}. \quad (5.13)$$

Теперь, в качестве примера, рассмотрим частный случай изменения неминимальной связи в течение времени

$$F(t) = \frac{B^2}{\lambda^2} t^{2n}, \quad (5.14)$$

которому соответствуют

$$H(t) = Bt^n, \quad (5.15)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(\frac{B}{n+1} t^{n+1}\right). \quad (5.16)$$

Таким образом, из уравнений (5.12)–(5.13), запишем

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} (3B^2 t^{4n} + 6Bnt^{3n-1} + n(2n-1)t^{2(n-1)}), \quad (5.17)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = -\frac{2n(2n-1)B^2}{\lambda^2} t^{2(n-1)}. \quad (5.18)$$

Для $-1 < n < 0$ получим режим расширения в «промежуточной инфляции», случай $n = 0$ (отсутствие взаимодействия поля и кривизны) соответствует экспоненциальному расширению де Ситтера, значение $n > 0$ подразумевает режим ускоренного расширения, происходящего быстрее экспоненциального с $\dot{H} > 0$.

Далее, рассмотрим точные решения уравнений (5.17)–(5.18) для трех классов моделей, соответствующих последнему режиму ускоренного расширения:

I. Первый класс моделей $n = 1/3$

$$F(t) = \frac{B^2}{\lambda^2} t^{2/3}, \quad H(t) = Bt^{1/3}, \quad a(t) = a_s \exp\left(\frac{3B}{4} t^{4/3}\right), \quad (5.19)$$

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} \left(3B^2 t^{4/3} - \frac{1}{9} t^{-4/3} + 2B\right), \quad (5.20)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = \frac{2B^2}{9\lambda^2} t^{-4/3}. \quad (5.21)$$

II. Второй класс моделей $n = 1$

$$F(t) = \frac{B^2}{\lambda^2} t^2, \quad H(t) = Bt, \quad a(t) = a_s \exp\left(\frac{B}{2} t^2\right), \quad (5.22)$$

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} (3B^2 t^4 + 6Bt^2 + 1), \quad (5.23)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = -\frac{B^2}{\lambda^2}. \quad (5.24)$$

III. Третий класс моделей $n = 1/2$

$$F(t) = \frac{B^2}{\lambda^2} t, \quad H(t) = B\sqrt{t}, \quad a(t) = a_s \exp\left(\frac{2B}{3} t^{3/2}\right), \quad (5.25)$$

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} (3B^2 t^2 + 3B\sqrt{t}), \quad (5.26)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = 0. \quad (5.27)$$

Теперь, задавая эволюцию скалярного поля (или зависимость $F = F(\phi)$), можно генерировать точные космологические решения для известных типов скалярно-тензорной теории гравитации.

Для первого класса моделей с эволюцией скалярного поля вида

$$\phi(t) = \frac{\lambda^2}{B^2} t^{2/3}, \quad (5.28)$$

из уравнений (5.19)–(5.21) получим

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} \left(\frac{3B^6}{\lambda^4} \phi^2 - \frac{\lambda^4}{9B^4} \phi^{-2} + 2B \right), \quad (5.29)$$

$$F(\phi) = \phi, \quad \omega(\phi) = \frac{B^4}{\lambda^4} \phi^{-1}, \quad (5.30)$$

что соответствует случаю гравитации Бранса-Дикке.

Для второго класса моделей со скалярным полем $\phi = t$ получим решения

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} (3B^2 \phi^4 + 6B \phi^2 + 1), \quad (5.31)$$

$$F(t) = \frac{B^2}{\lambda^2} \phi^2, \quad \omega = -\frac{B^2}{\lambda^2}, \quad (5.32)$$

которые соответствуют случаю индуцированной гравитации.

Для неминимальной связи вида $F(\phi) = 1 - \xi_{ST} \phi^2$, во втором классе моделей, получим

$$V(\phi) = 3\lambda^2 \xi_{ST} (\xi_{ST} - 2) \phi^4 - 6B \xi_{ST} \phi^2 + 3\lambda^2 + 6B + \frac{B^2}{\lambda^2}, \quad (5.33)$$

$$\sqrt{\xi_{ST} \phi} t = \pm \left(1 - \frac{B^2}{\lambda^2} t^2 \right)^{1/2}, \quad \omega(\phi) = \frac{\xi_{ST}^2 \phi^2}{\xi_{ST} \phi^2 - 1}. \quad (5.34)$$

Для третьего класса моделей с $F(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} \phi^2$ или $t = \phi^2$ потенциал

$$V(\phi) = \frac{B^2}{\lambda^2} (3B^2 \phi^4 + 3B \phi). \quad (5.35)$$

Для модели с функцией $F(\phi) = 1 - \xi_{ST} \phi^2$ получим

$$V(\phi) = 3\lambda^2 \xi_{ST}^2 \phi^4 - 6\lambda^2 \xi_{ST} \phi^2 + \frac{3B^2}{\lambda} \sqrt{1 - \xi_{ST} \phi^2} + 3\lambda^2 + \frac{B^2}{\lambda^2}, \quad (5.36)$$

$$\sqrt{\xi_{ST} \phi} t = \pm \left(1 - \frac{B^2}{\lambda^2} t \right)^{1/2}. \quad (5.37)$$

Таким образом, мы получили некоторые точные решения для частного случая выбора функционала вида $\mathcal{F}[F(\phi)] \equiv \sqrt{F}$.

Отметим, что возможен различный выбор функционала $\mathcal{F}[F(\phi)]$, который меняет структуру исходных уравнений (5.6) – (5.7), для построения точных космологических решений в рамках предложенного подхода.

5.3 Режим медленного скатывания в моделях СТГ-инфляции

Рассмотрим условия медленного скатывания на основе параметров

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}, \quad \xi = \epsilon\delta - \frac{1}{H}\dot{\delta}. \quad (5.38)$$

Для $H(t) = Bt^n$ с $B < 0$ получим следующие параметры медленного скатывания

$$\epsilon = \frac{n}{B}t^{-(n+1)}, \quad \delta = \frac{(n-1)}{2B}t^{-(n+1)}, \quad \xi = -\frac{(n-1)}{2B^2}t^{-2(n+1)}. \quad (5.39)$$

Таким образом, для значений $n = 1/3, 1, 1/2$ параметры медленного скатывания являются убывающими функциями (для $n = 1$ получим $\delta = 0, \xi = 0$). Следовательно, всегда можно выбрать постоянную B такую, чтобы выполнялись условия $\epsilon \ll 1, \delta \ll 1$ and $\xi \ll 1$.

Условия медленного скатывания в случае СТГ-инфляции

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}| \ll H^2|\phi|, \quad (5.40)$$

$$\frac{1}{2}|f(\phi)|\dot{\phi}^2 \ll |V(\phi)|, \quad (5.41)$$

обеспечиваются для $\frac{\dot{F}}{HF} \ll 1$ [281]. Для функции неминимального взаимодействия (5.14) и параметра Хаббла (5.15) с $B < 0$ получим $\delta_F = \frac{\dot{F}}{HF} = -2\epsilon$, следовательно, $|\delta_F| \ll 1$.

Далее, рассмотрим параметр ϵ_s , который также характеризует возможность режима медленного скатывания в моделях космологической инфляции на основе скалярно-тензорных теорий гравитации [282; 283]

$$\epsilon_s = \epsilon + \frac{1}{2}\delta_F + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.42)$$

Для $\delta_F = -2\epsilon$ получим $\epsilon_s = \mathcal{O}(\epsilon^2) \ll 1$. Таким образом, посредством выбора параметра B , можно обеспечить режим медленного скатывания для рассматриваемых моделей.

5.4 Космологические возмущения в СТГ-инфляции

Теория космологических возмущений для случая космологической инфляции на основе скалярно-тензорных теорий гравитации рассматривается, во многом, аналогично космологическим возмущениям в моделях на основе ОТО. Для вычисления параметров космологических возмущений воспользуемся методом, изложенным в работах [282–284], рассматривая значение параметра, связанного с выбором нормировки амплитуды гравитационных волн $s = 4$, для соответствия результатам, представленным в [282–284].

Параметры космологических возмущений на пересечении радиуса Хаббла ($k = aH$) записываются как [282–284]

$$\mathcal{P}_S = \frac{H^2}{8\pi^2 Q_S c_S^3}, \quad (5.43)$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{H^2}{2\pi^2 Q_T c_T^3}, \quad (5.44)$$

$$n_S - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln k} = \frac{\dot{\mathcal{P}}_S}{H(1 - \epsilon)\mathcal{P}_S}, \quad (5.45)$$

$$n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} = \frac{\dot{\mathcal{P}}_T}{H(1 - \epsilon)\mathcal{P}_T}, \quad (5.46)$$

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 4 \frac{Q_S}{Q_T}, \quad (5.47)$$

где

$$w_1 \equiv F, \quad w_2 \equiv 2HF + \dot{F}, \quad (5.48)$$

$$w_3 \equiv -9FH^2 - 9H\dot{F} + \frac{3}{2}(H\dot{F} - 2F\ddot{H} - \ddot{F}) =$$

$$-9FH^2 - 9H\dot{F} + \frac{3}{2}\omega(\phi)\dot{\phi}^2, \quad w_4 \equiv F, \quad (5.49)$$

$$Q_S \equiv \frac{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)}{3w_2^2}, \quad Q_T \equiv \frac{w_1}{s} = \frac{w_1}{4}. \quad (5.50)$$

Также, скорости распространения скалярных и тензорных возмущений $c_S = c_T = 1$, как и в случае теории гравитации Эйнштейна [285], в чем можно убедиться из непосредственной подстановки функций (5.48)–(5.49) в выражения [282–284]

$$c_S^2 \equiv \frac{3(2w_1^2w_2H - w_2^2w_4 + 4w_1\dot{w}_1w_2 - 2w_1^2\dot{w}_2)}{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)} = 1, \quad (5.51)$$

$$c_T^2 \equiv \frac{w_4}{w_1} = 1. \quad (5.52)$$

Отметим, что в случае $F = 1$ выражения (5.43)–(5.47) сводятся к ранее полученным формулам (3.79)–(3.83) для случая ОТО.

5.5 Параметры космологических возмущений для моделей

$$H = \lambda\sqrt{F}$$

Для рассматриваемых ранее моделей из выражений (5.43)–(5.47) получим

$$\mathcal{P}_S = \frac{\lambda^2(H^2 + \dot{H})^2}{8\pi^2(2\dot{H}^2 - H\ddot{H})}, \quad \mathcal{P}_T = \frac{2\lambda^2}{\pi^2}, \quad (5.53)$$

$$r = \frac{16(2\dot{H}^2 - H\ddot{H})}{(H^2 + \dot{H})^2}, \quad n_T = 0. \quad (5.54)$$

Далее, перепишем параметры космологических возмущений в терминах параметров медленного скатывания

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}, \quad \xi = \epsilon\delta - \frac{1}{H}\dot{\delta}, \quad (5.55)$$

в результате, получим

$$\mathcal{P}_S = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon} \left\{ \frac{(1-\epsilon)^2}{2(\epsilon-\delta)} \right\}, \quad (5.56)$$

$$r = 16\epsilon \left\{ \frac{2(\epsilon-\delta)}{(1-\epsilon)^2} \right\}, \quad (5.57)$$

$$n_S - 1 = \frac{\dot{\epsilon}\epsilon\delta - \dot{\delta}\epsilon^2 - 2\dot{\epsilon}\epsilon + \dot{\epsilon}\delta + \epsilon\dot{\delta}}{(1-\epsilon)^2(\epsilon-\delta)\epsilon H} = \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \left[2\epsilon\delta - 4\epsilon + 2\delta + (1-\epsilon) \left(\frac{\epsilon\delta - \xi}{\epsilon - \delta} \right) \right]. \quad (5.58)$$

Для $H(t) = Bt^n$ и $B < 0$ запишем параметры медленного скатывания $\epsilon = \frac{n}{B}t^{-(n+1)}$, $\delta = \frac{(n-1)}{2B}t^{-(n+1)}$ и $\xi = -\frac{(n-1)}{2B^2}t^{-2(n+1)}$, таким образом, из уравнений (5.53)–(5.58) получим

$$\mathcal{P}_S = \frac{\lambda^2(Bt^{n+1} - n)^2}{8\pi^2 n(n+1)}, \quad \mathcal{P}_T = \frac{2\lambda^2}{\pi^2}, \quad r = \frac{16n(n+1)}{(Bt^{n+1} - n)^2}, \quad (5.59)$$

$$n_S - 1 = -\frac{2(n+1)Bt^{n+1}}{(Bt^{n+1} - n)^2}, \quad n_T = 0. \quad (5.60)$$

Как было отмечено ранее в разделе § 5.3, параметры медленного скатывания $\epsilon, \delta \ll 1$ для представленных точных решений уравнений космологической динамики в моделях с неминимальным взаимодействием скалярного поля и скаляра Риччи можно получить посредством выбора постоянной B .

Также, из уравнений (5.59) и (5.60), имеем

$$n_S - 1 = -\frac{nr + 4\sqrt{n(n+1)}r}{8n}. \quad (5.61)$$

Далее, запишем число e -фолдов

$$N(t) = -\int H dt = \frac{B}{n+1}t^{n+1}, \quad (5.62)$$

и параметры космологических возмущений в терминах числа e -фолдов

$$r = \frac{16n(n+1)}{(N(n+1) + n)^2}, \quad \mathcal{P}_S = \frac{\lambda^2(N(n+1) - n)^2}{8\pi^2 n(n+1)}, \quad (5.63)$$

$$n_S - 1 = -\frac{2(n+1)^2 N}{(N(n+1) - n)^2}. \quad (5.64)$$

Теперь оценим значение параметра λ для трех классов моделей на основе выбора $N = 60$ и $\mathcal{P}_S = 2.1 \times 10^{-9}$ при завершении стадии инфляции.

I. Для первого класса моделей $n = 1/3$

$$r = 0.001, \quad \mathcal{P}_T = 2.4 \times 10^{-12}, \quad (5.65)$$

$$n_S - 1 = -0.033, \quad \lambda = 3.4 \times 10^{-6}. \quad (5.66)$$

II. Для второго класса моделей $n = 1$

$$r = 0.002, \quad \mathcal{P}_T = 4.7 \times 10^{-12}, \quad (5.67)$$

$$n_S - 1 = -0.034, \quad \lambda = 4.8 \times 10^{-6}. \quad (5.68)$$

III. Для третьего класса моделей $n = 1/2$

$$r = 0.002, \quad \mathcal{P}_T = 3.1 \times 10^{-12}, \quad (5.69)$$

$$n_S - 1 = -0.034, \quad \lambda = 3.9 \times 10^{-6}. \quad (5.70)$$

Все три класса моделей удовлетворяют наблюдательным ограничениям (3.93)-(3.96).

Для инфляции с гравитацией Эйнштейна $F = 1$ получим модель с космологической постоянной

$$\Lambda = 3\lambda^2 \approx 10^{-11}, \quad (5.71)$$

и экспоненциальным расширением $a(t) \propto \exp(\lambda t)$.

В данном случае были рассмотрены модели со степенным параметром Хаббла $H(t) = Bt^n$. На основе предложенного подхода можно построить и другие модели ранней Вселенной с произвольным $H(t)$ для случая $H(t) = \lambda\sqrt{F(t)}$.

Оценим значение тензорно-скалярного отношения r для таких моделей, рассматривая значения параметров медленного скатывания на пересечении радиуса Хаббла как $\epsilon \sim 10^{-2}$ и $\delta \sim 10^{-2}$. Из соотношения (5.57) получим $r \approx 32(\epsilon^2 - \epsilon\delta) \sim 10^{-3}$, что хорошо согласуется с современными наблюдательными ограничениями [83].

Следовательно, любые модели, построенные на основе предложенного подхода, являются верифицируемыми за счет модификации теории гравитации Эйнштейна. Также, данный подход подразумевает возможность генерирования точных космологических решений с различной эволюцией скалярного поля (или различными видами СТГ) для одинакового типа динамики $H(t)$ ранней Вселенной.

Соответствие теории гравитации случаю ОТО в современную эпоху, в контексте рассматриваемых моделей, приводит к наблюдаемому экспоненциальному расширению [6; 7; 27], обусловленному постоянным скалярным полем $\phi = const$, которое может рассматриваться в качестве темной энергии.

5.6 Параметрическая связь СТГ и ОТО

Теперь рассмотрим вид функций F и ω , которые преобразуют уравнения инфляционной динамики (5.6)–(5.7) со скалярно-тензорной гравитацией в уравнения (1.7)–(1.9) для случая ОТО в пространстве ФРУ без использования конформных преобразований метрики.

Такие функции можно определить следующим образом

$$F(t) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a^2(t)}, \quad F(\phi) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a^2(\phi)}, \quad (5.72)$$

$$\omega(t) = 1 - \beta_{ST} \left(\frac{3H^2}{\dot{H}a^2} \right), \quad \omega(\phi) = 1 + 3\beta_{ST} \left(\frac{H}{aH'_\phi} \right)^2, \quad (5.73)$$

где β_{ST} – константа неминимальной связи скалярного поля и скаляра Риччи.

Подставляя (5.72)–(5.73) в уравнения (5.6)–(5.7), получим уравнения полностью эквивалентные уравнениям динамики для случая ОТО

$$V(t) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (5.74)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (5.75)$$

или

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'^2_\phi, \quad (5.76)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_\phi, \quad (5.77)$$

что позволяет использовать точные решения, полученные ранее, для генерирования точных космологических решений в моделях инфляции, основанных на скалярно-тензорной теории гравитации вида $F(\phi) = 1 - \beta_{ST}f(\phi)$, частным случаем которой является $f(\phi) = \phi^2$ [16; 17; 137–139].

Следовательно, различие между моделями с СТГ и ОТО отсутствует на уровне фоновой динамики, но такое различие можно оценить по параметрам космологических возмущений.

Для анализа различия рассмотрим *параметр расхождения* $\Delta_{ST} = \beta_{ST}/a^2(t)$, в терминах которого функция неминимального взаимодействия и кинетическая функция записываются следующим образом

$$F(t) = 1 - \Delta_{ST}(t), \quad (5.78)$$

$$\omega(t) = 1 + 3 \frac{\Delta_{ST}(t)}{\epsilon(t)}, \quad (5.79)$$

где $\Delta_{ST} < 1$ и $\epsilon(t)$ – параметр медленного скатывания.

Параметры космологических возмущений для функции (5.78) определим из выражений (5.43)–(5.47), в результате, получим

$$r = 16 \left(1 - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} + \frac{\beta_{ST}\ddot{a}}{a\dot{a}^2} + \frac{2\beta_{ST}}{a^2} \right) = 16 \left[\epsilon + \frac{\beta_{ST}}{a^2}(3 - \epsilon) \right] = 16[\epsilon(1 - \Delta_{ST}) + 3\Delta_{ST}], \quad (5.80)$$

$$\mathcal{P}_S = \frac{2\dot{a}^2}{\pi^2(a^2 - \beta_{ST})r} = \frac{2H^2}{\pi^2(1 - \Delta_{ST})r}, \quad (5.81)$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{2\dot{a}^2}{\pi^2(a^2 - \beta_{ST})} = \frac{2H^2}{\pi^2(1 - \Delta_{ST})}, \quad (5.82)$$

$$n_S - 1 = \frac{1}{1 - \epsilon} \left[-2\epsilon - \frac{2\beta_{ST}}{a^2 - \beta_{ST}} - \frac{\dot{r}}{Hr} \right] = \frac{1}{1 - \epsilon} \left[-2\epsilon - \frac{\dot{r}}{Hr} - \frac{2\Delta_{ST}}{1 - \Delta_{ST}} \right], \quad (5.83)$$

$$n_T = \frac{1}{1 - \epsilon} \left[-2\epsilon - \frac{2\beta_{ST}}{a^2 - \beta_{ST}} \right] = \frac{1}{1 - \epsilon} \left[-2\epsilon - \frac{2\Delta_{ST}}{1 - \Delta_{ST}} \right]. \quad (5.84)$$

Далее, из выражений (5.43)–(5.47) и (3.79)–(3.83) определим различие по параметрам космологических возмущений между СГТ и ОТО

$$\frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_S^{(E)}} = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_T^{(E)}} = \frac{1}{1 - \Delta_{ST}}, \quad (5.85)$$

$$\frac{r}{r^{(E)}} = 1 - \Delta_{ST} + 3\frac{\Delta_{ST}}{\epsilon}, \quad (5.86)$$

$$n_S - n_S^{(E)} = -\frac{2\Delta_{ST}}{1 - \epsilon} \left[\frac{3\delta - 2\epsilon - 3}{\Delta_{ST}(3 - \epsilon) + \epsilon} + \frac{1}{1 - \Delta_{ST}} \right], \quad (5.87)$$

$$n_T - n_T^{(E)} = -\frac{2\Delta_{ST}}{(1 - \epsilon)(1 - \Delta_{ST})}, \quad (5.88)$$

где использовались определения (5.38) и выражение $\dot{\Delta}_{ST}/\Delta_{ST} = -2H$.

В случае малых значений параметра медленного скатывания $\epsilon \ll 1$ и параметра расхождения $\Delta_{ST} \ll 1$, $3\Delta_{ST} \approx \Delta_{ST}$ на пересечении радиуса Хаббла получим

$$\mathcal{P}_S \approx \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon_{ST}}, \quad (5.89)$$

$$\mathcal{P}_T \approx \frac{2H^2}{\pi^2}, \quad (5.90)$$

$$n_S \approx 1 - 4\epsilon_{ST} + 2\sigma_{ST}, \quad (5.91)$$

$$n_T \approx -2\epsilon_{ST}, \quad (5.92)$$

$$r \approx 16\epsilon_{ST}, \quad (5.93)$$

где параметры ϵ_{ST} и σ_{ST} определяются следующим образом

$$\epsilon_{ST} \equiv \epsilon + \Delta_{ST}, \quad (5.94)$$

$$\sigma_{ST} \equiv \varepsilon - \frac{\dot{\varepsilon}}{2H\varepsilon} = \varepsilon + \Delta_{ST} - \frac{\dot{\varepsilon}}{2H(\varepsilon + \Delta_{ST})} + \frac{\Delta_{ST}}{\varepsilon + \Delta_{ST}}. \quad (5.95)$$

Соотношения (5.89)–(5.93) полностью совпадают по форме с формулами для расчета параметров космологических возмущений в случае ОТО в приближении медленного скатывания (3.86)–(3.90) со смещенными на Δ_{ST} параметрами медленного скатывания (5.94)–(5.95).

Теперь оценим значение параметра расхождения Δ_{ST} на пересечении радиуса Хаббла, определив его в терминах числа e -фолдов $\Delta_{ST}(N) = \beta_{ST} a_0^{-2} e^{-2N}$. Таким образом, сильная связь скалярного поля и кривизны в момент начала инфляционной стадии с ускоренным расширением ранней Вселенной изменяется по закону $\Delta_{ST} \propto e^{-2N}$ и отношение расхождения между СГТ-инфляцией и стандартным инфляционным сценарием на основе ОТО в начале и в конце ускоренного расширения ранней Вселенной

$$\frac{\Delta_{ST}(N=60)}{\Delta_{ST}(N=0)} = e^{-120} \approx 7.7 \times 10^{-53}. \quad (5.96)$$

Следовательно, для влияния на параметры космологических возмущений, определяемых с помощью параметров медленного скатывания $\varepsilon \sim 10^{-2}$ и $\delta \sim 10^{-2}$, исходное расхождение должно быть порядка $\Delta_{ST}(N=0) \sim 10^{51}$, то есть $F(N=0) \sim 10^{51} \gg 1$.

Отметим, что оценка значения параметра неминимального взаимодействия скалярного поля и кривизны $\xi_{ST} = \beta_{ST}/a_0^2$ не является однозначной и зависит от типа бозонов скалярного поля. Например, если рассматривать поле ϕ в качестве голдстоуновского бозона, подразумевающего спонтанное нарушение глобальной симметрии, параметр $\xi_{ST} = 0$ [286; 287]. Для поля Хиггса в Стандартной Модели $\xi_{ST} \leq 0$, $\xi_{ST} \geq 1/6$ [288]. В общем случае, оценка значения параметра ξ_{ST} производилась в ряде работ [289–293], результатом которых являлось $\xi_{ST} = 1/6$ в случае асимптотической конформной инвариантности или $|\xi_{ST}| \rightarrow \infty$ (также, см. [138]). Отметим, что модели космологической инфляции с сильным взаимодействием скалярного поля и кривизны $|\xi_{ST}| \gg 1$ рассматривались в работах [294–298].

Тем не менее, для случая $\xi_{ST} \sim 1$ или в случае конформной связи скалярного поля и кривизны $\xi_{ST} = 1/6$, параметр расхождения на пересечении радиуса Хаббла $\Delta_{ST}(N=60) \simeq 0$ и параметры космологических возмущений в моделях инфляции на основе скалярно-тензорной гравитации с высокой точностью совпадают с параметрами космологических возмущений для стандартных моделей инфляции на основе гравитации Эйнштейна.

С дальнейшим расширением Вселенной параметр расхождения Δ_{ST} между СГТ и гравитацией Эйнштейна продолжает убывать. Следовательно, на современной стадии эволюции, гравитация в рассмотренных моделях соответствует случаю ОТО с более высокой точностью чем на стадии завершения инфляции.

5.7 Реконструкция теории гравитации по потенциалу скалярного поля

Теперь рассмотрим процедуру реконструкции функций $F(\phi)$ и $\omega(\phi)$, которые определяют тип скалярно-тензорной гравитации, по известному потенциалу скалярного поля $V(\phi)$ на основе соотношений (5.72)–(5.73) и уравнений (5.74)–(5.77).

В качестве примера, рассмотрим модель с потенциалом Хиггса (2.322) (в выражении для которого мы заменим φ на ϕ , следуя используемому в этой главе обозначению скалярного поля)

$$V(\phi) = \frac{3A^2}{64}\phi^4 + \left(\frac{3A\lambda}{4} - \frac{A^2}{8}\right)\phi^2 + 3\lambda^2, \quad (5.97)$$

которому соответствуют решения (2.319)–(2.321), полученные из уравнений (5.72)–(5.73), именно

$$H = nB \exp(-At) + \lambda, \quad (5.98)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left(\lambda t - \frac{nB}{A} e^{-At}\right), \quad (5.99)$$

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{8nB}{A}} \exp\left(-\frac{A}{2}t\right), \quad (5.100)$$

и, из уравнений (5.72)–(5.73), следует

$$F(\phi) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a_0^2} \left(\frac{A\phi^2}{8nB}\right)^{2\lambda/A} \exp\left(\frac{1}{4}\phi^2\right), \quad (5.101)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3\beta_{ST}}{a_0^2 A^2} \left(A\phi + \frac{8\lambda}{\phi}\right)^2 \left(\frac{A\phi^2}{8nB}\right)^{2\lambda/A} \exp\left(\frac{1}{4}\phi^2\right). \quad (5.102)$$

Для $t \rightarrow \infty$ получим $\phi = 0$, $F = 1$, также, $\bar{H} = \lambda$ и $V = 3\lambda^2$, что соответствует экспоненциальному расширению Вселенной. Значение параметра ω зависит от выбора параметров модели, именно, $\omega = 1$ для $2\lambda \geq A$ и $\omega \rightarrow \infty$ в случае $2\lambda < A$. Отметим, что на современной стадии эволюции Вселенной значение параметра ω оценивается как $|\omega| > 50000$ [299] и $\omega \rightarrow \infty$ соответствует случаю ОТО.

Таким образом, используя предложенный метод, можно восстановить тип скалярно-тензорной теории гравитации по точным решениям, полученным ранее в рамках ОТО, на основе параметрической связи (5.72)–(5.73). Расхождение по параметрам космологических возмущений будет определяться значением параметра Δ_{ST} .

Также отметим, что на основе соотношений (5.72)–(5.73) можно транслировать точные решения для Вселенной Фридмана с дополнительным материальным полем или ненулевой кривизной, полученные в главе 4 на случай космологических моделей, основанных на скалярно-тензорной гравитации.

5.8 Второе утверждение о эквивалентности космологических решений

На основании результатов, полученных в разделе § 5.6, сформулируем *второе утверждение о эквивалентности космологических решений*:

Для моделей космологической инфляции, содержащих скалярное поле и основанных на гравитации с неминимальным взаимодействием скалярного поля со скаляром Риччи

$$S_{STG} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{\omega(\phi)}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (5.103)$$

в плоском четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера, уравнения космологической динамики

$$3FH^2 + 3H\dot{F} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (5.104)$$

$$3FH^2 + 2H\dot{F} + 2F\dot{H} + \ddot{F} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0, \quad (5.105)$$

$$\omega\ddot{\phi} + 3\omega H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\omega'_\phi + V'_\phi - 6H^2F'_\phi - 3\dot{H}F'_\phi = 0. \quad (5.106)$$

приводятся к виду уравнений динамики в космологических моделях на основе ОТО

$$V(t) = 3H^2 + \dot{H}, \quad V(\phi) = 3H^2 - 2H'_\phi{}^2, \quad (5.107)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad \dot{\phi} = -2H'_\phi, \quad (5.108)$$

что означает эквивалентность фоновых космологических решений, для следующих параметров

$$F(t) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a^2(t)}, \quad \omega(t) = 1 - \beta_{ST} \left(\frac{3H^2}{\dot{H}a^2} \right), \quad (5.109)$$

$$F(\phi) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a^2(\phi)}, \quad \omega(\phi) = 1 + \frac{3}{2}\beta_{ST} \left(\frac{H}{aH'_\phi} \right)^2, \quad (5.110)$$

где β_{ST} – константа неминимальной связи скалярного поля и скаляра Риччи.

На основе «первого утверждения о эквивалентности фоновых космологических решений» § 2.7.6 это означает, что все независимые уравнения системы (5.104)–(5.106) приводятся к уравнению типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера (2.293) с дополнительными соотношениями между параметрами моделей.

Также для значений постоянной неминимального взаимодействия $\xi_{ST} < 10^{51}$ в начале инфляции, параметры космологических возмущений рассчитываются аналогично случаю моделей ранней Вселенной, основанных на гравитации Эйнштейна из соотношений (3.79)–(3.85). Точность такого соответствия определяется значением параметра $\xi_{ST} = \beta_{ST}/a_0^2$ или параметра расхождения Δ_{ST} .

Глава 6. Космологические модели на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне и Хорндески

Другим типом модифицированных теорий гравитации с неминимальным взаимодействием скалярного поля и кривизны, включающим поправки к гравитации Эйнштейна в ранней Вселенной является гравитация Эйнштейна-Гаусса-Бонне (ЭГБ), которая подразумевает взаимодействие скалярного поля ϕ и скаляра Гаусса-Бонне $R_{GB}^2 = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$. Скаляр Гаусса-Бонне появляется в низкоэнергетическом пределе (во втором порядке) действия гетеротических струн, которые используются для построения моделей квантовой гравитации [300; 301]. Также, скаляр Гаусса-Бонне (ГБ) присутствует во втором порядке гравитации Лавлока [136] с действием специального вида, представляющем собой сумму лавлоковских тензоров, которая обобщает гравитацию Эйнштейна (в первом порядке они совпадают). Также гравитация ЭГБ возникает как следствие реконструкции гравитационных теорий из истории расширения Вселенной [302].

Хорошо известно, что вариация ГБ-скаляра дает вклад в уравнения динамики только в пространстве с размерностью не менее пяти [303–305]. Очевидно, четырехмерное пространство не удовлетворяет этому условию, однако, при учете неминимального взаимодействия скалярного поля с ГБ-скаляром, уравнения динамики скалярного поля в пространстве четырех измерений отличаются от уравнений стандартной космологии [129; 130; 133; 302; 306–319].

В работах [312–314] анализ динамики ранней Вселенной в случае ЭГБ гравитации проводился на основе приближения медленного скатывания. В работе [318] рассматривались точные решения в моделях с нулевым потенциалом скалярного поля, однако, впоследствии, в работе [319] было показано, что такие модели являются неустойчивыми и неverified. Точные решения уравнений космологической динамики для ЭГБ-инфляции с ненулевым потенциалом рассматривались в работах [129; 133; 309; 316; 316; 317].

Наблюдательные ограничения в моделях со скалярными полями, неминимально связанными со скаляром Гаусса-Бонне, рассматривались в работах [133; 308; 314], также параметры космологических возмущений для случая ЭГБ-инфляции были рассчитаны в работах [133; 311; 312]. Модели темной энергии со скаляром Гаусса-Бонне, в контексте повторного ускоренного расширения Вселенной, были построены в работах [129; 309].

Спецификой моделей ранней Вселенной, построенных на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне, по сравнению с рассмотренными в предыдущих разделах теориями гравитации, является (в общем случае) зависимость скоростей распространения скалярных и тензорных возмущений от космического времени.

В настоящей главе будут рассмотрены методы построения точных решений уравнений космологической динамики для моделей инфляции этого типа. Также будет произведена оценка влияния неминимального взаимодействия скалярного поля и ГБ-скаляра на характер инфляционного процесса и предложен метод построения ОТО-подобных моделей для космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Далее, в контексте обобщения предложенных методов, рассмотрим модели космологической инфляции на основе гравитации Хорндески [29] как скалярно-тензорной теории гравитации наиболее общего вида. В данном случае рассматривается гравитация Хорндески, соответствующая обобщенной скалярно-тензорной теории гравитации, включающей неминимальное взаимодействие скалярного поля как со скаляром Гаусса-Бонне, так и со скаляром Риччи.

На основе ранее полученных результатов, сформулированных в утверждениях о эквивалентности космологических решений, рассматриваются методы построения моделей инфляции на основе гравитации Хорндески, аналогичные построенным на основе гравитации Эйнштейна.

6.1 Уравнения динамики для ЭГБ-инфляции

Рассмотрим действие, определяющее уравнения динамики для рассматриваемой модели, которое включает каноническое скалярное поле, неминимально взаимодействующее со скаляром Гаусса-Бонне посредством некоторой функции неминимальной связи $\xi(\phi)$

$$S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) - \frac{1}{2}\xi(\phi)R_{GB}^2 \right], \quad (6.1)$$

где R – скаляр Риччи, $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор, ϕ – скалярное поле, $V(\phi)$ – потенциал и $R_{GB}^2 = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ – скаляр Гаусса-Бонне.

Запишем уравнения космологической динамики, соответствующие действию (6.1) в пространственно плоской Вселенной Фридмана [129; 133; 309; 316; 317]

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 12\dot{\xi}H^3, \quad (6.2)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}^2 - 4\ddot{\xi}H^2 - 4\dot{\xi}H(2\dot{H} - H^2), \quad (6.3)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} + 12\xi_{,\phi}H^2 (\dot{H} + H^2) = 0. \quad (6.4)$$

Из трех уравнений динамики (6.2)–(6.4) независимыми являются только два, по этой причине, для анализа космологических моделей на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне, рассмотрим первые два из них.

Для случая $\xi = const$ уравнения (6.2)–(6.4) переходят в (1.7)–(1.9), соответствующие моделям инфляции на основе гравитации Эйнштейна.

Для анализа космологических моделей, основанных на ЭГБ-гравитации, рассмотрим две задачи:

1. Построение эффективного метода точных аналитических решений уравнений космологической динамики для случая ЭГБ-инфляции.
2. Сопоставление параметров космологических моделей для случая ЭГБ-инфляции с параметрами моделей ранней Вселенной, основанных на ОТО.

Обе этих задачи могут быть успешно решены после нахождения связи между функцией, определяющей неминимальное взаимодействие поля и скаляра Гаусса-Бонне ξ и параметрами Хаббла для случая ЭГБ-инфляции H и инфляции на основе ОТО H_E .

6.2 Связь между ОТО и ЭГБ-гравитацией

Запишем уравнения космологической динамики для ЭГБ-инфляции

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 12\xi H^3, \quad (6.5)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}^2 - 4\ddot{\xi}H^2 - 4\dot{\xi}H(2\dot{H} - H^2). \quad (6.6)$$

В случае $\xi = const$ уравнения (6.5)–(6.6) сводятся к уравнениям динамики на основе ОТО

$$3H_E^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}_E^2 + V_E(\phi), \quad (6.7)$$

$$\dot{H}_E = -\frac{1}{2}\dot{\phi}_E^2, \quad (6.8)$$

где индекс E соответствует гравитации Эйнштейна.

Рассмотрим метод построения точных решений уравнений (6.5)–(6.6) на основе функциональной связи $H_E = f(H, \dot{\xi})$ между моделями, основанными на гравитации Эйнштейна и космологическими моделями с гравитацией ЭГБ, определенной таким образом, чтобы в случае $\xi = const$ уравнения (6.5)–(6.6) переходили в (6.7)–(6.8) и $H = H_E$, $a = a_E$, $\phi = \phi_E$, $V = V_E$.

Связь между параметрами Хаббла для случая ЭГБ-инфляции H и стандартной инфляции H_E определим следующим образом

$$H_E = H(1 - 2\dot{\xi}H), \quad (6.9)$$

что, после подстановки (6.9) в уравнения (6.7)–(6.8) приводит к исходным (6.5)–(6.6).

Используя данную связь, запишем уравнения (6.5)–(6.6) как

$$V(\phi) = -2H^2 + 5HH_E + \dot{H}_E, \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H}_E + HH_E - H^2, \quad (6.11)$$

$$\dot{\xi} = \frac{H - H_E}{2H^2}, \quad (6.12)$$

где случаю $\xi = const$ соответствует $H = H_E$, $a = a_E$, и уравнения (6.10)–(6.11) сводятся к (6.7)–(6.8).

Поскольку уравнения (6.10)–(6.12) содержат пять неизвестных функций, для построения точных решений необходимо задать две из них или определить дополнительные соотношения между ними, руководствуясь требованием ускоренного расширения Вселенной и рассматривая физические потенциалы, соответствующие появлению элементарных частиц по завершении стадии космологической инфляции.

В качестве метода генерирования точных космологических решений рассмотрим априорное определение связи между H и H_E , в контексте которого рассмотрим три случая: модели, связанные со стандартной инфляцией как $H_E = H + \beta$, где β – некоторая произвольная постоянная, модели без связи со стандартной инфляцией $H_E = 0$ и модели, совпадающие со стандартной инфляцией только на стадии де Ситтера $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$.

Альтернативным методом построения точных решений является задание эволюции функции неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне $\xi = \xi(t)$, что сразу определяет связь между H и H_E , исходя из уравнения (6.12).

6.2.1 Космологические модели с $H_E = H + \beta$

В этом случае, уравнения (6.10)–(6.12) записываются следующим образом

$$V(\phi) = 3H^2 + 5\beta H + \dot{H}, \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \beta H - \dot{H}, \quad (6.14)$$

$$\beta = -2\dot{\xi}H^2. \quad (6.15)$$

Рассмотрим следующие параметр Хаббла и постоянную β

$$H(t) = C \exp(-At), \quad (6.16)$$

$$\beta = \frac{A^2 B^2}{8C} - A. \quad (6.17)$$

В результате, получим точные решения уравнений (6.13)–(6.15) с потенциалом Хиггса

$$\phi(t) = B \exp\left(-\frac{A}{2}t\right), \quad (6.18)$$

$$V(\phi) = \frac{\phi^2}{4B^2} \left(\frac{24C^2}{B^2} \phi^2 + 5A^2B^2 - 48AC \right), \quad (6.19)$$

$$\dot{\xi} = \frac{A(8C - AB^2)}{16C^2} \exp(2At), \quad (6.20)$$

$$\xi(\phi) = \frac{(8C - AB^2)B^4}{32C^2} \phi^{-4}. \quad (6.21)$$

Для случая $8C = AB^2$ получим решения для стандартной инфляции с гравитацией Эйнштейна.

При другом выборе соотношения между параметрами $C = \frac{5}{48}AB^2$ получим потенциал

$$V(\phi) = \frac{25}{384}A^2\phi^4, \quad (6.22)$$

соответствующий хаотической инфляции [33], со следующей функцией

$$\xi(\phi) = -\frac{4.608}{A^2}\phi^{-4}, \quad (6.23)$$

также с параметром Хаббла и скалярным полем, следующими из (6.16) и (6.18).

6.2.2 Космологические модели с $H_E = 0$

Исходя из рассматриваемого условия, мы можем записать решения уравнений (6.10)–(6.12) для фантомных полей с отрицательной кинетической энергией в следующем виде

$$V(\phi) = -2H^2, \quad (6.24)$$

$$\dot{\phi}^2 = 2H^2, \quad (6.25)$$

$$2\dot{\xi}H = 1. \quad (6.26)$$

Таким образом, посредством выбора параметра Хаббла $H = H(\phi)$ из уравнения (6.24) можно сразу определить потенциал скалярного поля.

Также, учитывая, что $\dot{\xi} = \xi_{,\phi}\dot{\phi}$, из уравнений (6.25)–(6.26) получим

$$\xi_{,\phi} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}H^2}. \quad (6.27)$$

Теперь, в качестве примера, рассмотрим параметр Хаббла следующего вида

$$H(\phi) = \frac{A}{\sqrt{12}} \cos \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \phi \right), \quad A > 0. \quad (6.28)$$

Из уравнений (6.24)–(6.27) получим точные решения

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{At} - 1}{e^{At} + 1} \right), \quad (6.29)$$

$$V(\phi) = -\frac{A^2}{6} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \phi \right), \quad (6.30)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\sqrt{6(1 + e^{2At})}}{A(1 + e^{At})}, \quad \xi(\phi) = \pm \frac{2\sqrt{3}}{A^2} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \phi \right) + \operatorname{const}, \quad (6.31)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\operatorname{arcsinh}(e^{At}) - \operatorname{arth} \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2At} + 1}} \right) \right] \right\}. \quad (6.32)$$

Также, можно записать уравнения (6.24)–(6.26) в другой форме

$$\phi(t) = \pm \sqrt{2} \ln(a(t)) + c, \quad (6.33)$$

$$V(t) = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2, \quad (6.34)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{2} \int \frac{a}{\dot{a}} dt, \quad (6.35)$$

где c – константа интегрирования.

Таким образом, по заданному масштабному фактору $a = a(t)$, из уравнений (6.33)–(6.35) можно определить остальные параметры космологических моделей.

В качестве примера, рассмотрим масштабный фактор

$$a(t) = A \exp(Bt^m), \quad m > 0, \quad B > 0. \quad (6.36)$$

Из уравнений (6.33)–(6.35) запишем точные решения

$$\phi(t) = \pm \sqrt{2} B t^m + c_1, \quad c_1 = c \pm \sqrt{2} \ln A, \quad (6.37)$$

$$V(\phi) = -2B^2 m^2 \left(\pm \frac{\phi - c_1}{\sqrt{2} B} \right)^{\frac{2(m-1)}{m}}, \quad (6.38)$$

$$\dot{\xi} = \frac{t^{1-m}}{2Bm}, \quad (6.39)$$

$$\xi(\phi) = \frac{1}{2(2-m)mB} \left(\pm \frac{\phi - c_1}{\sqrt{2} B} \right)^{\frac{2-m}{m}} + \operatorname{const}, \quad (6.40)$$

для моделей инфляции со степенным потенциалом.

В случае специального выбора параметра $m = 1/2$ и $m = 1/3$ получим потенциалы $V(\phi) \propto -(\phi - c_1)^{-2}$ и $V(\phi) \propto -(\phi - c_1)^{-4}$.

6.2.3 Космологические модели с $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$

В таком случае уравнения (6.10)–(6.12) записываются следующим образом

$$V(\phi) = 3H^2 + 6\dot{H} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{H}}{H} \right), \quad (6.41)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{H}}{H} \right), \quad (6.42)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\dot{H}}{2H^3}. \quad (6.43)$$

Из соотношения $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$ видно, что $H_E = H$ только для постоянного параметра Хаббла $H = const$, что соответствует стадии де Ситтера. Определяя $const = \sqrt{\Lambda/3}$, где Λ – космологическая постоянная, получим $V = \Lambda$, $\phi = const$, $\xi = const$, с масштабным фактором $a(t) \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$.

Теперь рассмотрим модель космологической инфляции с параметром Хаббла

$$H(t) = At^n, \quad n \neq -1, \quad (6.44)$$

или с масштабным фактором

$$a(t) = a_0 \exp \left(\frac{A}{n+1} t^{n+1} \right). \quad (6.45)$$

Точные решения для степенной ЭГБ-инфляции с $n = -1$ для случая степенной инфляции рассматривались в работах [311;316] на основе других методов построения точных решений.

Соответствующий параметр Хаббла для стандартной инфляции

$$H_E(t) = At^n + \frac{n}{t}. \quad (6.46)$$

Из уравнений (6.41)–(6.43) получим

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2n} \ln t + c_2, \quad (6.47)$$

$$V = 3A^2 \exp \left(\mp\sqrt{2n}\varphi \right) + 6An \exp \left(\mp\frac{n-1}{\sqrt{2n}}\varphi \right) - n \exp \left(\pm\sqrt{\frac{2}{n}}\varphi \right), \quad (6.48)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{n}{2A^2} t^{-2n-1}, \quad (6.49)$$

$$\xi(\varphi) = \frac{1}{4A^2} \exp \left(\pm\sqrt{2n}\varphi \right) + const, \quad (6.50)$$

точные космологические решения для экспоненциального потенциала, где $\varphi = \phi - c_2$ и c_2 – константа интегрирования.

6.3 Параметр расхождения между стандартной и ЭГБ-инфляцией

Теперь запишем систему уравнений космологической динамики для случая ЭГБ-инфляции в терминах параметра расхождения $\Delta_{GB}(t)$

$$V(\phi) = 3H^2 + 5H\Delta_{GB} + \dot{H} + \dot{\Delta}_{GB}, \quad (6.51)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = H\Delta_{GB} - \dot{H} - \dot{\Delta}_{GB}, \quad (6.52)$$

$$\Delta_{GB} = -2\dot{\xi}H^2. \quad (6.53)$$

Отметим, что Δ_{GB} определяет различие между параметрами Хаббла для случая гравитации Эйнштейна (или минимального взаимодействия скалярного поля и кривизны) и Эйнштейна-Гаусса-Бонне $\Delta_{GB} = H_E - H$. В случае $\dot{\xi} = 0$ получим $\Delta_{GB} = 0$, и система (6.51)–(6.52) переходит в уравнения стандартной космологии на основе ОТО.

Теперь рассмотрим модели ЭГБ-инфляции, в которых параметр Хаббла и эволюция скалярного поля совпадают со случаем гравитации Эйнштейна $H = H_E$, $\phi = \phi_E$.

Для данного случая, параметр расхождения Δ_{GB} определим из следующего уравнения

$$H\Delta_{GB} - \dot{\Delta}_{GB} = 0, \quad (6.54)$$

из которого получим линейную связь параметра расхождения и масштабного фактора $\Delta_{GB} = a(t)\alpha_{GB}$, где α_{GB} – постоянный параметр, определяющий взаимодействие поля и скаляра Гаусса-Бонне.

Подставляя параметр расхождения $\Delta_{GB} = a(t)\alpha_{GB}$ в уравнения (6.51)–(6.53), получим

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H} + 6\dot{a}\alpha_{GB}, \quad (6.55)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (6.56)$$

$$\dot{\xi} = -\left(\frac{\alpha_{GB}}{2}\right)\frac{a^3}{\dot{a}^2} = -\left(\frac{\alpha_{GB}}{2}\right)\frac{a}{H^2}. \quad (6.57)$$

Следовательно, потенциал, в данном случае, будет отличаться от потенциала скалярного поля в моделях с гравитацией Эйнштейна на слагаемое $U_{GB} = 6\dot{a}\alpha_{GB}$, которое появляется за счет взаимодействия поля и скаляра Гаусса-Бонне.

Таким образом, параметр расхождения Δ_{GB} можно использовать в качестве генерирующей функции и использовать отличные от линейной зависимости случаи для построения точно разрешимых космологических моделей, основанных на гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

6.4 Влияние неминимальной связи на космологическую динамику

Влияние неминимальной связи на динамику можно оценить по знаку $\dot{\xi}$, в случае убывания функции $\xi(t)$ ($\dot{\xi} < 0$) получим $H - H_E < 0$, что означает уменьшение темпа расширения Вселенной относительно стандартной космологической модели и обратное влияние (ускорение) в случае роста функции неминимальной связи $\xi(t)$.

Для плоской Вселенной ФРУ можно оценить влияние неминимального взаимодействия на динамику посредством разности числа e -фолдов между стандартной и ЭГБ-инфляцией

$$\Delta_N = N - N_E = \int_{t_i}^{t_e} (H - H_E) dt = 2 \int_{t_i}^{t_e} \dot{\xi} H^2 dt = - \int_{t_i}^{t_e} \Delta_{GB} dt, \quad (6.58)$$

где t_i и t_e - времена, соответствующие началу и завершению инфляционной стадии.

Для моделей с $H_E = H + \beta$ получим $\Delta_N = -\beta(t_e - t_i)$, то есть различие по числу e -фолдов зависит от значения и знака параметра β .

Для моделей с $H_E = H + \dot{H}H^{-1}$ получим

$$\Delta_N = - \int_{t_i}^{t_e} \frac{\dot{H}}{H} dt = - \int_{H_i}^{H_e} \frac{dH}{H} = \ln \left(\frac{H_i}{H_e} \right) \quad (6.59)$$

Для моделей с $H_E = 0$ различие $\Delta_N = N = \int_{t_i}^{t_e} H dt$, то есть равно числу e -фолдов в ЭГБ-инфляции.

Таким образом, в результате найденной в явном виде функциональной связи параметров Хаббла для стандартной инфляции, основанной на ОТО и инфляции с ЭГБ гравитацией $H_E = f(H, \dot{\xi})$, появляется возможность простой процедуры генерирования точных решений с физическими потенциалами, также возможность качественной (по знаку $\dot{\xi}$) и количественной (по значению Δ_N) оценки влияния неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне на космологическую динамику.

6.5 Влияние неминимальной связи на потенциал

Теперь рассмотрим влияние неминимального взаимодействия (связи) скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне на потенциал для моделей с линейной зависимостью функции неминимального взаимодействия от масштабного фактора $\Delta_{GB} = a(t)\alpha_{GB}$, полученных в разделе § 6.3.

В качестве примера, рассмотрим космологическую модель со следующим параметром Хаббла и соответствующим масштабным фактором

$$H_E(t) = H(t) = -At + B, \quad a(t) = a_0 \exp\left(Bt - \frac{A}{2}t^2\right). \quad (6.60)$$

Точные решения для этой модели получим из уравнений (6.55)-(6.57)

$$\phi(t) = \sqrt{2A}t, \quad (6.61)$$

$$\xi(\phi) = \frac{a_0\alpha_{GB}}{2} \left[\frac{\exp\left(\frac{B^2}{2A} - \frac{(\sqrt{\frac{A}{2}}\phi - B)^2}{2A}\right)}{A\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\phi - B\right)} + \sqrt{\frac{\pi e^{\frac{B^2}{A}}}{2A^3}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\frac{A}{2}}\phi - B}{\sqrt{2A}}\right) \right] + const, \quad (6.62)$$

$$V(\phi) = 3\left(-\sqrt{\frac{A}{2}}\phi + B\right)^2 + 6a_0\alpha_{GB}\left(-\sqrt{\frac{A}{2}}\phi + B\right)\exp\left(\frac{B\phi}{\sqrt{2A}} - \frac{1}{4}\phi^2\right) - A, \quad (6.63)$$

где «erf» означает функцию ошибок.

На Рис. 6.1 представлен потенциал для различных значений константы связи скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне.

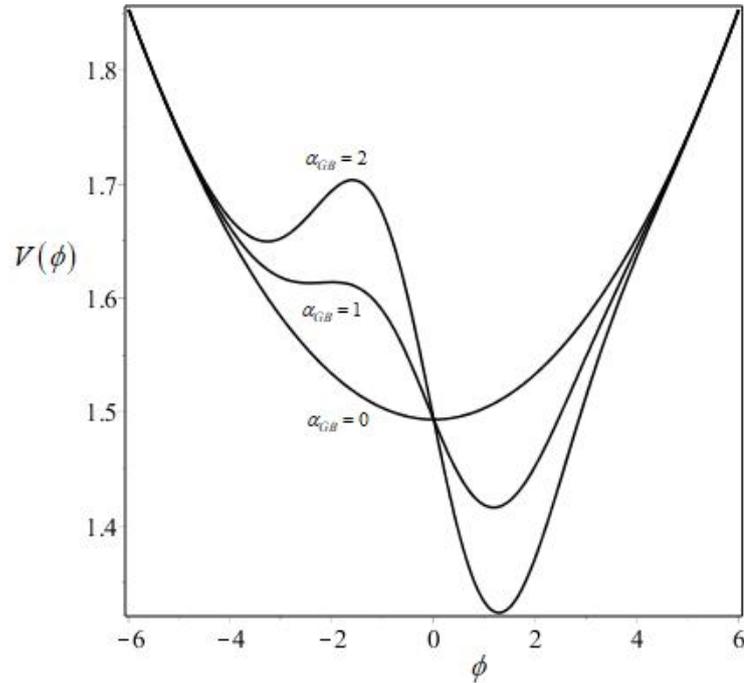


Рисунок 6.1 — Потенциал скалярного поля $V(\phi)$ для различных значений параметра неминимального взаимодействия α_{GB} .

Случай $\alpha_{GB} = 0$ соответствует хаотической инфляции с различным возможным выбором исходного вакуумного состояния [33], для $\alpha_{GB} = 1$ получим сценарий «новой инфляции» [33; 43] с переходом поля из определенного состояния фальшивого вакуума в состояние истинного вакуума (значение потенциала в минимуме можно определять с помощью выбора параметров модели так чтобы $V(\phi)_{min} = 0$ для каждого случая), случай

$\alpha_{GB} > 1$ соответствует сценарию «старой инфляции» [3; 33] с туннелированием скалярного поля к минимуму потенциала, причем высота потенциального барьера зависит от значения параметра α_{GB} .

В данном случае, взаимодействие скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне изменяет форму потенциала и создает определенное состояние фальшивого вакуума, из которого скалярное поле переходит в состояние истинного вакуума. Такой тип потенциалов (для случая $\alpha_{GB} = 1$) часто рассматривается в контексте теории струн и супергравитации [16], что соответствует исходному утверждению о том, что скаляр Гаусса-Бонне возникает в низкоэнергетическом пределе действия для струн. Следовательно, неминимальное взаимодействие скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне изменяет физическое содержание процесса инфляции ввиду модификации потенциала. Зависимости формы потенциала от значения параметра α_{GB} можно получить и для других моделей ранней Вселенной.

6.6 Космологические возмущения в ЭГБ-инфляции

Финальным шагом построения теорий космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне является верификация моделей по параметрам космологических возмущений на основе функций [282–284] в терминах параметра расхождения

$$w_1 \equiv 1 - 4H\dot{\xi} = 1 + 2\frac{\Delta_{GB}}{H}, \quad (6.64)$$

$$w_2 \equiv 2H - 12H^2\dot{\xi} = 2(H + 3\Delta_{GB}), \quad (6.65)$$

$$w_3 \equiv -9H^2 + \frac{3}{2}\dot{\phi}^2 + 72H^3\dot{\xi} = -9H^2 - 33H\Delta_{GB} - 3(\dot{H} + \dot{\Delta}_{GB}), \quad (6.66)$$

$$w_4 \equiv 1 - 4\ddot{\xi} = 1 + 2\frac{\dot{\Delta}_{GB}}{H^2} - 4\frac{\Delta_{GB}\dot{H}}{H^3}, \quad (6.67)$$

со следующими скоростями распространения скалярных и тензорных возмущений

$$c_S^2 \equiv \frac{3(2w_1^2w_2H - w_2^2w_4 + 4w_1\dot{w}_1w_2 - 2w_1^2\dot{w}_2)}{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)}, \quad (6.68)$$

$$c_T^2 \equiv \frac{w_4}{w_1}, \quad (6.69)$$

и спектрами мощности

$$\mathcal{P}_S = \frac{H^2}{8\pi^2 Q_S c_S^3}, \quad (6.70)$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{H^2}{2\pi^2 Q_T c_T^3}, \quad (6.71)$$

где

$$Q_S \equiv \frac{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)}{3w_2^2}, \quad Q_T \equiv \frac{w_1}{s}, \quad (6.72)$$

$$Q_S = \frac{(1 + 2\frac{\Delta_{GB}}{H})}{3(2H + 6\Delta_{GB})^2} \left[9(2H + 6\Delta_{GB})^2 + 4 \left(1 + 2\frac{\Delta_{GB}}{H} \right) (-9H^2 - 33H\Delta_{GB} - 3\dot{H} - 3\dot{\Delta}_{GB}) \right], \quad (6.73)$$

$$Q_T = \frac{1}{s} \left(1 + 2\frac{\Delta_{GB}}{H} \right), \quad (6.74)$$

и тензорно-скалярным отношением

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 4 \times \frac{Q_S}{Q_T} \left(\frac{c_S}{c_T} \right)^3. \quad (6.75)$$

В общем случае, $c_S = c_S(t)$ и $c_T = c_S(t)$ и время пересечения радиуса Хаббла определяется из условия $c_S k = aH$ для скалярных возмущений и $c_T k = aH$ для тензорных возмущений. Также определение скоростей распространения скалярных и тензорных возмущений дает дополнительный критерий верификации таких моделей, именно $c_S^2 > 0$ и $c_T^2 > 0$.

Определим выражения для скоростей распространения космологических возмущений в терминах параметра расхождения и параметра Хаббла

$$c_S^2 = \frac{Q_{S1}^{(\Delta_{GB})}}{Q_{S2}^{(\Delta_{GB})}}, \quad (6.76)$$

где $Q_{S1}^{(\Delta_{GB})}$ и $Q_{S2}^{(\Delta_{GB})}$ определяются следующим образом

$$Q_{S1}^{(\Delta_{GB})} \equiv H^2 \dot{H} - H^3 \Delta_{GB} - 7H^2 \Delta_{GB}^2 - 12H \Delta_{GB}^3 + H^2 \dot{\Delta}_{GB} + 4\dot{\Delta}_{GB} \Delta_{GB} H + 6\dot{\Delta}_{GB} \Delta_{GB}^2 + 4H \dot{H} \Delta_{GB} - 12\Delta_{GB}^3 \frac{\dot{H}}{H}, \quad (6.77)$$

$$Q_{S2}^{(\Delta_{GB})} \equiv (H + 2\Delta_{GB})(H\dot{H} - H^2 \Delta_{GB} - 5H \Delta_{GB}^2 + H \dot{\Delta}_{GB} + 2\dot{\Delta}_{GB} \Delta_{GB} + 2\Delta_{GB} \dot{H}). \quad (6.78)$$

$$c_T^2 = \frac{Q_{T1}^{(\Delta_{GB})}}{Q_{T2}^{(\Delta_{GB})}}, \quad (6.79)$$

где $Q_{T1}^{(\Delta_{GB})}$ и $Q_{T2}^{(\Delta_{GB})}$ определяются как

$$Q_{T1}^{(\Delta_{GB})} \equiv H + 2\frac{\dot{\Delta}_{GB}}{H} - 4\Delta_{GB} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (6.80)$$

$$Q_{T2}^{(\Delta_{GB})} \equiv H + 2\Delta_{GB}. \quad (6.81)$$

Таким образом, выражения для наклонов спектров мощности скалярных и тензорных возмущений записывается следующим образом

$$n_S - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln k} = \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln \left(\frac{aH}{c_S} \right)}, \quad n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} = \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln \left(\frac{aH}{c_T} \right)}. \quad (6.82)$$

В случае степенной инфляции скорости распространения космологических возмущений c_S и c_T являются постоянными, параметры космологических возмущений для степенного расширения в ЭГБ-инфляции рассматривались ранее в работах [311;316]. Также, для случая медленного изменения скоростей $c_S \simeq const$ и $c_T \simeq const$ получим

$$n_S - 1 = \frac{c_S \dot{\mathcal{P}}_S}{H(1 - \epsilon)\mathcal{P}_S}, \quad n_T = \frac{c_T \dot{\mathcal{P}}_T}{H(1 - \epsilon)\mathcal{P}_T}. \quad (6.83)$$

В качестве примера анализа космологических возмущений рассмотрим модель с масштабным фактором (6.60), точные решения для которой рассматривались в разделе § 6.5. В данном случае (равно как и в общем случае), выражения для параметров космологических возмущений и скоростей распространения достаточно громоздки, по этой причине, приведем только результаты расчетов, на основе соотношений (6.64)–(6.82), после подстановки в них масштабного фактора (6.60) и параметра расхождения $\Delta_{GB} = \alpha_{GB}a(t)$.

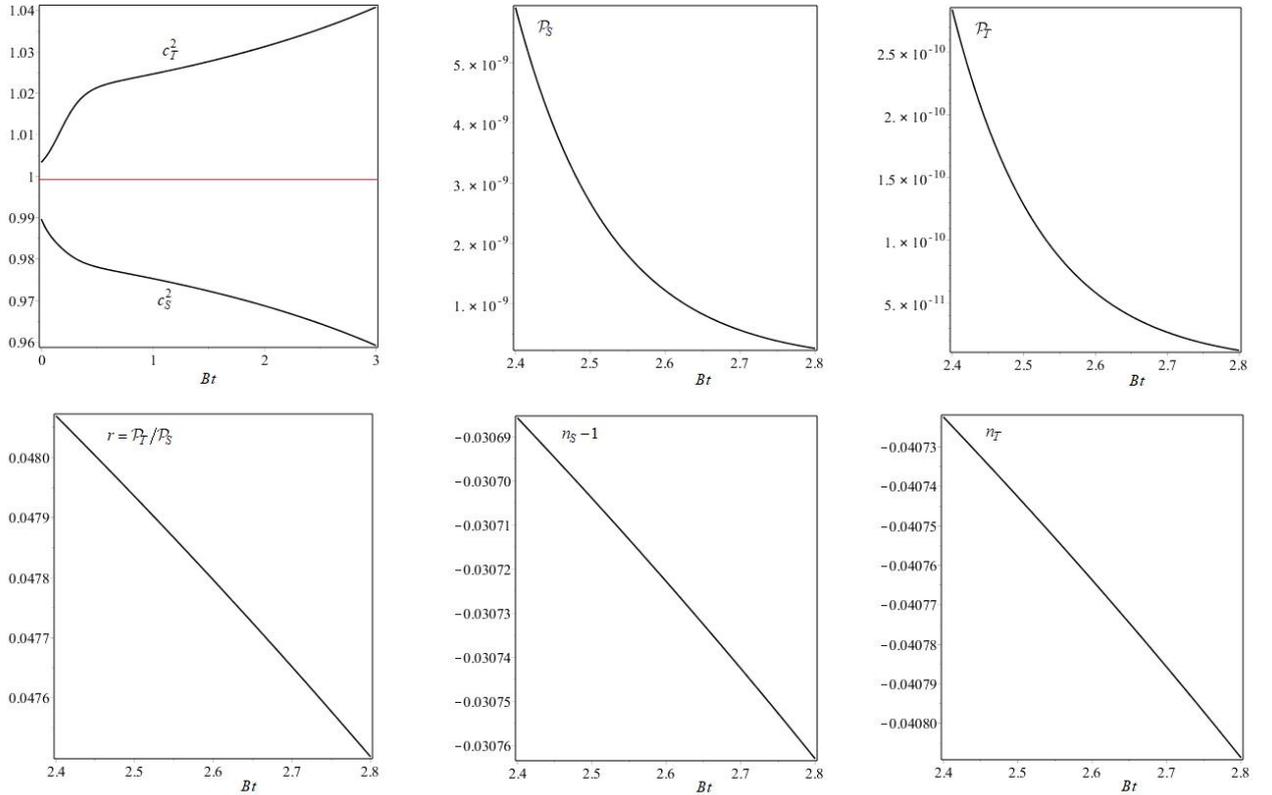


Рисунок 6.2 — Параметры космологических возмущений и скорости распространения скалярных и тензорных мод для модели ЭГБ-инфляции с масштабным фактором (6.60) в случае $\alpha_{GB} = 1$, $A = 10$.

На Рис. 6.2 представлены скорости распространения и значения параметров космологических возмущений для времени пересечения радиуса Хаббла $t = t_H$ (с нормировкой тензора гравитационных волн $s = 4$), для которого параметры соответствуют наблюдательным ограничениям (3.93)–(3.96). Отметим, что $c_S^2 > 0$ и $c_T^2 > 0$, что является критерием

стабильности данной модели, также, рассматривая асимптотическое поведение скоростей распространения возмущений, получим $c_S(t \rightarrow \infty) = 1$ и $c_T(t \rightarrow \infty) = 1$.

Также для вычисления параметров космологических возмущений используются методы, основанные на приближении медленного скатывания, в рамках которых параметры медленного скатывания рассчитываются из потенциала $V(\phi)$ и функции неминимального взаимодействия $\xi(\phi)$, определенных в терминах скалярного поля [133; 148]. В данных работах результаты соответствовали случаю $s = 1$ нормировки амплитуды тензора гравитационных волн.

Отметим, что, исходя из эволюции параметра расхождения $\Delta_{GB} = \alpha_{GB}a(t)$, на пересечении радиуса Хаббла для 60-ти e -фолдов получим $\Delta_{GB}(N = 60)/\Delta_{GB}(N = 0) = \exp(60) \approx 10^{26}$. Таким образом, для случая сопоставимых эффектов ОТО и ЭГБ на пересечении радиуса Хаббла исходное расхождение в моделях данного типа должно быть порядка $\Delta_{GB}(N = 0) \sim 10^{-26}$, что, однако, не является обязательным условием для верификации моделей ЭГБ-инфляции по параметрам космологических возмущений.

6.7 Соответствие космологических моделей на основе ОТО и ЭГБ-гравитации

Теперь получим космологические решения в ЭГБ-инфляции, полностью совпадающие со случаем гравитации Эйнштейна.

Для этого рассмотрим систему уравнений космологической динамики в следующем виде

$$V(t) = 3H^2 + 5H\Delta_{GB} + \dot{H} + \dot{\Delta}_{GB}, \quad (6.84)$$

$$\frac{\omega(\phi)}{2}\dot{\phi}^2 = H\Delta_{GB} - \dot{H} - \dot{\Delta}_{GB}, \quad (6.85)$$

$$\Delta_{GB} = -2\dot{\xi}H^2, \quad (6.86)$$

где $\omega(\phi)$ – функция, определяющая взаимодействие поля и кинетической энергии, введение которой характерно для скалярно-тензорных теорий гравитации.

Для этого случая рассмотрим уравнение

$$5H\Delta_{GB} + \dot{\Delta}_{GB} = 0, \quad (6.87)$$

решением которого является $\Delta_{GB} = a^{-5}\alpha_{GB}$.

Подставляя $\Delta_{GB} = a^{-5}\alpha_{GB}$ в уравнение (6.85), используя условие $\dot{\phi} = -2\dot{H}$, получим

$$\omega(\phi(t)) = 1 - \alpha_{GB} \left(\frac{6H}{\dot{H}a^5} \right). \quad (6.88)$$

Из уравнения (6.86) получим вид функции неминимального взаимодействия

$$\dot{\xi} = -\frac{\Delta_{GB}}{2H^2} = -\frac{\alpha_{GB}}{2a^5 H^2}. \quad (6.89)$$

Таким образом, полученным функциям (6.88) и (6.89) соответствует следующая система уравнений

$$V(\phi(t)) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (6.90)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (6.91)$$

полностью аналогичных уравнениям в космологических моделях, основанных на гравитации Эйнштейна.

Также запишем уравнения динамики (6.90)–(6.91) и функции (6.88)–(6.89) в терминах скалярного поля, используя соотношения

$$\dot{H} = -2H_\phi'^2, \quad \dot{\xi} = \xi_\phi' \dot{\phi} = -2\xi_\phi' H_\phi', \quad a(\phi) = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{H}{H_\phi'} d\phi\right). \quad (6.92)$$

В результате, получим

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H_\phi'^2, \quad (6.93)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2H_\phi', \quad (6.94)$$

$$\xi_\phi' = \frac{\alpha_{GB}}{4a_0^5 H_\phi' H^2} \exp\left(\frac{5}{2} \int \frac{H}{H_\phi'} d\phi\right), \quad (6.95)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3H\alpha_{GB}}{H_\phi'^2} \exp\left(\frac{5}{2} \int \frac{H}{H_\phi'} d\phi\right). \quad (6.96)$$

Таким образом, можно использовать методы точных решений уравнений динамики, рассмотренные ранее для случая моделей космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна, для генерирования точных решений в случае гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне. Отметим, что несмотря на формальное соответствие уравнений (6.90)–(6.91) и (6.93)–(6.94) с уравнениями динамики для случая ОТО, параметры космологических моделей, в общем случае, отличаются от параметров в стандартных моделях инфляции, поскольку $\dot{\xi} \neq 0$, $H \neq H_E$.

Теперь рассмотрим эволюцию параметра расхождения для данного класса моделей. Поскольку параметр расхождения уменьшается по закону $\Delta_{GB} \propto a^{-5}(t)$, отношение его значений в начале и в конце стадии инфляции

$$\frac{\Delta_{GB}(N = 60)}{\Delta_{GB}(N = 0)} = e^{-300} \approx 5.2 \times 10^{-131}. \quad (6.97)$$

Таким образом, полагая, что в начале инфляции $\Delta_{GB}(N = 0) \ll 10^{131}$ получим $\Delta_{GB}(N = 60) \simeq 0$ при ее завершении, то есть, при выполнении данного условия, в конце инфляции получим $\xi = const$, $H = H_E$, $\phi = \phi_E$ и $V = V_E$ с высокой точностью.

Далее, из выражений (6.64)–(6.75) определим функции

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2H, \quad w_3 = -9H^2 - 3\dot{H}, \quad w_4 = 1, \quad (6.98)$$

$$Q_S = \epsilon, \quad Q_T = 1/4, \quad (6.99)$$

$$c_S = 1, \quad c_T = 1. \quad (6.100)$$

Подставляя (6.98)–(6.100) в уравнения (6.70)–(6.75) получаем параметры космологических возмущений (3.79)–(3.85), соответствующие случаю стандартной инфляции на основе ОТО. Таким образом, данные модели ЭГБ-инфляции соответствуют моделям инфляции, основанным на гравитации Эйнштейна как по фоновым решениям, так и на уровне космологических возмущений.

Следовательно, при существенном упрощении расчетов параметров космологических возмущений, в данных моделях сохраняется связь с моделями гетеротических струн и модификацией гравитации Эйнштейна в начале стадии космологической инфляции, когда значения параметра расхождения и функции неминимального взаимодействия достаточно велики.

Также предложенный класс моделей удовлетворяет наблюдательным ограничениям на скорость распространения гравитационных волн в современную эпоху: $c_T = 1$ с точностью до 10^{-15} [25], поскольку зависимость $\Delta_{GB} \propto a^{-5}(t)$ подразумевает быстрое уменьшение расхождения между гравитацией Эйнштейна и ЭГБ-гравитацией при расширении Вселенной. Таким образом, в современную эпоху, гравитация в данных моделях соответствует ОТО с высокой точностью.

6.8 Третье утверждение о эквивалентности космологических решений

На основании результатов, полученных в разделах § 5.1 и § 5.6, сформулируем *третье утверждение о эквивалентности фоновых космологических решений*:

Для моделей космологической инфляции, содержащих скалярное поле и основанных на гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне

$$S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) - \frac{1}{2}\xi(\phi)R_{GB}^2 \right], \quad (6.101)$$

где $\xi(\phi)$ – функция, определяющая неминимальное взаимодействие скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне, в плоском четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера

ра, уравнения космологической динамики

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 12\xi H^3, \quad (6.102)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}^2 - 4\ddot{\xi}H^2 - 4\dot{\xi}H(2\dot{H} - H^2), \quad (6.103)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} + 12\xi_{,\phi}H^2 \left(\dot{H} + H^2 \right) = 0, \quad (6.104)$$

для функции неминимального взаимодействия, следующей из условия

$$\dot{\xi} = -\frac{\Delta_{GB}}{2H^2} = -\frac{\alpha_{GB}}{2a^5 H^2}, \quad (6.105)$$

$$\xi'_\phi = \frac{\alpha_{GB}}{4a_0^5 H'_\phi H^2} \exp\left(\frac{5}{2} \int \frac{H}{H'_\phi} d\phi\right), \quad (6.106)$$

и кинетической функции

$$\omega(t) = 1 - \alpha_{GB} \left(\frac{6H}{\dot{H}a^5} \right), \quad (6.107)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3H\alpha_{GB}}{H_\phi'^2} \exp\left(\frac{5}{2} \int \frac{H}{H'_\phi} d\phi\right), \quad (6.108)$$

уравнения (6.102)–(6.104) приводятся к виду, аналогичному уравнениям динамики в космологических моделях на основе ОТО

$$V(t) = 3H^2 + \dot{H}, \quad V(\phi) = 3H^2 - 2H_\phi'^2, \quad (6.109)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad \dot{\phi} = -2H'_\phi, \quad (6.110)$$

и параметры космологических возмущений рассчитываются аналогично случаю моделей, основанных на ОТО из соотношений (3.79)–(3.85).

На основе «первого утверждения о эквивалентности фоновых космологических решений», сформулированного в разделе § 2.7.6, это означает, что все независимые уравнения системы (5.104)–(5.106) приводятся к уравнению типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера (2.293) с дополнительными соотношениями между параметрами космологических моделей.

Поскольку рассмотренный класс моделей на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне совпадает с космологическими моделями, основанными на гравитации Эйнштейна, как на уровне фоновых решений, так и по параметрам космологических возмущений, назовем их ОТО-подобными космологическими моделями.

Расхождения с гравитацией Эйнштейна для $\Delta_{GB}(N=0) \ll 10^{131}$ существенны только на начальном этапе эволюции Вселенной, что, однако, сохраняет исходную связь с моделями эффективной квантовой гравитации [300;301], соответствующих появлению скаляра Гаусса-Бонне в действии и модификации ОТО в начале стадии инфляции.

6.9 Условия интегрируемости уравнений динамики для ЭГБ-инфляции

Теперь сформулируем условия интегрируемости уравнений космологической динамики для класса ОТО-подобных космологических моделей, основанных на гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Для случая гравитации Эйнштейна, условие интегрируемости формулировалось в разделе § 2.7.5 на основе нахождения в явном виде интеграла

$$I(t) = \int \frac{\ddot{\psi}}{\psi} dt, \quad (6.111)$$

для произвольной функции ψ .

Для космологических решений, удовлетворяющих условию (6.111), то есть для случая известных аналитических решений уравнений (6.109)–(6.110) сформулируем критерий интегрируемости (в смысле существования точных аналитических решений) на основе уравнения (6.106).

Рассматривая уравнение (6.106) в терминах новой функции $\Psi(\phi)$, связанной с функцией неминимального взаимодействия следующим образом

$$\xi(\phi) = \Psi(\phi) \exp\left(\frac{5}{2} \int \frac{H}{H'_\phi} d\phi\right), \quad (6.112)$$

запишем исходное уравнение (6.106) в следующем виде

$$\left(\Psi'_\phi H'_\phi + \frac{5}{2} \Psi H\right) H^2 = \frac{\alpha_{GB}}{4a_0^5}. \quad (6.113)$$

Для $\alpha_{GB} = 0$ получим

$$\Psi(\phi) = const \times \exp\left(-\frac{5}{2} \int \frac{H}{H'_\phi} d\phi\right), \quad (6.114)$$

и, следовательно, из уравнения (6.112), имеем тривиальный случай $\xi = const$.

Для $\alpha_{GB} \neq 0$ существование точных аналитических решений уравнения (6.113) будет условием интегрируемости ОТО-подобных моделей, основанных на гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Также отметим, что на основе уравнения (6.113) можно рассматривать обратную задачу построения точных космологических решений на основе использования $\Psi(\phi)$ как генерирующей функции, восстанавливая из заданной функции $\Psi(\phi)$ зависимости $\xi(\phi)$ и $H(\phi)$. Далее, на основе полученного параметра Хаббла $H(\phi)$, можно восстановить потенциал и эволюцию скалярного поля с помощью уравнений (6.109)–(6.110).

6.10 Точные ОТО-подобные решения в ЭГБ-инфляции

Теперь рассмотрим примеры построения точных решений для случая моделей ранней Вселенной, основанных на гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне, используя «третье утверждение о эквивалентности космологических решений», на основе полученных ранее точных решений.

Таким образом, будем решать прямую задачу реконструкции параметров модифицированной теории гравитации по известным космологическим решениям, полученным на основе гравитации Эйнштейна.

Вначале рассмотрим точные решения для моделей со степенным потенциалом, рассмотренные в разделе § 2.4.2.

Для этого случая, из уравнения (6.106) получаем

$$\xi(\phi) = -\frac{\alpha_{GB}\phi^{-3m}}{20A^3a_0^5} \left[3m\Gamma\left(-\frac{3m}{2} - \frac{5\phi^2}{4m}\right) + 2\Gamma\left(1 - \frac{3m}{2}\right) \left(-\frac{5\phi^2}{4m}\right)^{3m/2} - 2e^{\frac{5\phi^2}{4m}} \right], \quad (6.115)$$

где « Γ » – Гамма-функция.

В частном случае $m = 1/3$ из выражения (6.115) получим

$$\xi(\phi) = \frac{\sqrt{15}\pi\alpha_{GB}}{20A^3a_0^5} \left[\operatorname{Erfi}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\phi\right) \right], \quad (6.116)$$

где « Erfi » – мнимая функция ошибок, которой соответствует действительная функция неминимального взаимодействия $\xi(\phi)$ для канонического скалярного поля ϕ .

Данная модель является верифицируемой по параметрам космологических возмущений, что было показано в разделе § 3.5.1.

Для моделей с экспоненциальным потенциалом, рассмотренных в разделе § 2.4.3, получим три вида решений:

1. Степенная инфляция при условии $\mu_3 = 0$.

Для этого случая, из уравнения (6.106) следует

$$\xi(\phi) = -\frac{\alpha_{GB}}{a_0^2\mu_1^3(6\mu_2^2 - 5)} \exp\left[\frac{(6\mu_2^2 - 5)}{2\mu_2}\phi\right], \quad (6.117)$$

Отметим, что эта модель, в данном случае, не верифицируется по параметрам космологических возмущений и рассматривается в качестве примера.

2. Экспоненциально-степенная инфляция с параметром $\mu_2 = \sqrt{5/4}$.

Для этого случая получим

$$\xi(\phi) = -\frac{\alpha_{GB}}{5a_0^2\mu_3} \left[-\frac{\exp\left(-\frac{2\mu_3}{\mu_1}e^{\sqrt{5}\phi/2}\right)}{\mu_1(\mu_1 + \mu_3e^{\sqrt{5}\phi/2})} + \frac{2e^2}{\mu_1^2} \operatorname{Ei}\left(1, 2\frac{\mu_3}{\mu_1}e^{\sqrt{5}\phi/2} + 2\right) \right], \quad (6.118)$$

где « Ei » – экспоненциальная интегральная функция.

3. Экспоненциально-степенная инфляция с параметром $\mu_2 = \sqrt{5/6}$.

В рассматриваемом случае, из уравнения (6.106), получаем

$$\xi(\phi) = \frac{\alpha_{GB}}{5a_0^2\mu_3} \left[\frac{\mu_1 \exp\left(\frac{3\mu_3}{\mu_1} e^{\sqrt{\frac{5}{6}}\phi}\right)}{\mu_1 + 3\mu_3 e^{\sqrt{\frac{5}{6}}\phi}} + \text{Ei}\left(1, \frac{3\mu_3}{\mu_1} e^{\sqrt{\frac{5}{6}}\phi}\right) + \frac{2e^3}{\mu_1^2} \text{Ei}\left(1, \frac{3\mu_3}{\mu_1} e^{\sqrt{\frac{5}{6}}\phi} + 3\right) \right],$$

Данные модели соответствуют наблюдательным данным (см. раздел § 3.5.2). Также отметим, что константы интегрирования во всех рассмотренных случаях выбирались равными нулю, поскольку $\xi = const$ не оказывает влияния на космологическую динамику.

Теперь рассмотрим случай *обобщенной экспоненциально-степенной инфляции*. Данный тип инфляционных моделей рассматривался в разделах § 2.8.2 и § 3.7 в контексте метода построения новых точных решений из известных и метода верификации космологических моделей за счет выбора параметров n и λ .

Соответствующий масштабный фактор определялся следующим образом

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}, \quad (6.119)$$

напомним, что $a(t)$ – масштабный фактор исходной модели.

Для данного случая, из уравнения (6.105), получим

$$\xi(t) = -\frac{\alpha_{GB}}{5a_0^2} \int \frac{a^{2-5n} \exp(-5\lambda t)}{n\dot{a} - \lambda a} dt. \quad (6.120)$$

Таким образом, функция неминимального взаимодействия получена в квадратурах, и ее явный вид зависит от выбора масштабного фактора $a(t)$ и параметров n и λ .

Далее, на основе известных точных решений, подставляя обратную зависимость $t = t(\phi)$ в полученное выражение $\xi = \xi(t)$, восстанавливается функция $\xi = \xi(\phi)$.

6.11 Космологические модели на основе ЭГБ-гравитации во Вселенной Фрийдмана с ненулевой кривизной

Теперь рассмотрим космологические модели, основанные на гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне, в случае ненулевой кривизны пространства ФРУ. Отметим, что вариация действия (6.1) по метрике и полю, в данном случае, приводит к уравнениям динамики, к которым неприменимо «третье утверждение о эквивалентности космологических решений», обобщенное на случай ненулевой кривизны пространства, следовательно, для анализа данных моделей, необходима модификация ранее рассмотренных методов построения точных решений.

Уравнения космологической динамики в такого типа моделях записываются следующим образом [315]

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{3k}{a^2} + 12\xi H \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right), \quad (6.121)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2} + 2\ddot{\xi} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) + 2\xi H \left(2\dot{H} - H^2 - \frac{3k}{a^2} \right), \quad (6.122)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} + 12\xi_{,\phi} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \left(\dot{H} + H^2 \right) = 0, \quad (6.123)$$

где точка обозначает производную по времени, $H \equiv \dot{a}/a$ – параметр Хаббла и $V_{,\phi} = \partial V/\partial\phi$, постоянная $k = -1, 0, 1$ соответствует замкнутой, плоской и открытой Вселенной ФРУ.

Поскольку из трех уравнений два являются независимыми, полевое уравнение (6.123) может быть получено из уравнений Эйнштейна-Фридмана (6.121)–(6.122), на основе которых мы будем рассматривать космологическую динамику.

В случае $\xi = const$ уравнения (6.121)–(6.122) сводятся к уравнениям стандартной космологии

$$3H_E^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}_E^2 + V_E(\phi) - \frac{3k}{a_E^2} \quad (6.124)$$

$$\dot{H}_E = -\frac{1}{2}\dot{\phi}_E^2 + \frac{k}{a_E^2}, \quad (6.125)$$

В данном случае, преобразования (6.105)–(6.108) не приводят к уравнениям динамики, аналогичным рассматриваемым в космологических моделях на основе ОТО.

Связь между параметрами Хаббла для случая ЭГБ-инфляции H и стандартной инфляции H_E определим следующим образом

$$H_E = H - 2\xi \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (6.126)$$

В таком случае, уравнения (6.121)–(6.122) записываются как

$$V(\phi) = -2H^2 + 5HH_E + \dot{H}_E + \frac{2k}{a^2}, \quad (6.127)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H}_E + HH_E - H^2 + \frac{k}{a^2}, \quad (6.128)$$

$$\dot{\xi} = \frac{H - H_E}{2 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)}, \quad (6.129)$$

где случаю $\xi = const$ соответствует $H = H_E$, $a = a_E$, и уравнения (6.127)–(6.128) сводятся к (6.124)–(6.125).

Теперь, на основе уравнений (6.127)–(6.129), рассмотрим некоторые точные космологические решения в моделях ЭГБ-инфляции во Вселенной Фридмана с ненулевой кривизной.

Экспоненциальное расширение Вселенной

Вначале рассмотрим экспоненциальное расширение Вселенной Фридмана с ненулевой кривизной

$$a(t) = a_0 \exp(At), \quad H = A, \quad (6.130)$$

$$\phi(t) = Bt, \quad (6.131)$$

где A и B – некоторые постоянные.

Из уравнений (6.127)–(6.129) получим точные решения вида

$$H_E(t) = A + \frac{B^2}{2A} - \frac{k}{3Aa_0^2} e^{-2At}, \quad (6.132)$$

$$\xi(t) = - \left(\frac{1}{12A^4} + \frac{B^2}{8A^4} \right) \ln |A^2 a_0^2 + k e^{-2At}| - \frac{B^2}{4A^3} t + const, \quad (6.133)$$

$$\xi(\phi) = - \left(\frac{1}{12A^4} + \frac{B^2}{8A^4} \right) \ln |A^2 a_0^2 + k e^{-\frac{2A}{B}\phi}| - \frac{B}{4A^3} \phi + const, \quad (6.134)$$

$$V(\phi) = 3A^2 + \frac{5}{2}B^2 + \frac{k}{a_0^2} e^{-\frac{2A}{B}\phi}. \quad (6.135)$$

В частном случае пространственно плоской Вселенной Фридмана ($k = 0$) получим

$$H_E(t) = A + \frac{B^2}{2A}, \quad (6.136)$$

$$\xi(\phi) = - \left(\frac{1}{12A^4} + \frac{B^2}{8A^4} \right) \ln A^2 a_0^2 - \frac{B}{4A^3} \phi, \quad (6.137)$$

$$V(\phi) = 3A^2 + \frac{5}{2}B^2. \quad (6.138)$$

Далее, из условия $B = 0$, имеем $H = H_E = A$, $\xi = const$, $V = V_E = 3A^2$ и $\phi = \phi_E = 0$. То есть полученные решения в частном случае приводятся к случаю гравитации Эйнштейна.

Степенное расширение Вселенной

Теперь рассмотрим степенное расширение Вселенной с логарифмической зависимостью скалярного поля от времени

$$a(t) = a_0 t^m, \quad H = m/t, \quad \phi(t) = C \ln(Bt), \quad (6.139)$$

где $m > 0$, $B > 0$ и C – некоторые постоянные.

Для $m = 2$, из уравнений (6.127)–(6.129), получаем

$$H_E(t) = \frac{C^2}{6t} + \frac{4}{3t} - \frac{k}{5a_0^2 t^3}, \quad (6.140)$$

$$\xi(t) = \left(-\frac{C^2}{96} + \frac{1}{24}\right) B^2 t^2 + \left(\frac{kC^2}{384a_0^2} + \frac{k}{480a_0^2}\right) \ln |4a_0^2 t^2 + k| + const, \quad (6.141)$$

$$\xi(\phi) = \left(-\frac{C^2}{96} + \frac{1}{24}\right) e^{\frac{2\phi}{C}} + \left(\frac{kC^2}{384a_0^2} + \frac{k}{480a_0^2}\right) \ln \left| \frac{4a_0^2}{B^2} e^{\frac{2\phi}{C}} + k \right| + const, \quad (6.142)$$

$$V(\phi) = \frac{B^2}{10a_0^2} \left(15C^2 a_0^2 e^{\frac{2\phi}{C}} + 40a_0^2 e^{\frac{2\phi}{C}} + 6kB^2\right) e^{-\frac{4\phi}{C}}. \quad (6.143)$$

Случаю $k = 0$ соответствуют решения

$$H_E(t) = \frac{C^2}{6t} + \frac{4}{3t}, \quad (6.144)$$

$$\xi(\phi) = \left(-\frac{C^2}{96} + \frac{1}{24}\right) e^{\frac{2\phi}{C}}, \quad (6.145)$$

$$V(\phi) = \frac{B^2}{10} (15C^2 + 40) e^{-\frac{2\phi}{C}}. \quad (6.146)$$

Рассматривая $C = \pm 2$, получим $H = H_E = 2/t$, $\phi(t) = \phi_E(t) = \pm 2 \ln(Bt)$, $\xi = const$, $V(\phi) = V_E(\phi) = 10B^2 e^{\mp 2\phi}$, то есть соответствие решениям в рамках ОТО.

Точные решения на основе анзацев

Теперь используем метод генерирования точных решений на основе соотношений (анзацев) между параметрами Хаббла для ЭГБ-инфляции H и стандартного инфляционного сценария на основе ОТО H_E .

В качестве первого анзаца рассмотрим

$$-\dot{H}_E + HH_E - H^2 = 0. \quad (6.147)$$

Для параметра Хаббла $H = m/t$, соответствующего степенному расширению, из уравнения (6.147) получим

$$H_E(t) = \frac{m^2}{(1+m)t}. \quad (6.148)$$

Параметры Хаббла H и H_E равны только в случае $m = 0$ или $a = a_0$, то есть в начале инфляционной стадии.

Для $m = 2$ получим

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{2k}}{a_0 t}, \quad (6.149)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{24}t^2 - \frac{k}{96a_0^2} \ln |4a_0^2t^2 + k|. \quad (6.150)$$

$$\xi(\phi) = \frac{k}{12a_0^2\phi^2} - \frac{k}{96a_0^2} \ln \left| \frac{8k}{\phi^2} + k \right|. \quad (6.151)$$

$$V(\phi) = \frac{a_0^2}{6k} \phi^2 (3\phi^2 + 20). \quad (6.152)$$

Отметим, что случаю открытой Вселенной ($k = -1$) соответствует фантомное поле с отрицательной кинетической энергией, в остальных случаях имеем каноническое скалярное поле.

В качестве второго анализа рассмотрим модели ЭГБ-инфляции без связи со стандартными моделями, основанными на гравитации Эйнштейна, то есть выбираем $H_E = 0$.

В таком случае, уравнения (6.127)–(6.129) приводятся к следующему виду

$$V(\phi) = -2H^2 + \frac{2k}{a^2}, \quad (6.153)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -H^2 + \frac{k}{a^2}, \quad (6.154)$$

$$\dot{\xi} = \frac{H}{2\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)}. \quad (6.155)$$

Далее, исходя из определения $H = \dot{a}/a$, перепишем уравнение (6.154) в терминах масштабного фактора $a(t)$ следующим образом

$$\dot{a}^2 + \frac{1}{2}(a\dot{\phi})^2 = k. \quad (6.156)$$

Вначале рассмотрим случай закрытой Вселенной $k = 1$ с осциллирующей динамикой

$$a(t) = A \sin(Bt), \quad (6.157)$$

и дополнительным условием $k = A^2B^2 = 1$, где A и B – некоторые постоянные.

Из уравнений (6.156), (6.153) и (6.155) получим

$$\phi(t) = \pm\sqrt{2}Bt, \quad V = 2B^2, \quad (6.158)$$

$$\xi(t) = -\frac{1}{4B^2} \ln |\cos(2Bt) + 3|, \quad (6.159)$$

$$\xi(\phi) = -\frac{1}{4B^2} \ln |\cos(\sqrt{2}\phi) + 3|. \quad (6.160)$$

Для случая открытой Вселенной ($k = -1$) рассмотрим фантомное поле с соответствующим уравнением

$$\dot{a}^2 - \frac{1}{2}(a\dot{\phi})^2 = -1. \quad (6.161)$$

В уравнении (6.161) знак кинетической энергии $\dot{\phi}^2/2$ был изменен на противоположный, исходя из того, что рассматривается фантомное поле. Далее, из уравнений (6.153)–(6.155) и (6.161) получаем аналогичные решения (6.158)–(6.160).

В качестве другого примера, рассмотрим модель с фантомным полем, $k = -1$ и следующим масштабным фактором

$$a(t) = A \operatorname{ch}(Bt), \quad (6.162)$$

С учетом дополнительного условия $A^2 B^2 = 1$, из уравнений (6.153)–(6.155) и (6.161) получаем

$$\phi(t) = \pm \sqrt{2} Bt, \quad V = 2B^2, \quad (6.163)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{4B^2} \ln |\operatorname{ch}(2Bt) - 3|, \quad (6.164)$$

$$\xi(\phi) = \frac{1}{4B^2} \ln \left| \operatorname{ch} \left(\sqrt{2} \phi \right) - 3 \right|. \quad (6.165)$$

В данном случае, полученные решения определяют плоский потенциал $V = \text{const}$ или эффективную космологическую постоянную, индуцированную неминимальным взаимодействием поля и скаляра Гаусса-Бонне.

Построение ОТО-подобных решений с модифицированным потенциалом

Теперь рассмотрим функцию неминимального взаимодействия поля и скаляра Гаусса-Бонне, которая определяется из уравнения

$$\dot{\xi} = - \left(\frac{\alpha_{GB}}{2} \right) \frac{a^3}{\dot{a}^2 + k}. \quad (6.166)$$

В таком случае, уравнения (6.121)–(6.122) преобразуются в уравнения стандартной инфляции (6.7)–(6.8) с модификацией потенциала за счет связи поля и скаляра Гаусса-Бонне

$$V(\phi) = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} + 6\dot{a}\alpha_{GB}, \quad (6.167)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = -\dot{H} + \frac{k}{a^2}. \quad (6.168)$$

Модифицированный потенциал записывается следующим образом $V = V_E + V_{GB}$, где $V_{GB} = 6\dot{a}\alpha_{GB}$.

В данном случае становится возможным использование решений, полученных ранее в рамках гравитации Эйнштейна, для генерирования точных решений в моделях космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне во Вселенной Фридмана с ненулевой кривизной.

В качестве примера, рассмотрим решения (4.39)–(4.41), полученные в разделе § 4.1.2 в частном случае ненулевой кривизны ($m = 2$)

$$a(t) = a_0 \exp(Ct), \quad (6.169)$$

$$\phi(t) = \pm \frac{1}{C} \sqrt{2ka_0^{-2}} \exp(-Ct), \quad (6.170)$$

$$V(\phi) = 3C^2 + C^2\phi^2. \quad (6.171)$$

Определив $\xi = \xi(t)$ из уравнения (6.166) и подставляя обратную зависимость $t = t(\phi)$ в полученное выражение, запишем

$$\xi(\phi) = \frac{\alpha_{GB}\sqrt{k}}{2C^3} \left[-\frac{\sqrt{2}}{\phi} + \frac{1}{C} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{\phi} \right) \right] + \text{const}. \quad (6.172)$$

Аналогично можно найти функцию неминимального взаимодействия поля и скаляра Гаусса-Бонне на основе других точных решений, полученных в рамках ОТО.

6.12 Космологические модели на основе гравитации Хорндески

Теперь обобщим все рассмотренные ранее модели на основе гравитации Хорндески, как модифицированной теории гравитации наиболее общего вида, приводящей к уравнениям космологической динамики второго порядка [29; 134]. В данном случае, рассматривается гравитация Хорндески, соответствующая обобщенной скалярно-тензорной теории гравитации, включающей неминимальное взаимодействие скалярного поля как со скаляром Гаусса-Бонне, так и со скаляром Риччи. Таким образом, космологические решения, полученные на основе данной теории гравитации являются обобщенными и редуцируются к частным случаям для нулевых значений параметров расхождения Δ_{ST} и Δ_{GB} .

Рассмотрим действие для моделей инфляции со скалярным полем, соответствующее теории гравитации Хорндески

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (L_2 + L_3 + L_4 + L_5), \quad (6.173)$$

лагранжианы определяются следующим образом

$$L_2 = K(\phi, X), \quad (6.174)$$

$$L_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi, \quad (6.175)$$

$$L_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4,X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)], \quad (6.176)$$

$$L_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + 2(\nabla^\mu \nabla_\alpha \phi)(\nabla^\alpha \nabla_\beta \phi)(\nabla^\beta \nabla_\mu \phi)], \quad (6.177)$$

где $X = -\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi/2$, $\square\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi$; также K , G_3 , G_4 , G_5 – некоторые функции ϕ и X ; $G_{j,X}(\phi,X) = \partial G_j(\phi,X)/\partial X$ с $j = 4,5$ [29;134;135;145;320].

Построение точных решений для реалистичных моделей на основе гравитации Хорндески является достаточно сложной задачей. Отметим, что в работе [145] была построена классификация точных решений на основе симметрии Нётер.

Для обобщения рассматриваемых ранее моделей, построенных на гравитации Эйнштейна и с неминимальным взаимодействием скалярного поля со скалярами Риччи и Гаусса-Бонне, функции K , G_3 , G_4 , G_5 можно определить следующим образом [134]

$$K(\phi,X) = \omega X - V(\phi) - 4\xi_\phi''' X^2 (3 - \ln X), \quad (6.178)$$

$$G_3(\phi,X) = -2\xi_\phi''' X (7 - 3 \ln X), \quad (6.179)$$

$$G_4(\phi,X) = \frac{1}{2}(1 + f(\phi)) - 2\xi_\phi'' X (2 - \ln X), \quad (6.180)$$

$$G_5(\phi,X) = 2\xi_\phi' \ln X, \quad (6.181)$$

с уравнениями космологической динамики на стадии инфляции, аналогичными полученным из действия

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(\phi,R) - \omega(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 2V(\phi)], \quad (6.182)$$

где $F(\phi,R) = R + f(\phi)R + \xi(\phi)R_{GB}^2$, функция $f(\phi)$ определяет взаимодействие скалярного поля со скаляром Риччи и $\xi(\phi)$ – функция взаимодействия поля со скаляром Гаусса-Бонне.

Следовательно, мы рассматриваем модели космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна с поправками, индуцированными взаимодействием скалярного поля и кривизны.

Уравнения космологической динамики, в таком случае, записываются следующим образом

$$E_1 \equiv 3(\gamma + f)H^2 + 3H\dot{f} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - 12H^3\dot{\xi} = 0, \quad (6.183)$$

$$E_2 \equiv (\gamma + f)(3H^2 + 2\dot{H}) + 2H\dot{f} + \ddot{f} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - 8H^3\dot{\xi} - 8H\dot{H}\dot{\xi} - 4H^2\ddot{\xi} = 0, \quad (6.184)$$

$$E_3 \equiv \omega\ddot{\phi} + 3\omega H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\omega'_\phi + V'_\phi - 6H^2f'_\phi - 3\dot{H}F'_\phi + 12H^4\xi'_\phi + 12H^2\dot{H}\xi'_\phi = 0. \quad (6.185)$$

Также, для трех уравнений (6.183)–(6.185) имеем дополнительное условие

$$\dot{\phi}E_3 + \dot{E}_1 + 3H(E_1 - E_2) = 0, \quad (6.186)$$

с учетом которого, из этих уравнений только два являются независимыми.

Теперь запишем выражения для потенциала и кинетической энергии скалярного поля, используя уравнения (6.183)–(6.184). Рассматривая уравнения $E_1 + E_2 = 0$ и $E_1 - E_2 = 0$

получим

$$V(\phi) = 3(1+f)H^2 + (1+f)\dot{H} + \frac{5}{2}H\dot{f} + \frac{1}{2}\ddot{f} - 10H^3\dot{\xi} - 2H^2\ddot{\xi} - 4H\dot{H}\dot{\xi}, \quad (6.187)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = H\dot{f} - 2(1+f)\dot{H} - \ddot{f} - 4H^3\dot{\xi} + 8H\dot{H}\dot{\xi} + 4H^2\ddot{\xi}. \quad (6.188)$$

Частными случаями гравитации Хорндески будут:

1. $f = 0$, $\omega = \pm 1$, $\xi = 0$ – случай ОТО (минимальное взаимодействие);
2. $f = f(\phi)$, $\xi = 0$, $\omega = \omega(\phi)$ – скалярно-тензорная гравитация (с неминимальным взаимодействием поля со скаляром Риччи);
3. $f = 0$, $\omega = \pm 1$, $\xi = \xi(\phi)$ – гравитация Эйнштейна-Гаусса-Бонне;
4. $f = f(\phi)$, $\omega = \omega(\phi)$, $\xi = \xi(\phi)$ – обобщенная скалярно-тензорная гравитация, включающая неминимальное взаимодействие скалярного поля как со скаляром Риччи, так и со скаляром Гаусса-Бонне.

Теперь запишем уравнения (6.187)–(6.188) в терминах параметров расхождения $\Delta_{ST} = \Delta_{ST}(t)$ и $\Delta_{GB} = \Delta_{GB}(t)$ с учетом следующих соотношений

$$f(\phi) = -\Delta_{ST}, \quad (6.189)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\Delta_{GB}}{2H^2}. \quad (6.190)$$

Подставляя соотношения (6.189)–(6.190) в уравнения (6.187)–(6.188), получим

$$V(\phi) = 3(1 - \Delta_{ST})H^2 + (1 - \Delta_{ST})\dot{H} - \frac{5}{2}H\dot{\Delta}_{ST} - \frac{1}{2}\ddot{\Delta}_{ST} + \dot{\Delta}_{GB} + 5H\Delta_{GB}, \quad (6.191)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = -2(1 - \Delta_{ST})\dot{H} - H\dot{\Delta}_{ST} + \ddot{\Delta}_{ST} - 2\dot{\Delta}_{GB} + 2H\Delta_{GB}. \quad (6.192)$$

Таким образом, $\Delta_{ST} = 0$, $\Delta_{GB} = 0$ соответствует первому классу моделей, $\Delta_{ST} \neq 0$, $\Delta_{GB} = 0$ – второму классу моделей, $\Delta_{ST} = 0$, $\Delta_{GB} \neq 0$ – третьему классу моделей и $\Delta_{ST} \neq 0$, $\Delta_{GB} \neq 0$ – четвертому классу моделей в рассматриваемой в данной главе классификации.

6.12.1 Утверждение о специальном классе космологических моделей

На основе второго § 5.8 и третьего § 6.8 «утверждений о эквивалентности космологических решений» сформулируем *утверждение о специальном классе космологических моделей*:

В четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера, каждому точному космологическому решению, полученному в рамках гравитации Эйнштейна из уравнений

(1.7)–(1.9) для скалярного поля $\phi \neq const$, существует аналогичное решение для случая обобщенной скалярно-тензорной гравитации, с уравнениями космологической динамики (6.183)–(6.185), включающей неминимальное взаимодействие поля со скалярами Риччи и Гаусса-Бонне с нетривиальными, в общем случае, функциями неминимального взаимодействия $f \neq 0$, $\xi \neq const$ и кинетической функцией $\omega \neq 1$. Такие решения представляют собой основу построения специального класса космологических моделей, определяемых действием (6.182).

Для доказательства этого утверждения рассмотрим следующую кинетическую функцию и параметры расхождения

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3}{\epsilon} \left(\Delta_{ST} + 2 \frac{\Delta_{GB}}{H} \right), \quad (6.193)$$

$$\Delta_{ST}(t) = \beta_{ST} a^{-2}(t), \quad (6.194)$$

$$\Delta_{GB}(t) = \alpha_{GB} a^{-5}(t), \quad (6.195)$$

где $\epsilon = -\dot{H}/H^2$.

После подстановки (6.193)–(6.195) в уравнения (6.191)–(6.192) получим

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (6.196)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (6.197)$$

то есть уравнения полностью аналогичные случаю гравитации Эйнштейна, следующие из (1.7)–(1.9).

В терминах скалярного поля уравнения (6.196)–(6.197) записываются в виде уравнений Иванова-Салопека-Бонда

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'_\phi, \quad (6.198)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2H'_\phi, \quad (6.199)$$

с соответствующими параметрами обобщенной скалярно-тензорной гравитации

$$f(t) = -\frac{\beta_{ST}}{a^2(t)}, \quad f(\phi) = -\frac{\beta_{ST}}{a_0^2} \exp \left(\int \frac{H}{H'_\phi} d\phi \right), \quad (6.200)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\alpha_{GB}}{2a^5 H^2}, \quad \xi'_\phi = \frac{\alpha_{GB}}{4a_0^5 H'_\phi H^2} \exp \left(\frac{5}{2} \int \frac{H}{H'_\phi} d\phi \right), \quad (6.201)$$

$$\omega(t) = 1 - \frac{3H^2}{\dot{H}a^2} \left(\beta_{ST} + \frac{2\alpha_{GB}}{Ha^3} \right) = 1 + \frac{3}{\epsilon(t)a^2} \left(\beta_{ST} + \frac{2\alpha_{GB}}{Ha^3} \right), \quad (6.202)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{H}{H'_\phi} \right)^2 \exp \left(\int \frac{H}{H'_\phi} d\phi \right) \left[\beta_{ST} + \frac{2\alpha_{GB}}{H} \exp \left(\frac{3}{2} \int \frac{H}{H'_\phi} d\phi \right) \right]. \quad (6.203)$$

Следовательно, точные космологические решения, полученные для гравитации Эйнштейна, могут транслироваться на случай обобщенной скалярно-тензорной гравитации и рассматриваться как ОТО-подобные.

6.12.2 Точные ОТО-подобные решения для гравитации Хорндески

Точные решения для случая гравитации Хорндески с параметрами (6.178)–(6.181) можно построить на основе ранее полученных ОТО-подобных решений в ЭГБ-инфляции § 6.9 с аналогичными рассмотренным в разделе § 6.9 условиями интегрируемости.

Например, для случая моделей со степенным потенциалом

$$V(\phi) = 3A^2\phi^{2m} - 2A^2n^2\lambda\phi^{2(m-1)}, \quad (6.204)$$

из соотношений (6.200)–(6.203), получим

$$f(\phi) = -\frac{\beta_{ST}}{a_0^2} \exp\left(-\frac{\phi^2}{m}\right), \quad (6.205)$$

$$\xi(\phi) = -\frac{\alpha_{GB}\phi^{-3m}}{20A^3a_0^5} \left[3\Gamma\left(-\frac{3m}{2}, -\frac{5\phi^2}{4m}\right) + 2\Gamma\left(1 - \frac{3m}{2}\right) \left(-\frac{5\phi^2}{4m}\right)^{3m/2} - 2e^{\frac{5\phi^2}{4m}} \right], \quad (6.206)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3\phi^2 \exp\left(\frac{5\phi^2}{4m}\right)}{2Am^2} \left[A\beta_{ST} + 2\alpha_{GB} \exp\left(\frac{3\phi^2}{4m}\right) \phi^{-m} \right]. \quad (6.207)$$

Для реконструкции параметров теории гравитации Хорндески K , G_3 , G_4 , G_5 достаточно рассчитать первые четыре производные функции неминимального взаимодействия $\xi(\phi)$ и подставить полученные решения в выражения (6.178)–(6.181).

На основе решения (6.206) запишем

$$\xi'_\phi = \frac{\alpha_{GB}\phi^{-3m+1}}{4a_0^5A^3m} \exp\left(\frac{5\phi^2}{4m}\right), \quad (6.208)$$

$$\xi''_\phi = \frac{\alpha_{GB}\phi^{-3m+1} \exp\left(\frac{5\phi^2}{4m}\right)}{8a_0^5A^3m^2} (-6m^2 + 2m + 5\phi), \quad (6.209)$$

$$\xi'''_\phi = \frac{\alpha_{GB}\phi^{-3m+1} \exp\left(\frac{5\phi^2}{4m}\right)}{16a_0^5A^3m^3} (12(1 - 3m)m^3\phi^{-2} + 30m(1 - 2m) + 25\phi^2), \quad (6.210)$$

$$\xi''''_\phi = \frac{\alpha_{GB}\phi^{-3m+1} \exp\left(\frac{5\phi^2}{4m}\right)}{32a_0^5A^3m^4} \times \\ \left(24m^4(1 - 9m^2)\phi^{-3} - 360m^3 \left(1 - \frac{3}{2}m - \frac{1}{6m}\right) \phi^{-1} + 300m \left(1 - \frac{3}{2}m\right) \phi + 125\phi^3 \right). \quad (6.211)$$

Таким образом, подставляя выражения (6.204)–(6.211) в (6.178)–(6.181) получим функции K , G_3 , G_4 , G_5 в явном виде, которым, в данном случае, будут соответствовать достаточно громоздкие выражения.

Соответствующая динамика Вселенной и эволюция скалярного поля для данной модели представлены в разделе § 2.4.2. Таким образом, рассмотренная процедура является реконструкцией параметров МГТ по виду потенциала скалярного поля.

Также отметим, что частному случаю $m = 1/3$ соответствуют следующие выражения функции неминимального взаимодействия и ее производных

$$\xi(\phi) = \frac{\sqrt{15}\pi\alpha_{GB}}{20A^3a_0^5} \left[\operatorname{Erfi} \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\phi \right) \right], \quad (6.212)$$

$$\xi'_\phi = \frac{3\alpha_{GB}}{4a_0^5A^3} \exp \left(\frac{15}{4}\phi^2 \right), \quad (6.213)$$

$$\xi''_\phi = \frac{45\alpha_{GB}}{8a_0^5A^3} \exp \left(\frac{15}{4}\phi^2 \right) \phi, \quad (6.214)$$

$$\xi'''_\phi = \frac{27\alpha_{GB}}{16a_0^5A^3} \exp \left(\frac{15}{4}\phi^2 \right) \left(\frac{10}{3} + 25\phi^2 \right), \quad (6.215)$$

$$\xi''''_\phi = \frac{81\alpha_{GB}}{32a_0^5A^3} \exp \left(\frac{15}{4}\phi^2 \right) (125\phi^3 + 50\phi). \quad (6.216)$$

Для степенной инфляции с потенциалом

$$V(\phi) = \mu_1^2(3 - 2\mu_2^2) \exp(-2\mu_2\phi), \quad (6.217)$$

получим

$$f(\phi) = -\frac{\beta_{ST}}{a_0^2} \exp \left(-\frac{\phi}{\mu_2} \right), \quad (6.218)$$

$$\xi(\phi) = -\frac{\alpha_{GB}}{a_0^2\mu_1^3(6\mu_2^2 - 5)} \exp \left[\frac{(6\mu_2^2 - 5)}{2\mu_2}\phi \right], \quad \mu_2 \neq \pm\sqrt{\frac{5}{6}}, \quad (6.219)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3 \exp \left(-\frac{5\phi}{2\mu_2^2} \right)}{2\mu_1\mu_2^2} \left[\beta_{ST}\mu_1 + 2\alpha_{GB} \exp \left(-\frac{(3 - 2\mu_2^2)}{2\mu_2}\phi \right) \right], \quad (6.220)$$

и производные функции неминимального взаимодействия записываются как

$$\frac{\partial^{(m)}\xi(\phi)}{\partial\phi^m} = \left[\frac{(6\mu_2^2 - 5)}{2\mu_2} \right]^m \xi(\phi), \quad (6.221)$$

где $m = 1, 2, 3, 4$.

Аналогично восстанавливаются параметры гравитации Хорндески для случая экспоненциально-степенной инфляции и для других моделей ранней Вселенной на основе точных решений для базовой модели, основанной на ОТО.

6.12.3 Космологические возмущения для ОТО-подобных моделей на основе гравитации Хорндески

Теперь рассмотрим параметры космологических возмущений для случая инфляции на основе гравитации Хорндески и соответствующей обобщенной скалярно-тензорной гравитации.

Вначале определим следующие функции [283]

$$w_1 \equiv 1 + f - 4H\dot{\xi}, \quad (6.222)$$

$$w_2 \equiv 2H(1 + f) + \dot{f} - 12H^2\dot{\xi}, \quad (6.223)$$

$$w_3 \equiv -9H^2(1 + f) - 9H\dot{f} + \frac{3}{2}\omega(\phi)\dot{\phi}^2 + 72H^3\dot{\xi}, \quad (6.224)$$

$$w_4 \equiv 1 + f - 4\ddot{\xi}. \quad (6.225)$$

Функции (6.222)–(6.225) в терминах параметров Δ_{ST} и Δ_{GB} определяются следующим образом

$$w_1 = 1 - \Delta_{ST} + 2\frac{\Delta_{GB}}{H}, \quad (6.226)$$

$$w_2 = 2(1 - \Delta_{ST})H - \dot{\Delta}_{ST} + 6\Delta_{GB}, \quad (6.227)$$

$$w_3 = -9(1 - \Delta_{ST})H^2 - 3(1 - \Delta_{ST})\dot{H} + \frac{3}{2}\ddot{\Delta}_{ST} - 3\dot{\Delta}_{GB} + \left(\frac{15}{2}\dot{\Delta}_{ST} - 33\Delta_{GB}\right)H, \quad (6.228)$$

$$w_4 = 1 - \Delta_{ST} - 2\frac{\dot{H}}{H^2} \left(2\frac{\Delta_{GB}}{H} - \frac{\dot{\Delta}_{GB}}{\dot{H}}\right). \quad (6.229)$$

Остальные параметры космологических возмущений рассчитываются из выражений, аналогичным рассмотренным в предыдущих главах, именно:

– скорости распространения возмущений

$$c_S^2 \equiv \frac{3(2w_1^2w_2H - w_2^2w_4 + 4w_1\dot{w}_1w_2 - 2w_1^2\dot{w}_2)}{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)}, \quad (6.230)$$

$$c_T^2 \equiv \frac{w_4}{w_1}, \quad (6.231)$$

– спектры мощности

$$\mathcal{P}_S = \frac{H^2}{8\pi^2Q_Sc_S^3}, \quad (6.232)$$

$$\mathcal{P}_T = \frac{H^2}{2\pi^2Q_Tc_T^3}, \quad (6.233)$$

где

$$Q_S \equiv \frac{w_1(4w_1w_3 + 9w_2^2)}{3w_2^2}, \quad Q_T \equiv \frac{w_1}{s}, \quad (6.234)$$

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 4 \times \frac{Q_S}{Q_T} \left(\frac{c_S}{c_T}\right)^3. \quad (6.235)$$

$$n_S - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln k} = \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln \left(\frac{aH}{c_S}\right)}, \quad n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} = \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln \left(\frac{aH}{c_T}\right)}. \quad (6.236)$$

Отметим, что выбор кинетической функции ω не влияет на значение параметров космологических возмущений ввиду того, что всегда можно переопределить скалярное поле как $\varphi = \int \sqrt{\omega(\phi)} d\phi$.

Для случая $\Delta_{ST} = \frac{\beta_{ST}}{a^2(t)}$, $\Delta_{GB} = \alpha_{GB} a^{-5}(t)$, учитывая $\Delta_{ST} \propto \exp(-2N)$ и $\Delta_{GB} \propto \exp(-5N)$ для $\Delta_{ST}(N=0) \ll e^{120}$ и $\Delta_{GB}(N=0) \ll e^{300}$ в начале инфляции, на пересечении радиуса Хаббла для $N = 50 - 60$ получим $\Delta_{ST} \simeq 0$, $\Delta_{GB} \simeq 0$.

Следовательно, функции (6.226)–(6.229) определяются как

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2H, \quad w_3 = -9H^2 - 3\dot{H}, \quad w_4 = 1, \quad (6.237)$$

Таким образом, на основе функций (6.237), из выражений (6.230)–(6.231) получим $c_S = 1$ и $c_T = 1$.

Также рассчитаем для $\Delta_{ST} \simeq 0$, $\Delta_{GB} \simeq 0$ спектры мощности

$$\mathcal{P}_S = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad \mathcal{P}_T = 2s \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (6.238)$$

их наклоны и тензорно-скалярное отношение

$$n_S - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_S}{d \ln k} = \frac{\dot{\mathcal{P}}_S}{H(1-\epsilon)\mathcal{P}_S} = 2 \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \right), \quad (6.239)$$

$$n_T \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k} = \frac{\dot{\mathcal{P}}_T}{H(1-\epsilon)\mathcal{P}_T} = -\frac{2\epsilon}{1 - \epsilon}, \quad (6.240)$$

$$r = \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_S} = 4 \times \frac{Q_S}{Q_T} \left(\frac{c_S}{c_T} \right)^3 = 4s\epsilon. \quad (6.241)$$

Таким образом, параметры космологических возмущений, как и фоновые решения, в данном случае совпадают с полученными в моделях космологической инфляции на основе гравитации Эйнштейна.

Также отметим, что модификации гравитации Эйнштейна приводят к отклонению спектра скалярных возмущений от гауссового [283; 321; 322].

Для случая $c_S = 1$ параметр нелинейности, характеризующий отклонение спектра скалярных возмущений от гауссового, рассчитывается следующим образом [283]

$$f_{NL} \approx \frac{55}{36}\epsilon_s + \frac{5}{12}\eta_s + \frac{10}{3}\delta_\xi, \quad (6.242)$$

где

$$\epsilon_s = \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\dot{f}}{Hf} = \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\dot{\Delta}_{ST}}{H\Delta_{ST}}, \quad \eta_s = \frac{\dot{\epsilon}_s}{H\epsilon_s}, \quad (6.243)$$

$$\delta_\xi = \frac{H\dot{\xi}}{1+f} = -\frac{\Delta_{GB}}{(1-\Delta_{ST})H}. \quad (6.244)$$

Для $\Delta_{ST} \simeq 0$, $\Delta_{GB} \simeq 0$ на пересечении радиуса Хаббла получим $\epsilon_s = \epsilon$, $\eta_s = 2(\epsilon - \delta)$ и $\delta_\xi = 0$. Следовательно, параметр нелинейности

$$f_{NL} \approx \frac{55}{36}\epsilon + \frac{5}{6}(\epsilon - \delta) \ll 1, \quad (6.245)$$

и спектр скалярных возмущений с высокой точностью является гауссовым.

6.13 Эволюция Вселенной для ОТО-подобных моделей

Теперь рассмотрим сценарий эволюции Вселенной, основанный на специальном классе космологических решений для обобщенной скалярно-тензорной теории гравитации.

В начале стадии инфляции значения параметров расхождения Δ_{ST} и Δ_{GB} между ОТО и ее модификациями и, соответственно, функций, определяющих неминимальное взаимодействие скалярного поля и кривизны $f(\phi)$ и $\xi(\phi)$, может быть достаточно большим чтобы обеспечить связь с теорией струн и суперструн в контексте возможности построения квантовой теории гравитации [20; 59; 300; 301].

Во время инфляции расхождения быстро убывают по законам $\Delta_{ST} \propto a^{-2}(t)$ и $\Delta_{GB} \propto a^{-5}(t)$, таким образом, к концу инфляционной стадии, исходная часть лагранжиана, определяющая тип гравитации определяется как

$$F(\phi, R) \equiv R + f(\phi)R + \xi(\phi)R_{GB}^2 = R + \mathcal{O}_1(\Delta_{ST}, \Delta_{GB}), \quad (6.246)$$

где $\mathcal{O}_1(\Delta_{ST}, \Delta_{GB}) \ll 1$ – малая добавка за счет модификаций гравитации Эйнштейна, которая, при расчете параметров космологических возмущений в линейном порядке теории возмущений, рассматривалась равной нулю.

Кинетическая функция на завершении стадии инфляции определяется следующим образом

$$\omega(\phi) \equiv 1 + \frac{3}{\epsilon} \left(\Delta_{ST} + 2 \frac{\Delta_{GB}}{H} \right) = 1 + \frac{3}{\epsilon} \mathcal{O}_2(\Delta_{ST}, \Delta_{GB}), \quad \mathcal{O}_2(\Delta_{ST}, \Delta_{GB}) \ll 1. \quad (6.247)$$

Далее, после завершения стадии инфляции, динамика Вселенной на стадиях преобладания излучения и вещества определяется фридмановскими решениями $a(t) \propto t^{1/2}$ и $a(t) \propto t^{2/3}$, и расхождение с гравитацией Эйнштейна продолжает убывать с расширением Вселенной. Анализ космологической динамики на стадиях эволюции Вселенной, содержащей скалярное поле и дополнительные материальные поля, ввиду малых расхождений с ОТО, проводится на основе методов, рассмотренных в главе 4.

В случае, если стадия повторного ускоренного расширения Вселенной в настоящую эпоху описывается с помощью Λ CDM-модели с экспоненциальным расширением ($\dot{H} = 0$), то $\epsilon = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, что соответствует гравитации Эйнштейна. Если темная энергия определяется легким полем квинтэссенции с другой динамикой $\dot{H} \neq 0$ ($\dot{H} \approx 0$), то $\epsilon \neq 0$ и наблюдательное ограничение $|\omega| > 50000$ [299] определяет малые отклонения от ОТО. Вторым критерием, ограничивающим отклонения от гравитации Эйнштейна, является погрешность 10^{-15} в определении скорости распространения гравитационных волн [25].

Заключение

В настоящем исследовании рассматривалась проблематика построения и верификации моделей ранней Вселенной на основе инфляционной парадигмы. В качестве базовой модели рассматривалась инфляция, обусловленная эволюцией некоторого скалярного поля на основе гравитации Эйнштейна в четырехмерном пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера, что соответствует как первым моделям ранней Вселенной, построенным в контексте теории космологической инфляции, так и современным актуальным моделям.

В первой главе было показано, что задачи построения непротиворечивых теоретических моделей Вселенной требуют определенной модификации базовой модели для объяснения наблюдаемого повторного ускоренного расширения и возможности построения квантовой теории гравитации (на данный момент, окончательного вида такой теории нет), для которой ОТО с некоторыми поправками является низкоэнергетическим пределом. В качестве такой модификации в исследовании рассматривались модели космологической инфляции на основе обобщенных скалярно-тензорных теорий гравитации, подразумевающих неминимальное взаимодействие скалярного поля и кривизны пространства.

Во второй главе рассматривались различные методы анализа базовой модели. В качестве новых методов были предложены:

1. метод кинетического приближения, которое подразумевает ускоренное расширение ранней Вселенной, как и в случае приближения медленного скатывания, но с сохранением ненулевой кинетической энергии скалярного поля;
2. метод генерирования новых точных решений из исходных на основе функциональной связи нового и исходного параметров Хаббла $\bar{H} = f(t)H$;
3. метод приведения всех независимых уравнений космологической динамики к уравнению типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера при записи уравнений как в терминах скалярного поля, так и в терминах космического времени.

На основе последнего метода было сформулировано «первое утверждение о эквивалентности космологических решений».

Также были проанализированы расхождения $\Delta_N^{(H)}$ и $\Delta_N^{(V)}$ между точными и приближенными решениями по числу e -фолдов, практическое применение которых позволило сформулировать метод построения точных решений из приближенных, метод нахождения начального значения скалярного поля и метод построения точных космологических решений по априорно заданному расхождению, то есть с использованием его в качестве генерирующей функции.

В третьей главе рассматривалась проблематика анализа эволюции космологических возмущений в контексте верификации моделей ранней Вселенной. Предложенный анализ соответствует стандартному изложению теории космологических возмущений, представленному во многих источниках. Тем не менее, было отмечено влияние различной нормировки тензора реликтовых гравитационных волн на значения параметров космологических возмущений, которую можно встретить в различных работах, посвященных построению моделей ранней Вселенной. Такое влияние было параметризовано посредством постоянной $s = 1,4$ в формулах для расчета спектральных параметров космологических возмущений. Все вычисления в данном исследовании проводились для значения $s = 4$, что соответствует результату, представленному в большинстве источников по теории космологических возмущений.

В качестве метода верификации моделей, не соответствующих наблюдательным ограничениям, были предложены преобразования исходных моделей к случаю обобщенного экспоненциально-степенного расширения, то есть моделям с масштабным фактором вида $\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}$, в которых верификация достигается за счет выбора свободных параметров n и λ . Данный подход был проиллюстрирован на примере перехода от инфляции со степенной динамикой к экспоненциально-степенной инфляции.

В контексте «первого утверждения о эквивалентности космологических решений», задача анализа фоновой (в отсутствие квантовых возмущений поля) динамики, также расчета параметров космологических возмущений, связанных с квантовыми возмущениями поля, сводится к поиску решений уравнения типа одномерного стационарного уравнения Шрёдингера. Таким образом, двум различным уровням анализа космологических моделей соответствует одинаковая, с математической точки зрения, задача.

Отметим результаты, представленные в работе [323], в которой параметры космологических возмущений вычислялись в ВКБ-приближении без условий $\epsilon \ll 1$ и $\delta \ll 1$. В данном случае, выражения спектральных параметров космологических возмущений отличались от результатов, полученных в приближении медленного скатывания, на множитель $\Delta_{WKB} = 18e^{-3} \approx 0.9$, и такой метод расчета можно рассматривать как возможную альтернативу представленному в настоящем исследовании.

Перспектива использования подхода, основанного на применении уравнения Шрёдингера к анализу космологических моделей, состоит в развитии существующих и построении новых эффективных методов точных и приближенных решений уравнения данного типа или разработке эффективных алгоритмов его численных решений, что позволит комплексно решать задачи построения актуальных моделей ранней Вселенной как на уровне фоновой динамики, так и при расчете космологических возмущений.

В контексте верификации теоретических моделей космологической инфляции важное значение имеет прямое наблюдение реликтовых гравитационных волн, существенно дополняющее косвенные оценки его характеристик, основанные на измерениях анизотропии реликтового излучения. Применение к анализу моделей ранней Вселенной только приближения медленного скатывания подразумевает низкочастотный спектр реликтовых гравитационных волн в диапазоне $10^{-18} - 10^{-16}$ Гц. Тем не менее, стадия преобладания кинетической энергии скалярного поля во время эволюции ранней Вселенной дает теоретическое обоснование существованию высокочастотных реликтовых гравитационных волн в моделях с одним скалярным полем в диапазоне $10^2 - 10^4$ Гц, которые можно использовать как доступное средство верификации моделей ранней Вселенной при наличии физических эффектов, увеличивающих чувствительность детектора до необходимого уровня. В качестве такого эффекта предложен низкочастотный оптический резонанс в интерферометрах Фабри-Перро, рассмотренный ранее в работах [230–232], теоретические оценки чувствительности детекторов на основе которого соответствуют принципиальной возможности прямого наблюдения гравитационных волн высоких частот. Данный подход можно рассматривать в качестве альтернативы другим существующим и перспективным проектам по непосредственному детектированию гравитационных волн [21–23; 227–229]. В настоящий момент, в МГТУ им. Н.Э. Баумана осуществляются практические шаги по реализации эксперимента данного типа [324], а также использования других возможностей детектирования высокочастотного гравитационно-волнового излучения [325].

В четвертой главе точные решения для базовой модели обобщались на случай дополнительного материального поля, что позволяет рассматривать динамику Вселенной на любой из стадий ее эволюции, случай ненулевой кривизны пространства ФРУ, замены канонического поля на поле k -эссенции и двухкомпонентные киральные космологические модели, в рамках которых были выделены классы точных решений, соответствующие случаю базовой модели с одним каноническим скалярным полем как по фоновой динамике, так и на уровне космологических возмущений.

В пятой главе рассматривались космологические модели на основе скалярно-тензорной теории гравитации, ассоциированной с неминимальным взаимодействием скалярного поля и скаляра Риччи. В контексте данного подхода, был предложен принцип построения моделей, подразумевающих неминимальное взаимодействие поля и кривизны пространства как источник его эволюции, отклонения закона расширения ранней Вселенной от экспоненциального (которому соответствовала гравитация Эйнштейна) и отклонения потенциала $V(\phi)$ от плоского. Для связи параметра Хаббла и функции неминимального взаимодействия вида $H(t) = \lambda\sqrt{F(t)}$ значение тензорно-скалярного отношения на пересечении радиуса Хаббла оценивалось как $r \sim 10^{-3}$, что хорошо соответствует современным наблю-

дательным ограничениям. Предложенный подход позволяет генерировать точные космологические решения для случая известных типов скалярно-тензорных теорий гравитации, что было показано на примере моделей со степенным параметром Хаббла $H(t) = Bt^n$. Повторное ускоренное экспоненциальное расширение Вселенной в таких моделях объясняется отсутствием взаимодействия поля и кривизны, для которого гравитация соответствует случаю ОТО и постоянное скалярное поле моделирует темную энергию. Перспективой развития данного метода является построение актуальных космологических моделей на основе другого типа динамики ранней Вселенной.

Далее, в контексте обнаруженной параметрической связи между базовыми моделями, основанными на ОТО, и моделями инфляции на основе скалярно-тензорной гравитации (СТГ) с неминимальным взаимодействием поля и скаляра Риччи, были построены аналогичные для обоих случаев космологические решения. Специфика данного подхода заключалась в том, что обычный метод конформных преобразований метрики от представления Йордана (соответствующего СТГ) к представлению Эйнштейна не использовался, а связь между этими моделями определялась непосредственно из уравнений динамики в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера. На основе полученных результатов было сформулировано «второе утверждение о эквивалентности космологических решений».

В шестой главе рассматривались космологические модели, основанные на другом типе скалярно-тензорной гравитации – гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне (ЭГБ), подразумевающей неминимальное взаимодействие скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне, для которых также рассматривались параметрические и функциональные связи с моделями, основанными на гравитации Эйнштейна, найденные непосредственно из уравнений динамики. В результате были сформулированы новые методы точных решений уравнений космологической динамики для рассматриваемой теории гравитации, метод оценки влияния неминимальной связи на характер расширения ранней Вселенной и потенциал скалярного поля. На основе обнаруженных связей был предложен метод построения ОТО-подобных космологических моделей для случая ЭГБ-инфляции, что было сформулировано в «третьем утверждении о эквивалентности космологических решений».

Комбинирование второго и третьего «утверждений» приводит к методу построения ОТО-подобных космологических решений для случая обобщенной скалярно-тензорной гравитации, которая находится в соответствии с гравитацией Хорндески. Было показано, что полученные решения соответствуют случаю гравитации Эйнштейна как по фоновым решениям, так и по параметрам космологических возмущений с высокой точностью, которая увеличивается в процессе расширения Вселенной. На основе данных результатов было сформулировано «утверждение о специальном классе космологических моделей», ис-

пользуя которое, были найдены точные космологические решения для случая гравитации Хорндески, соответствующие верифицируемым по наблюдательным данным моделям.

Комбинация первого «утверждения» и «утверждения о специальном классе космологических моделей» редуцирует задачу нахождения точных космологических решений как в случае ОТО, так и для рассмотренных модифицированных теории гравитации к поиску точных решений уравнения Шрёдингера, что приводит к унификации анализа моделей ранней Вселенной на основе уравнения данного типа. Перспективой развития предложенного подхода является его расширение на другие типы модификаций гравитации Эйнштейна.

Таким образом, представленные в настоящем исследовании результаты определяют последовательный подход к решению задач построения и верификации моделей ранней Вселенной на основе гравитации Эйнштейна и ее модификаций.

В заключение автор выражает благодарность профессору Гладышеву В.О. за консультации в течение работы по тематике настоящего исследования. Также автор благодарит профессора Червона С.В. и профессора Морозова А.Н. за обсуждение рассматриваемых методов и полученных результатов.

Список сокращений и условных обозначений

ФРУ – Фридмана-Робертсона-Уокера

ССП – самодействующее скалярное поле

СТГ – скалярно-тензорная гравитация

ГБ – Гаусса-Бонне

ЭГБ – Эйнштейна-Гаусса-Бонне

МТГ – модифицированные теории гравитации

ККМ – киральные космологические модели

УШ – уравнение Шредингера

ВКБ – Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна

Индекс «J» – представление Йордана

Индекс «E» – представление Эйнштейна

Индекс «ST» – скалярно-тензорная гравитация

Индекс «GB» – гравитация Эйнштейна-Гаусса-Бонне

Обозначения всех функций соответствуют принятым в русскоязычной литературе.

Новые термины, использованные в исследовании

Кинетическое приближение – постулирование квазилинейной связи между кинетической энергией скалярного поля и параметром состояния

Параметры расхождения – параметры, определяющие различия между точными и приближенными космологическими решениями и различия между моделями инфляции на основе гравитации Эйнштейна и ее модификаций.

Параметр $\Delta_N^{(H)}$ – определяет различие по числу e -фолдов между точными решениями и полученными из приближения медленного скатывания для случая одинаковой динамики и различных потенциалов.

Параметр $\Delta_N^{(V)}$ – определяет различие по числу e -фолдов между точными решениями и полученными из приближения медленного скатывания для случая одинаковых потенциалов и различной динамики.

Параметр Δ_ζ – определяет различие в спектральных характеристиках космологических возмущений при учете фактора $(1 - \epsilon)$.

N-анализ – метод генерирования точных решений, основанный на представлении всех параметров космологических моделей в терминах числа e -фолдов.

СТГ-инфляция – модели космологической инфляции на основе скалярно-тензорных теорий гравитации с неминимальным взаимодействием скалярного поля и скаляра Риччи.

ЭГБ-инфляция – модели космологической инфляции на основе скалярно-тензорных теорий гравитации с неминимальным взаимодействием скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне.

Параметр Δ_{ST} – определяет отклонение от ОТО в случае неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Риччи.

Параметр Δ_{GB} – определяет отклонение от ОТО в случае неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне.

Параметр $\Delta_N^{(GB)}$ – определяет различие по числу e -фолдов между моделями на основе ОТО и гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

ОТО-подобные модели – космологические модели, основанные на модифицированных теориях гравитации, совпадающие со случаем гравитации Эйнштейна как по фоновым решениям, так и по параметрам космологических возмущений.

Список литературы

1. Старобинский А.А. Об одной несингулярной изотропной космологической модели // Письма в Астрономический журнал. 1978. Т. 4(4). С. 155–159.
2. Starobinsky A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 91. P. 99–102.
3. Guth A. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // Phys. Rev. D. 1981. Vol. 23. P. 347–356.
4. Linde A. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems // Phys. Lett. B. 1982. Vol. 108. P. 389–393.
5. Frieman J., Turner M., Huterer D. Dark Energy and the Accelerating Universe // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 2008. Vol. 46. P. 385–432.
6. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae / S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al. // Astrophys. J. 1999. Vol. 517. P. 565–586.
7. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant / A. Riess, A. Filippenko, P. Challis et al. // Astron. J. 1998. Vol. 116. P. 1009–1038.
8. Armendariz-Picon C., Mukhanov V., Steinhardt P. Essentials of k essence // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 63. P. 103510.
9. Caldwell R. A Phantom menace? // Phys. Lett. B. 2002. Vol. 545. P. 23–29.
10. Phantom Cosmology without Big Rip Singularity / A. Astashenok, S. Nojiri, S. Odintsov et al. // Phys. Lett. B. 2012. Vol. 709. P. 396–403.
11. Gibbons G. Cosmological evolution of the rolling tachyon // Phys. Lett. B. 2002. Vol. 537. P. 1–4.
12. Kamenshchik A., Moschella U., Pasquier V. An Alternative to quintessence // Phys. Lett. B. 2001. Vol. 511. P. 265–268.
13. Chervon S. Chiral Cosmological Models: Dark Sector Fields Description // Quantum Matter. 2013. Vol. 2. P. 71–82.

14. Saha B. Early inflation, isotropization, and late time acceleration in a Bianchi type-I universe // Phys. Part. Nuclei. 2009. Vol. 40. P. 656.
15. Nojiri S., Odintsov S. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy // Phys. Lett. B. 2008. Vol. 659. P. 821–826.
16. Modified Gravity and Cosmology / T. Clifton, P. Ferreira, A. Padilla et al. // Phys. Rept. 2012. Vol. 513. P. 1–189.
17. Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S. D. Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up // Phys. Rev. D. 2004. Vol. 70. P. 043539.
18. Myrzakulov R., Sebastiani L. *k*-essence non-minimally coupled with Gauss-Bonnet invariant for inflation // Symmetry. 2016. Vol. 8. P. 57.
19. Measurements of the Higgs boson production and decay rates and coupling strengths using pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV in the ATLAS experiment / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // Eur. Phys. J. C. 2016. Vol. 76. P. 6.
20. Baumann D., McAllister L. Inflation and String Theory. Cambridge: University Press, 2014. 349 p.
21. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott et al. // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 116. P. 061102.
22. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence / B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott et al. // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 116. P. 241103.
23. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral / B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott et al. // Phys. Rev. Lett. 2017. Vol. 119. P. 161101.
24. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger / B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott et al. // Astrophys. J. 2017. Vol. 848. P. L12.
25. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A / B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott et al. // Astrophys. J. 2017. Vol. 848. P. L13.
26. Motohashi H., Minamitsuji M. General Relativity solutions in modified gravity // Phys. Lett. B. 2018. Vol. 781. P. 728–734.

27. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters / P. Ade, R. Aghanim, M. Arnaud et al. // *Astron. Astrophys.* 2016. Vol. 594. P. A13.
28. Рубаков В.А. Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение // *УФН.* 2014. Т. 184. С. 137–152.
29. Horndeski G. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space // *Int. J. Theor. Phys.* 1974. Vol. 10. P. 363–384.
30. Friedmann A. Über die Krümmung des Raumes // *Zeitschrift für Physik.* 1922. Vol. 10. P. 377–386.
31. Friedmann A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes // *Zeitschrift für Physik.* 1924. Vol. 21. P. 326–332.
32. Фок В.А. Работы А.А. Фридмана по теории тяготения Эйнштейна // *УФН.* 1963. Т. LXXX(3). С. 353–356.
33. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990. 280 с.
34. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория. М.: Красанд, 2010. 568 с.
35. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results / C. L. Bennett, D. Larson, J. Weiland et al. // *Astrophys. J. Suppl.* 2013. Vol. 208. P. 20.
36. Ehlers J., Geren P., Sachs R. Isotropic solutions of the Einstein-Liouville equations // *J. Math. Phys.* 1968. Vol. 9. P. 1344–1349.
37. Inhomogeneous cosmologies, the Copernican principle and the cosmic microwave background: More on the EGS theorem / C. Clarkson, A. Coley, E. O'Neill et al. // *Gen. Rel. Grav.* 2003. Vol. 35. P. 969–990.
38. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
39. Fomin I. Velocity of Light in Anisotropic Spacetime // *Russ. Phys. J.* 2016. Vol. 59. P. 41–47.
40. Gurzadyan V., Margaryan A. The light speed versus the observer: the Kennedy-Thorndike test from GRAAL-ESRF // *Eur. Phys. J. C.* 2018. Vol. 78. P. 607.

41. Регистрация анизотропии пространства на основе результатов эксперимента SADE / В.О. Гладышев, П.С. Тиунов, А.Д. Леонтьев [и др.] // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Т. S5. С. 94–109.
42. Исследование анизотропии пространства скоростей электромагнитного излучения в движущейся среде / В.О. Гладышев, П.С. Тиунов, А.Д. Леонтьев [и др.] // ЖТФ. 2012. Т. 11. С. 54–63.
43. Albrecht A., Steinhardt P. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1220–1223.
44. Sato K. Cosmological Baryon Number Domain Structure and the First Order Phase Transition of a Vacuum // Phys. Lett. B. 1981. Vol. 99. P. 66–70.
45. Sato K. First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1981. Vol. 195. P. 467–479.
46. Einhorn M., Sato K. Monopole Production in the Very Early Universe in a First Order Phase Transition // Nucl. Phys. B. 1981. Vol. 180. P. 385–404.
47. Linde A. Chaotic Inflation // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 129. P. 177–181.
48. Berezin V., Kuzmin V., Tkachev I. Thin wall vacuum domains evolution // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 120. P. 91–96.
49. Berezin V., Kuzmin V., Tkachev I. New vacuum formation in the universe // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 130. P. 23–27.
50. Berezin V., Kuzmin V., Tkachev I. Could the metastable vacuum burn? // Phys. Lett. B. 1983. Vol. 124. P. 479–483.
51. Березин В.А., Кузьмин В.А., Ткачев И.И. Хаотическая инфляция и глобальная геометрия Вселенной // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41(10). С. 446–449.
52. Berezin V., Kuzmin V., Tkachev I. Dynamics of Bubbles in General Relativity // Phys. Rev. D. 1987. Vol. 36. P. 2919.
53. Inflationary stages in cosmological models with a scalar field / V. Belinsky, L. Grishchuk, I. Khalatnikov et al. // Phys. Lett. B. 1985. Vol. 155. P. 232–236.
54. Piran T., Williams R. Inflation in universes with a massive scalar field // Phys. Lett. B. 1985. Vol. 163. P. 331–335.

55. Piran T. On General Conditions for Inflation // *Phys. Lett. B.* 1986. Vol. 181. P. 238–243.
56. Halliwell J. Scalar Fields in Cosmology with an Exponential Potential // *Phys. Lett. B.* 1987. Vol. 185. P. 341.
57. Lucchin F., Matarrese S. Power Law Inflation // *Phys. Rev. D.* 1985. Vol. 32. P. 1316.
58. Barrow J. Cosmic No Hair Theorems and Inflation // *Phys. Lett. B.* 1987. Vol. 187. P. 12–16.
59. Martin J., Ringeval C., Vennin V. Encyclopedia Inflationaris // *Phys. Dark Univ.* 2014. Vol. 5-6. P. 75–235.
60. Grøn Ø. Predictions of Spectral Parameters by Several Inflationary Universe Models in Light of the Planck Results // *Universe.* 2018. Vol. 4. P. 15.
61. Measurements of the Higgs boson production and decay rates and constraints on its couplings from a combined ATLAS and CMS analysis of the LHC pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV / G. Aad, B. Abbott, J. Abdallah et al. // *JHEP.* 2016. Vol. 08. P. 045.
62. Иванов Г.Г. Космологические модели Фридмана с нелинейным скалярным полем. Сб. ст. «Гравитация и теория относительности». Казань: Изд-во Казанского университета, 1981. С. 54.
63. Иванов Г.Г. Точные решения уравнений Эйнштейна для нелинейных скалярных полей типа Син-Гордона, Лиувилля и Хиггса. Сб. ст. «Гравитация и теория относительности». Казань: Изд-во Казанского университета, 1983. С. 37.
64. Salopek D., Bond J. Stochastic inflation and nonlinear gravity // *Phys. Rev. D.* 1991. Vol. 43. P. 1005–1031.
65. Coleman S., Weinberg E. Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking // *Phys. Rev. D.* 1973. Vol. 7. P. 1888–1910.
66. Ellis G., Madsen M. Exact scalar field cosmologies // *Class. Quant. Grav.* 1991. Vol. 8. P. 667–676.
67. Muslimov A. On the Scalar Field Dynamics in a Spatially Flat Friedman Universe // *Class. Quant. Grav.* 1990. Vol. 7. P. 231–237.
68. Nakayama K., Takahashi F., Yanagida T. Polynomial Chaotic Inflation in the Planck Era // *Phys. Lett. B.* 2013. Vol. 725. P. 111–114.

69. Kallosh R., Linde A., Westphal A. Chaotic Inflation in Supergravity after Planck and BICEP2 // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 90. P. 023534.
70. Dodelson S., Kinney W., Kolb E. Cosmic microwave background measurements can discriminate among inflation models // *Phys. Rev. D.* 1997. Vol. 56. P. 3207–3215.
71. Liddle A., Parsons P., Barrow J. Formalizing the slow roll approximation in inflation // *Phys. Rev. D.* 1994. Vol. 50. P. 7222–7232.
72. Riotto A. Inflation and the theory of cosmological perturbations // *ICTP Lect. Notes Ser.* 2003. Vol. 14. P. 317–413.
73. Stewart E., Lyth D. A More accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation // *Phys. Lett. B.* 1993. Vol. 302. P. 171–175.
74. Reconstructing the inflation potential : An overview / J. Lidsey, A. Liddle, E. Kolb et al. // *Rev. Mod. Phys.* 1997. Vol. 69. P. 373–410.
75. Schwarz D., Terrero-Escalante C., Garcia A. Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation // *Phys. Lett. B.* 2001. Vol. 517. P. 243–249.
76. Mukhanov V., Feldman H., Brandenberger R. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions // *Phys. Rept.* 1992. Vol. 215. P. 203–333.
77. Straumann N. From primordial quantum fluctuations to the anisotropies of the cosmic microwave background radiation // *Annalen Phys.* 2006. Vol. 15. P. 701–847.
78. Лукаш В.Н., Михеева Е.В. Физическая космология. М.: Физматлит, 2010. 404 с.
79. Pathinayake C., Ford L. Particle creation by a selfcoupled scalar field // *Phys. Rev. D.* 1987. Vol. 35. P. 3709.
80. Сажин М.В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные // *УФН.* 2004. Т. 174. С. 197–205.
81. Насельский П.Д., Новиков Д.И., Новиков И.Д. Реликтовое излучение Вселенной. М.: Наука, 2003. 390 с.
82. Cosmological parameter analysis including SDSS Ly-alpha forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy / U. Seljak, A. Makarov, P. McDonald et al. // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 71. P. 103515.

83. Aghanim N., Akrami Y., Ashdown M. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1807.06209>.
84. Sahni V., Starobinsky A. The Case for a positive cosmological Lambda term // Int. J. Mod. Phys. D. 2000. Vol. 9. P. 373–444.
85. Peebles P., Ratra B. The Cosmological constant and dark energy // Rev. Mod. Phys. 2003. Vol. 75. P. 559–606.
86. Padmanabhan T. Cosmological constant: The Weight of the vacuum // Phys. Rept. 2003. Vol. 380. P. 235–320.
87. Sahni V., Starobinsky A. Reconstructing Dark Energy // Int. J. Mod. Phys. D. 2006. Vol. 15. P. 2105–2132.
88. Чернин А.Д. Космический вакуум // УФН. 2001. Т. 171. С. 1153–1175.
89. Чернин А.Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // УФН. 2008. Т. 178. С. 267–300.
90. Лукаш В.Н, Рубаков В.А. Темная энергия: мифы и реальность // УФН. 2008. Т. 178. С. 301–308.
91. Garrett K., Duda G. Dark Matter: A Primer // Adv. Astron. 2011. Vol. 2011. P. 968283.
92. Maeder A. An alternative to the Λ CDM model: The case of scale invariance // Astrophys. J. 2017. Vol. 834. P. 194.
93. Rubakov V. Relaxation of the cosmological constant at inflation? // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 61. P. 061501.
94. Steinhardt P., Turok N. Why the cosmological constant is small and positive // Science. 2006. Vol. 312. P. 1180–1182.
95. Tsujikawa S. Quintessence: A Review // Class. Quant. Grav. 2013. Vol. 30. P. 214003.
96. Updated observational constraints on quintessence dark energy models / J. Durrive, J. Ooba, K. Ichiki et al. // Phys. Rev. D. 2018. Vol. 97. P. 043503.
97. Chiba T. Tracking K-essence // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 66. P. 063514.
98. Mukhanov V., Vikman A. Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation // JCAP. 2006. Vol. 0602. P. 004.

99. Сажин М.В., Сажина О.С. Масштабный фактор во Вселенной с темной энергией // *Астрономический Журнал*. 2016. Т. 94, № 4. С. 394–408.
100. de Putter R., Linder E. Kinetic k-essence and Quintessence // *Astropart. Phys.* 2007. Vol. 28. P. 263–272.
101. Saridakis E., Sushkov S. Quintessence and phantom cosmology with non-minimal derivative coupling // *Phys. Rev. D*. 2010. Vol. 81. P. 083510.
102. Sushkov S. Realistic cosmological scenario with non-minimal kinetic coupling // *Phys. Rev. D*. 2012. Vol. 85. P. 123520.
103. Skugoreva M., Sushkov S., Toporensky A. Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a power-law potential // *Phys. Rev. D*. 2013. Vol. 88. P. 083539.
104. Matsumoto J., Sushkov S. Cosmology with nonminimal kinetic coupling and a Higgs-like potential // *JCAP*. 2015. Vol. 1511. P. 047.
105. Matsumoto J., Sushkov S. General dynamical properties of cosmological models with nonminimal kinetic coupling // *JCAP*. 2018. Vol. 1801. P. 040.
106. Abbyazov R., Chervon S. Interaction of chiral fields of the dark sector with cold dark matter // *Gravitation and Cosmology*. 2012. Vol. 18. P. 262–269.
107. Abbyazov R., Chervon S., Muller V. σ CDM coupled to radiation: Dark energy and Universe acceleration // *Mod. Phys. Lett. A*. 2015. Vol. 30. P. 1550114.
108. Фомин И.В., Червон С.В., Крюков С.В. Динамика киральных космологических полей в фантомно-канонической модели // *Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физико-математические и технические науки*. 2018. № 1. С. 74–80.
109. Starobinsky A. Disappearing cosmological constant in f(R) gravity // *JETP Lett.* 2007. Vol. 86. P. 157–163.
110. $R^2 \ln R$ quantum corrections and the inflationary observables / I. Ben-Dayan, J. Shenglin, T. Mahdi et al. // *JCAP*. 2014. Vol. 1409. P. 005.
111. Reconstructing the inflationary f(R) from observations / M. Rinaldi, G. Cognola, L. Vanzo et al. // *JCAP*. 2014. Vol. 1408. P. 015.
112. Parker L. Quantized fields and particle creation in expanding universes // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 183. P. 1057–1068.

113. Ford L. Gravitational Particle Creation and Inflation // Phys. Rev. D. 1987. Vol. 35. P. 2955.
114. Zeldovich Ya. Particle Creation by Gravitational Fields in Collapse and Singularity // Comments on Astrophysics and Space Physics,. 1971. Vol. 3. P. 179.
115. Zeldovich Ya., Starobinsky A. Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field // Sov. Phys. JETP. 1972. Vol. 34. P. 1159–1166.
116. Pereira S., Bessa C., Lima J. Quantized fields and gravitational particle creation in $f(R)$ expanding universes // Phys. Lett. B. 2010. Vol. 690. P. 103–107.
117. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Particle creation phenomenology, Dirac sea and the induced Weyl and Einstein-dilaton gravity // JCAP. 2017. Vol. 1701. P. 018.
118. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Phenomenology of cosmological particle creation, Dirac sea and all that // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1051. P. 012006.
119. Motohashi H., Starobinsky A. $f(R)$ constant-roll inflation // Eur. Phys. J. C. 2017. Vol. 77. P. 538.
120. Beyond Starobinsky inflation / Y. Aldabergenov, R. Ishikawa, S. Ketov et al. // Phys. Rev. D. 2018. Vol. 98. P. 083511.
121. Whitt B. Fourth Order Gravity as General Relativity Plus Matter // Phys. Lett. B. 1984. Vol. 145. P. 176–178.
122. Maeda K. Inflation as a Transient Attractor in R^2 Cosmology // Phys. Rev. D. 1988. Vol. 37. P. 858.
123. Gorbunov D., Panin A. Are R^2 - and Higgs-inflations really unlikely? // Phys. Lett. B. 2015. Vol. 743. P. 79–81.
124. Mishra S., Sahni V., Toporensky A. Initial conditions for Inflation in an FRW Universe // Phys. Rev. D. 2018. Vol. 98. P. 083538.
125. Nojiri S., Odintsov S. Modified gravity with negative and positive powers of the curvature: Unification of the inflation and of the cosmic acceleration // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68. P. 123512.
126. Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. Dark energy: The Equation of state description versus scalar-tensor or modified gravity // Phys. Lett. B. 2006. Vol. 634. P. 93–100.

127. Reconstructing the universe history, from inflation to acceleration, with phantom and canonical scalar fields / E. Elizalde, S. Nojiri, S. Odintsov et al. // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77. P. 106005.
128. Evolution of gravitons in accelerating cosmologies: The case of extended gravity / S. Capozziello, M. De Laurentis, S. Nojiri et al. // *Phys. Rev. D.* 2017. Vol. 95. P. 083524.
129. Nojiri S., Odintsov S., Sasaki M. Gauss-Bonnet dark energy // *Phys. Rev. D.* 2005. Vol. 71. P. 123509.
130. Bounce universe from string-inspired Gauss-Bonnet gravity / K. Bamba, A. Makarenko, A. Myagky et al. // *JCAP.* 2015. Vol. 1504. P. 001.
131. Odintsov S., Oikonomou V. Bouncing cosmology with future singularity from modified gravity // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 92. P. 024016.
132. Nojiri S., Odintsov S., Oikonomou V. Quantitative analysis of singular inflation with scalar-tensor and modified gravity // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 91. P. 084059.
133. Odintsov S., Oikonomou V. Viable Inflation in Scalar-Gauss-Bonnet Gravity and Reconstruction from Observational Indices // *Phys. Rev. D.* 2018. Vol. 98. P. 044039.
134. De Felice A., Tsujikawa S. Inflationary non-Gaussianities in the most general second-order scalar-tensor theories // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84. P. 083504.
135. Starobinsky A., Sushkov S., Volkov M. The screening Horndeski cosmologies // *JCAP.* 2016. Vol. 1606. P. 007.
136. Lovelock D. The Einstein tensor and its generalizations // *J. Math. Phys.* 1971. Vol. 12. P. 498–501.
137. Nojiri S., Odintsov S. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models // *Phys. Rept.* 2011. Vol. 505. P. 59–144.
138. Faraoni V. *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity.* Dordrecht: Cluwer Academic Publisher, 2004. 414 p.
139. Fujii Y., Maeda K. *The scalar-tensor theory of gravitation.* C.: Cambridge University Press, 2007. 260 p.
140. Avagyan R., Harutyunyan G., Sushkov S. Accelerated Expansion of the Early and Late Universe in Terms of the Scalar-Tensor Theory of Gravitation // *Astrophysics.* 2017. Vol. 60. P. 142–152.

141. Wheeler J. Weyl gravity as general relativity // *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 025027.
142. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Conformal gravity and gravitational bubbles // *Int. J. Mod. Phys. A*. 2016. Vol. 31. P. 1641004.
143. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Cosmological particle creation in conformal gravity // *EPJ Web Conf*. 2016. Vol. 125. P. 03003.
144. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Toward Understanding the Conformal Gravity // *Russ. Phys. J*. 2017. Vol. 59. P. 1819–1824.
145. Capozziello S., Dialektopoulos K., Sushkov S. Classification of the Horndeski cosmologies via Noether Symmetries // *Eur. Phys. J. C*. 2018. Vol. 78. P. 447.
146. Bezrukov F., Shaposhnikov M. The Standard Model Higgs boson as the inflaton // *Phys. Lett. B*. 2008. Vol. 659. P. 703–706.
147. Bezrukov F., Magnin A., Shaposhnikov M. Standard Model Higgs boson mass from inflation // *Phys. Lett. B*. 2009. Vol. 675. P. 88–92.
148. Hwang J., Noh H. Classical evolution and quantum generation in generalized gravity theories including string corrections and tachyon: Unified analyses // *Phys. Rev. D*. 2005. Vol. 71. P. 063536.
149. Dark matter density profile and galactic metric in Eddington-inspired Born-Infeld gravity / T. Harko, F. Lobo, M. Mak et al. // *Mod. Phys. Lett.* 2014. Vol. A29. P. 1450049.
150. Korolev R., Sushkov S. Exact wormhole solutions with nonminimal kinetic coupling // *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90. P. 124025.
151. Sushkov S., Volkov M. Giant wormholes in ghost-free bigravity theory // *JCAP*. 2015. Vol. 1506. P. 017.
152. Egorov A., Kashargin P., Sushkov S. Scalar multi-wormholes // *Class. Quant. Grav.* 2016. Vol. 33. P. 175011.
153. Sushkov S. Horndeski Wormholes // *Fundam. Theor. Phys.* 2017. Vol. 189. P. 89–109.
154. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Spherically symmetric conformal gravity and gravitational bubbles // *JCAP*. 2016. Vol. 1601. P. 019.
155. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. On maximal analytical extension of the Vaidya metric // *Class. Quant. Grav.* 2016. Vol. 33. P. 145003.

156. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. Vaidya spacetime in the diagonal coordinates // J. Exp. Theor. Phys. 2017. Vol. 124. P. 446–458.
157. Berezin V., Dokuchaev V., Eroshenko Yu. The theory of spherically symmetric thin shells in conformal gravity // Int. J. Mod. Phys. 2018. Vol. D27. P. 1841012.
158. Gasperini M., Veneziano G. Inflation, deflation, and frame independence in string cosmology // Mod. Phys. Lett. A. 1993. Vol. 8. P. 3701–3714.
159. Barenboim G., Chun E., Lee H. Coleman-Weinberg Inflation in light of Planck // Phys. Lett. B. 2014. Vol. 730. P. 81–88.
160. Barrow J. Exact inflationary universes with potential minima // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 49. P. 3055–3058.
161. Barrow J., Parsons P. Inflationary models with logarithmic potentials // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 52. P. 5576–5587.
162. Chervon S., Zhuravlev V., Shchigolev V. New exact solutions in standard inflationary models // Phys. Lett. B. 1997. Vol. 398. P. 269–273.
163. Zhuravlev V., Chervon S., Shchigolev V. New classes of exact solutions in inflationary cosmology // J. Exp. Theor. Phys. 1998. Vol. 87. P. 223–228.
164. Schunck F., Mielke E. A New method of generating exact inflationary solutions // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 50. P. 4794–4806.
165. Kruger A., Norbury J. Another exact inflationary solution // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 61. P. 087303.
166. Chimento L., Cossarini A., Jakubi A. Exact self-interacting scalar field cosmologies // Plebanski 65th Birthday Mexico City, Mexico, June 2-5, 1993. 2012. P. 2–4.
167. Chimento L., Jakubi A. S. Scalar field cosmologies with perfect fluid in Robertson-Walker metric // Int. J. Mod. Phys. 1996. Vol. D5. P. 71–84.
168. Charters T., Mimoso J. Self-interacting scalar field cosmologies: Unified exact solutions and symmetries // JCAP. 2010. Vol. 1008. P. 022.
169. Chervon S. Inflationary cosmological models without restrictions on a scalar field potential // Gen. Rel. Grav. 2004. Vol. 36. P. 1547–1553.
170. Harko T., Lobo F., Mak M. Arbitrary scalar field and quintessence cosmological models // Eur. Phys. J. C. 2014. Vol. 74. P. 2784.

171. Total energy potential as a superpotential in integrable cosmological models / A. Yurov, V. Yurov, S. Chervon et al. // *Theor. Math. Phys.* 2011. Vol. 166. P. 259–269.
172. Fomin I. High-frequency gravitational waves in exact inflationary models // *Proceedings of 12th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology (ICGAC-12)*. Moscow. 2015. 2016. P. 255–256.
173. Salopek D., Bond J. Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models // *Phys. Rev. D.* 1990. Vol. 42. P. 3936–3962.
174. Capozziello S., Feoli A., Lambiase G. Oscillating universes as eigensolutions of cosmological Schrodinger equation // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2000. Vol. 9. P. 143–154.
175. Yurov A., Vereshchagin S. The Darboux transformation and exactly solvable cosmological models // *Theor. Math. Phys.* 2004. Vol. 139. P. 787–800.
176. Barbosa-Cendejas N., Reyes M. The Schrodinger picture of standard cosmology. 2010. URL: <https://arxiv.org/abs/1001.0084>.
177. Gumjudpai B. Scalar field exact solutions for non-flat FLRW cosmology: A technique from non-linear Schrodinger-type formulation // *Gen. Rel. Grav.* 2009. Vol. 41. P. 249–265.
178. Yurov A., Yurov V. Friedman versus Abel equations: A Connection unraveled // *J. Math. Phys.* 2010. Vol. 51. P. 082503.
179. Yurov A., Yaparova A., Yurov V. Application of the Abel equation of the 1st kind to inflation analysis of non-exactly solvable cosmological models // *Gravitation and Cosmology*. 2014. Vol. 20. P. 106–115.
180. Hawkins R., Lidsey J. The Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66. P. 023523.
181. Lidsey J. Cosmology and the Korteweg-de Vries Equation // *Phys. Rev. D.* 2012. Vol. 86. P. 123523.
182. Yaparova A., Yurov A., Yurov V. The KdV in Cosmology: a useful tool or a distraction? // *Gravitation and Cosmology*. 2015. Vol. 21. P. 166–170.
183. New approach to find exact solutions for cosmological models with a scalar field / R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania et al. // *Phys. Rev. D.* 1990. Vol. 42. P. 1091–1097.
184. Capozziello S., Roshan M. Exact cosmological solutions from Hojman conservation quantities // *Phys. Lett. B.* 2013. Vol. 726. P. 471–480.

185. Paoletta M., Capozziello S. Hojman symmetry approach for scalar-tensor cosmology // *Phys. Lett. A.* 2015. T. 379. C. 1304–1308.
186. Myrzakul A., Myrzakulov R. On the Hojman conservation quantities in FRW Cosmology. 2016. URL: <https://arxiv.org/abs/1603.01611>.
187. General Analytic Solutions of Scalar Field Cosmology with Arbitrary Potential / N. Dimakis, A. Karagiorgos, A. Zampeli et al. // *Phys. Rev. D.* 2016. Vol. 93. P. 123518.
188. Chimento L. Symmetry and inflation // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65. P. 063517.
189. Cataldo M., Chimento L. Form invariant transformations between n- and m- dimensional flat Friedmann-Robertson-Walker cosmologies // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2008. Vol. 17. P. 1981–1989.
190. Chimento L., Richarte M., Sanchez G. Form invariance symmetry generates a large set of FRW cosmologies // *Mod. Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 28. P. 1250236.
191. Faraoni V., Capozziello S. *Beyond Einstein Gravity*. Dordrecht: Springer, 2011. 467 p.
192. Hussain I., Jamil M., Mahomed F. Noether Gauge Symmetry Approach in $f(R)$ Gravity // *Astrophys. Space Sci.* 2012. Vol. 337. P. 373–377.
193. Massaelli E., Motaharfar M., Sepangi H. R. General scalar–tensor cosmology: analytical solutions via noether symmetry // *Eur. Phys. J. C.* 2017. Vol. 77. P. 124.
194. Червон С.В., Фомин И.В., Кубасов А.С. Скалярные и киральные поля в космологии. У.: ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова», 2015. 215 с.
195. Червон С.В. Нелинейные поля в теории гравитации и космологии. У.: Ульяновский государственный университет, 1997. 191 с.
196. Kim H. Exact solutions in Einstein cosmology with a scalar field // *Mod. Phys. Lett. A.* 2013. Vol. 28. P. 1350089.
197. Chervon S.V., Fomin I.V., Beesham A. The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology // *Eur. Phys. J. C.* 2018. T. 78.
198. Easther R. An Inflationary model with an exact perturbation spectrum // *Class. Quant. Grav.* 1996. Vol. 13. P. 1775–1782.
199. Motohashi H., Starobinsky A., Yokoyama J. Inflation with a constant rate of roll // *JCAP.* 2015. Vol. 1509. P. 018.

200. Darboux G. Sur une Proposition Relative aux equations Lineaires // Comptes Rendus. 1882. Vol. 94. P. 1456–1459.
201. Wang W. Exact solution in chaotic inflation model with potential minima // Commun. Theor. Phys. 2001. Vol. 36. P. 122–124.
202. Pöschl G., Teller E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators // Zeitschrift für Physik. 1933. Vol. 83. P. 143.
203. Harrison E. Fluctuations at the threshold of classical cosmology // Phys. Rev. D. 1970. Vol. 1. P. 2726–2730.
204. Zeldovich Ya. B. Gravitational instability: An Approximate theory for large density perturbations // Astron. Astrophys. 1970. Vol. 5. P. 84–89.
205. Garcia-Bellido J. Cosmology and astrophysics // 2004 European School of High-Energy Physics, Sant Feliu de Guixols, Spain, 30 May - 12 June 2004. 2005. P. 267–342.
206. Baumann D., Peiris H. Cosmological Inflation: Theory and Observations // Adv. Sci. Lett. 2009. Vol. 2. P. 105–120.
207. Parker L., Toms D. Quantum Field Theory in Curved Spacetime. C: Cambridge University Press, 2009. 472 p.
208. Bardeen J. Gauge Invariant Cosmological Perturbations // Phys. Rev. D. 1980. Vol. 22. P. 1882–1905.
209. Leach S., Liddle A. Inflationary perturbations near horizon crossing // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 63. P. 043508.
210. Лукаш В.Н. О соотношении тензорной и скалярной мод возмущений в космологии Фридмана // УФН. 2006. Т. 176. С. 113–116.
211. Akrami Y., Arroja F., Ashdown M. et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1807.06211>.
212. Chervon S., Novello M., Triay R. Exact cosmology and specification of an inflationary scenario // Gravitation and Cosmology. 2005. Vol. 11. P. 329–332.
213. Фомин И.В. Погрешность приближения медленного скатывания на инфляционной стадии эволюции Вселенной // Российская летняя школа-семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» (GRACOS-2007). Казань. 2007. С. 166–167.

214. Фомин И.В. Соотношения тензорной и скалярной мод возмущений в точных моделях космологической инфляции // Российская летняя школа-семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» (GRACOS-2007). Казань. 2007. С. 168–169.
215. Червон С.В., Фомин И.В. Квантовое рождение начальных космологических возмущений // Известия Вузов. Поволжский регион. Сер. Физико-математические науки. 2008. № 4(8). С. 97–107.
216. Chervon S., Fomin I. On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation // Gravitation and Cosmology. 2008. Vol. 14. P. 163–167.
217. Holtzman J. Microwave background anisotropies and large scale structure in universes with cold dark matter, baryons, radiation, and massive and massless neutrinos // Astrophys. J. Suppl. 1989. Vol. 71. P. 1–24.
218. Weinberg S. Cosmological fluctuations of short wavelength // Astrophys. J. 2002. Vol. 581. P. 810–816.
219. Maggiore M. Gravitational wave experiments and early universe cosmology // Phys. Rept. 2000. Vol. 331. P. 283–367.
220. Sahni V., Sami M., Souradeep T. Relic gravity waves from brane world inflation // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 65. P. 023518.
221. BICEP2 / Keck Array x: Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and New BICEP2/Keck Observations through the 2015 Season / P. Ade, Z. Ahmed, R. Aikin et al. // Phys. Rev. Lett. 2018. Vol. 121. P. 221301.
222. Герценштейн М.Е., Пустовойт В.И. К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 605–607.
223. Forward R. Wideband laser-interferometer gravitational-radiation experiment // Phys. Rev. D. 1978. Vol. 17. P. 379–390.
224. Пустовойт В.И. О непосредственном обнаружении гравитационных волн // УФН. 2016. Т. 186. С. 1133–1152.
225. Руденко В.Н. Гравитационно-волновой эксперимент в России // УФН. 2017. Т. 187. С. 892–905.
226. Лазерные гравитационно-волновые антенны / В.И. Пустовойт, А.Н. Морозов, В.О. Гладышев [и др.]. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 64 с.

227. Sub-Femto- g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results / M. Armano, H. Audley, G. Auger et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116. P. 231101.
228. Cruise A., Ingle R. A prototype gravitational wave detector for 100-MHz // *Class. Quant. Grav.* 2006. Vol. 23. P. 6185–6193.
229. Laser-interferometric Detectors for Gravitational Wave Background at 100 MHz: Detector Design and Sensitivity / A. Nishizawa, S. Kawamura, T. Akutsu et al. // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77. P. 022002.
230. Gladyshev V., Morozov A. Low-frequency optical resonance in a multiple-wave Fabry-Perot interferometer // *Technical Physics Letters.* 1993. Vol. 19. P. 449–451.
231. Gladyshev V., Morozov A. The theory of a Fabry-Perot interferometer in a gravitational-wave experiment // *J. Moscow Phys. Soc.* 1996. Vol. 6. P. 209–221.
232. Gladyshev V., Morozov A. Classification of Gravitational-Wave Antennas by the Methods of Gravitational Radiation Detection // *Measurement Techniques.* 2000. Vol. 43. P. 741.
233. Применение низкочастотного оптического резонанса для регистрации высокочастотных гравитационных волн / Есаков А.А., А.Н. Морозов, С.Е. Табалин [и др.] // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2015. № 1(58). С. 26–35.
234. Fomin I.V., Morozov A.N. The high-frequency gravitational waves in exact inflationary models with Gauss-Bonnet term // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Т. 798.
235. Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н. Гравитационные волны ранней Вселенной. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 156 с.
236. Fomin I.V. The chiral cosmological models with two components // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Т. 918.
237. Barrow J., Paliathanasis A. Observational Constraints on New Exact Inflationary Scalar-field Solutions // *Phys. Rev. D.* 2016. Vol. 94. P. 083518.
238. Armendariz-Picon C., Neelakanta J. How Cold is Cold Dark Matter? // *JCAP.* 2014. Vol. 1403. P. 049.
239. Byrnes C., Tasinato G. Non-Gaussianity beyond slow roll in multi-field inflation // *JCAP.* 2009. Vol. 0908. P. 016.

240. Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter / C. Boehmer, G. Caldera-Cabral, R. Lazkoz et al. // AIP Conf. Proc. 2009. Vol. 1122. P. 197–200.
241. Costa F., Alcaniz J., Jain D. An interacting model for the cosmological dark sector // Phys. Rev. D. 2012. Vol. 85. P. 107302.
242. Chervon S. On the chiral model of cosmological inflation // Russ. Phys. J. 1995. Vol. 38. P. 539–543.
243. Chervon S. Chiral nonlinear sigma models and cosmological inflation // Gravitation and Cosmology. 1995. Vol. 1. P. 91–96.
244. Chervon S. A global evolution of the universe filled with scalar or chiral fields // Grav. Cosmol. Suppl. 2002. Vol. 8. P. 32–40.
245. Chimento L. Extended tachyon field, Chaplygin gas and solvable k-essence cosmologies // Phys. Rev. D. 2004. Vol. 69. P. 123517.
246. Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Steinhardt P. A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 4438–4441.
247. Chiba T., Okabe T., Yamaguchi M. Kinetically driven quintessence // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. P. 023511.
248. Aguirregabiria J., Chimento L., Lazkoz R. Quintessence as k-essence // Phys. Lett. B. 2005. Vol. 631. P. 93–99.
249. Bamba K., Matsumoto J., Nojiri S. Cosmological perturbations in k -essence model // Phys. Rev. D. 2012. Vol. 85. P. 084026.
250. Barenboim G., Kinney W. Slow roll in simple non-canonical inflation // JCAP. 2007. Vol. 0703. P. 014.
251. Sahni V., Wang L. A New cosmological model of quintessence and dark matter // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. P. 103517.
252. Peterson C., Tegmark M. Testing Two-Field Inflation // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 83. P. 023522.
253. Ruzmaikina T., Ruzmaikin A. Quadratic Corrections to the Lagrangian Density of the Gravitational Field and the Singularity // JETP. 1970. Vol. 30. P. 372.

254. An Observational test of two-field inflation / D. Wands, N. Bartolo, S. Matarrese et al. // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 66. P. 043520.
255. Garcia-Bellido J., Wands D. Metric perturbations in two field inflation // Phys. Rev. D. 1996. Vol. 53. P. 5437–5445.
256. Garcia-Bellido J., Linde A. D., Wands D. Density perturbations and black hole formation in hybrid inflation // Phys. Rev. D. 1996. Vol. 54. P. 6040–6058.
257. Adiabatic and entropy perturbations from inflation / C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett et al. // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 63. P. 023506.
258. Byrnes C., Choi K. Review of local non-Gaussianity from multi-field inflation // Adv. Astron. 2010. Vol. 2010. P. 724525.
259. Starobinsky A., Tsujikawa S., Yokoyama J. Cosmological perturbations from multifield inflation in generalized Einstein theories // Nucl. Phys. B. 2001. Vol. 610. P. 383–410.
260. Non-Gaussianity from inflation: Theory and observations / N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese et al. // Phys. Rept. 2004. Vol. 402. P. 103–266.
261. Nordström G. Relativitätsprinzip und Gravitation // Physikalische Zeitschrift. 1912. Vol. 13. P. 1126.
262. Nordström G. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzip // Ann. Phys. 1913. Vol. 42. P. 513.
263. Einstein A. Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems // Physikalische Zeitschrift. 1913. Vol. 14. P. 1249.
264. Jordan P. Formation of the Stars and Development of the Universe // Nature. 1949. Vol. 164. P. 637–640.
265. Fierz M. On the physical interpretation of P. Jordan's extended theory of gravitation // Helv. Phys. Acta. 1956. Vol. 29. P. 128–134.
266. Jordan P. Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen // Z. Phys. 1959. Vol. 157. P. 112–121.
267. Brans C., Dicke R. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 925–935.
268. Bergmann P. Comments on the scalar tensor theory // Int. J. Theor. Phys. 1968. Vol. 1. P. 25–36.

269. Nordtvedt J. PostNewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observational consequences // *Astrophys. J.* 1970. Vol. 161. P. 1059–1067.
270. Wagoner R. Scalar tensor theory and gravitational waves // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 1. P. 3209–3216.
271. Singh T., Rai L. Scalar-tensor theories of gravitation: foundations and prospects // *Gen. Rel. Grav.* 1983. Vol. 15. P. 875–898.
272. Уилл К.М. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат, 1985. 294 с.
273. Dirac P. The Cosmological constants // *Nature.* 1937. Vol. 139. P. 323.
274. Dirac P. New basis for cosmology // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1938. Vol. A165. P. 199–208.
275. Jordan P. Zur empirischen Kosmologie // *Die Naturwissenschaften.* 1938. Vol. 26. P. 417–421.
276. Accelerating universe in scalar tensor models: Confrontation of theoretical predictions with observations / M. Demianski, E. Piedipalumbo, C. Rubano et al. // *Astron. Astrophys.* 2006. Vol. 454. P. 55–66.
277. Cosmological models in scalar tensor theories of gravity and observations: A class of general solutions / M. Demianski, E. Piedipalumbo, C. Rubano et al. // *Astron. Astrophys.* 2008. Vol. 481. P. 279–294.
278. Belinchón J., Harko T., Mak M. Exact scalar-tensor cosmological models // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2017. Vol. 26. P. 1750073.
279. Belinchon J., Davila P. Exact solutions for a scalar-tensor theory through symmetries // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 2017. Vol. 14. P. 1750104.
280. Belinchon J., Harko T., Mak M. K. Exact Scalar-Tensor Cosmological Solutions via Noether Symmetry // *Astrophys. Space Sci.* 2016. Vol. 361. P. 52.
281. Morris J. Generalized slow roll conditions and the possibility of intermediate scale inflation in scalar tensor theory // *Class. Quant. Grav.* 2001. Vol. 18. P. 2977–2988.
282. De Felice A., Tsujikawa S. Primordial non-Gaussianities in general modified gravitational models of inflation // *JCAP.* 2011. Vol. 1104. P. 029.
283. Chaotic inflation in modified gravitational theories / A. De Felice, S. Tsujikawa, J. Elliston et al. // *JCAP.* 2011. Vol. 1108. P. 021.

284. De Felice A., Tsujikawa S. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models // JCAP. 2012. Vol. 1202. P. 007.
285. Possible evolution of a bouncing universe in cosmological models with non-minimally coupled scalar fields / E. Pozdeeva, M. Skugoreva, A. Toporensky et al. // JCAP. 2016. Vol. 1612. P. 006.
286. Voloshin M., Dolgov A. On gravitational interaction of the Goldstone bosons // Sov. J. Nucl. Phys. 1982. Vol. 35. P. 120–121.
287. Leutwyler H., Shifman M. Goldstone bosons generate peculiar conformal anomalies // Phys. Lett. B. 1989. Vol. 221. P. 384–388.
288. Hosotani Y. Stability of Scalar Fields in Curved Space // Phys. Rev. D. 1985. Vol. 32. P. 1949.
289. Buchbinder I., Odintsov S. Asymptotical conformal invariance in curved space-time // Lett. Nuovo Cim. 1985. Vol. 42. P. 379–381.
290. Elizalde E., Odintsov S. Renormalization group improved effective potential for finite grand unified theories in curved space-time // Phys. Lett. B. 1994. Vol. 333. P. 331–336.
291. Moss I., Sahni V. Anisotropy in the Chaotic Inflationary Universe // Phys. Lett. B. 1986. Vol. 178. P. 159–162.
292. Odintsov S. Renormalization Group, Effective Action and Grand Unification Theories in Curved Space-time // Fortsch. Phys. 1991. Vol. 39. P. 621–641.
293. Muta T., Odintsov S. Model dependence of the nonminimal scalar graviton effective coupling constant in curved space-time // Mod. Phys. Lett. A. 1991. Vol. 6. P. 3641–3646.
294. Bassett B., Liberati S. Geometric reheating after inflation // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58. P. 021302.
295. Chiba T. Quintessence, the gravitational constant, and gravity // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 60. P. 083508.
296. Fakir R., Habib S., Unruh W. Cosmological density perturbations with modified gravity // Astrophys. J. 1992. Vol. 394. P. 396.
297. Hwang J., Noh H. COBE differential microwave radiometer constraints on an inflation model with nonminimal scalar field // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 5274–5277.

298. Makino N., Sasaki M. The Density perturbation in the chaotic inflation with nonminimal coupling // *Prog. Theor. Phys.* 1991. Vol. 86. P. 103–118.
299. Bertotti B., Iess L., Tortora P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft // *Nature*. 2003. Vol. 425. P. 374–376.
300. Zwiebach B. Curvature Squared Terms and String Theories // *Phys. Lett. B.* 1985. Vol. 156. P. 315–317.
301. Zumino B. Gravity Theories in More Than Four-Dimensions // *Phys. Rept.* 1986. Vol. 137. P. 109.
302. String-inspired Gauss-Bonnet gravity reconstructed from the universe expansion history and yielding the transition from matter dominance to dark energy / G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri et al. // *Phys. Rev. D.* 2007. Vol. 75. P. 086002.
303. Ishihara H. Cosmological Solutions of the Extended Einstein Gravity with the Gauss-Bonnet Term // *Phys. Lett. B.* 1986. Vol. 179. P. 217–222.
304. Toporensky A., Tretyakov P. Power-law anisotropic cosmological solution in 5+1 dimensional Gauss-Bonnet gravity // *Gravitation and Cosmology.* 2007. Vol. 13. P. 207–210.
305. Ivashchuk V. On cosmological-type solutions in multi-dimensional model with Gauss-Bonnet term // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 2010. Vol. 7. P. 797–819.
306. Nojiri S., Odintsov S., Sami M. Dark energy cosmology from higher-order, string-inspired gravity and its reconstruction // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 74. P. 046004.
307. Calcagni G., de Carlos B., De Felice A. Ghost conditions for Gauss-Bonnet cosmologies // *Nucl. Phys. B.* 2006. Vol. 752. P. 404–438.
308. Carter B., Neupane I. Towards inflation and dark energy cosmologies from modified Gauss-Bonnet theory // *JCAP.* 2006. Vol. 0606. P. 004.
309. Nojiri S., Odintsov S. Modified Gauss-Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy // *Phys. Lett. B.* 2005. Vol. 631. P. 1–6.
310. Yi Z., Gong Y., Sabir M. Inflation with Gauss-Bonnet coupling // *Phys. Rev. D.* 2018. Vol. 98. P. 083521.
311. Guo Z., Schwarz D. Power spectra from an inflaton coupled to the Gauss-Bonnet term // *Phys. Rev. D.* 2009. Vol. 80. P. 063523.

312. Guo Z., Schwarz D. Slow-roll inflation with a Gauss-Bonnet correction // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 81. P. 123520.
313. Jiang P., Hu J., Guo Z. Inflation coupled to a Gauss-Bonnet term // Phys. Rev. D. 2013. Vol. 88. P. 123508.
314. Observational constraints on slow-roll inflation coupled to a Gauss-Bonnet term / S. Koh, B. Lee, W. Lee et al. // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 90. P. 063527.
315. Koh S., Lee B., Tumurtushaa G. Reconstruction of the Scalar Field Potential in Inflationary Models with a Gauss-Bonnet term // Phys. Rev. D. 2017. Vol. 95. P. 123509.
316. Mathew J., Shankaranarayanan S. Low scale Higgs inflation with Gauss-Bonnet coupling // Astropart. Phys. 2016. Vol. 84. P. 1–7.
317. Lahiri S. Anisotropic inflation in Gauss-Bonnet gravity // JCAP. 2016. Vol. 1609. P. 025.
318. Kanti P., Gannouji R., Dadhich N. Gauss-Bonnet Inflation // Phys. Rev. D. 2015. Vol. 92. P. 041302.
319. Comment on Gauss-Bonnet inflation / G. Hikmawan, J. Soda, A. Suroso et al. // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 93. P. 068301.
320. Kase R., Tsujikawa S. Cosmology in generalized Horndeski theories with second-order equations of motion // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 90. P. 044073.
321. Maldacena J. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models // JHEP. 2003. Vol. 05. P. 013.
322. Mizuno S., Koyama K. Primordial non-Gaussianity from the DBI Galileons // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 82. P. 103518.
323. Martin J., Schwarz D. WKB approximation for inflationary cosmological perturbations // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 67. P. 083512.
324. Разработка и создание макета для регистрации высокочастотных гравитационных волн / И.С. Голяк, С.К. Дворук, А.А. Есаков [и др.] // Физические основы приборостроения. 2016. Т. 5, № 3 (20). С. 40–47.
325. Generation and detection of high frequency gravitational waves at intensive electromagnetic excitation / V. Gorelik, V. Pustovoit, V. Gladyshev et al. // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1051. P. 012001.

Список рисунков

1.1	Основные классы потенциалов скалярного поля в моделях космологической инфляции.	25
3.1	Диаграммы $r = r(n_S)$ для различных значений параметра m	107
3.2	Диаграммы $r = r(n_S)$ для степенной и экспоненциально-степенной инфляции. .	109
3.3	Спектры гравитационных волн различного происхождения и чувствительность некоторых экспериментов. Рисунок взят из работ [234; 235]. .	118
6.1	Потенциал скалярного поля $V(\phi)$ для различных значений параметра неминимального взаимодействия α_{GB}	164
6.2	Параметры космологических возмущений и скорости распространения скалярных и тензорных мод для модели ЭГБ-инфляции с масштабным фактором (6.60) в случае $\alpha_{GB} = 1$, $A = 10$	167

Список таблиц

1	Генерирующие функции и их связь с суперпотенциалом	64
2	Точные космологические решения для моделей, основанных на ОТО	84
3	Расхождение между точными и приближенными решениями по числу e-фолдов для некоторых моделей космологической инфляции.	89
4	Параметры медленного скатывания и число e-фолдов для некоторых моделей инфляции	102
5	Модели космологической инфляции и расхождение по параметрам космологических возмущений	111

Приложение А

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, включенных в список ВАК:

1. Chervon S.V., Fomin I.V. On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation // *Gravitation and Cosmology*. 2008. Vol. 14. P. 163-167.
2. Фомин И.В. Применение низкочастотного оптического резонанса для регистрации высокочастотных гравитационных волн / И.В. Фомин [и др.] // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2015. № 1(58). С. 26-35.
3. Фомин И.В. Модели с нетривиальной кинетической частью в контексте точных решений уравнений динамики скалярного поля // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2015. №4(61). С. 37-44.
4. Фомин И.В. Гравитационные волны в конформно-плоских пространствах // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2016. № 4(67). С. 65-78.
5. Fomin I.V. Velocity of Light in Anisotropic Spacetime // *Russ. Phys. J.* 2016. Vol. 59. P. 41-47.
6. Fomin I.V. Cosmological inflation models in the kinetic approximation // *Theor. Math. Phys.* 2017. Vol. 191. P. 781-791.
7. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact and Approximate Solutions in the Friedmann Cosmology // *Russ. Phys. J.* 2017. Vol. 60. P. 427-440.
8. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact inflation in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // *Gravitation and Cosmology*. 2017. Vol. 23. P. 367-374.
9. Fomin I.V., Chervon S.V. A new approach to exact solutions construction in scalar cosmology with a Gauss-Bonnet term // *Mod. Phys. Lett. A*. 2017. Vol. 32. P. 1750129.
10. Fomin I.V. Cosmological Inflation with Einstein-Gauss-Bonnet Gravity // *Physics of Particles and Nuclei*. 2018. Vol. 49. P. 525-529.
11. Chervon S.V., Fomin I.V., Beesham A. The method of generating functions in exact scalar field inflationary cosmology // *Eur. Phys. J. C*. 2018. Vol. 78. P. 301.
12. Fomin I.V. Generalized exact solutions in the Friedmann cosmology // *Russ. Phys. J.* 2018. Vol. 61. P. 843-851.
13. Fomin I.V. Two-Field Cosmological Models with a Second Accelerated Expansion of the Universe // *Moscow University Physics Bulletin*. 2018. Vol. 73. P. 696-701.
14. Фомин И.В. Точные решения в космологии на основе нелинейных сигма-моделей // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2018. № 2. С. 49-58.

15. Фомин И.В. Точные решения в космологии Фридмана со скалярными полями // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2018. № 1. С. 36-45.
16. Fomin I.V., Chervon S.V. Non-minimal coupling influence on the deviation from de Sitter cosmological expansion // *Eur. Phys. J. C*. 2018. Vol. 78. P. 918.
17. Fomin I.V., Chervon S.V. Inflation with explicit parametric connection between GR and scalar-tensor gravity // *Mod. Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 33. P. 1850161.
18. Фомин И.В. Конструирование точных решений в космологии, основанной на гравитации Хорндески // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2018. № 2. С. 59-67.
19. Fomin I.V., Chervon S.V., Maharaj S.D. A new look at the Schrodinger equation in exact scalar field cosmology // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2019. Vol. 16. P. 1950022.

Публикации в других изданиях:

20. Червон С.В., Фомин И.В. Квантовое рождение начальных космологических возмущений // *Известия Вузов. Поволжский регион. Сер. Физико-математические науки*. 2008. № 4. С. 97-107.
21. Fomin I.V. The models of cosmological inflation in the context of kinetic approximation // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Vol. 731. P. 012004.
22. Fomin I.V., Morozov A.N. The high-frequency gravitational waves in exact inflationary models with Gauss-Bonnet term. // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Vol. 798. P. 012088.
23. Fomin I.V. The chiral cosmological models with two components // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Vol. 918. P. 012009.
24. Fomin I.V. Generation and detection of high frequency gravitational waves at intensive electromagnetic excitation / I.V. Fomin et al. // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. Vol. 1051. P. 012001.
25. Фомин И.В., Червон С.В., Крюков С.В. Динамика киральных космологических полей в фантомно-канонической модели // *Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физико-математические и технические науки*. 2018. № 1. С. 74-80.

Монографии:

26. Червон С.В., Фомин И.В., Кубасов А.С. Скалярные и киральные поля в космологии. У.: ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2015. 215 с.
27. Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н. Гравитационные волны ранней Вселенной. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 156 с.

Публикации в сборниках трудов конференций:

28. Фомин И.В. Погрешность приближения медленного скатывания на инфляционной стадии эволюции Вселенной // Сборник Российской летней школы-семинара «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» (GRACOS-2007). Казань. 2007. С. 166-167.
29. Фомин И.В., Червон С.В. Соотношения тензорной и скалярной мод возмущений в точных моделях космологической инфляции // Сборник Российской летней школы-семинара «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» (GRACOS-2007). Казань. 2007. С. 168-169.
30. Fomin I.V. High-frequency gravitational waves in exact inflationary models // Proceedings of 12th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology (ICGAC-12). Moscow. 2015. P. 255-256.